

Ableitung von Formfunktionen für finite Standard- und Übergangselemente auf der Grundlage der gemischten Interpolation

Johannes Altenbach, Eckhard Scholz

1. Einführung

Die Dimensionierung hochbeanspruchter Bauteile mit der Zielstellung hoher Materialökonomie und Betriebssicherheit erfordert die kontinuierliche Verbesserung der Berechnungsverfahren. International hat sich vor allem die Methode der finiten Elemente (FEM) als leistungsfähiges, computerorientiertes Berechnungsverfahren durchgesetzt. Dabei spielten die gute rechentechnische Realisierbarkeit, verbunden mit einer guten Lösungsqualität bei vertretbarem Aufwand eine wesentliche Rolle. Um eine dem realen Bauteilverhalten möglichst angepaßte Lösung zu erzielen, ist es wesentlich, die Diskretisierung des Modells dem erwarteten qualitativen Lösungsverlauf gut anzupassen. Dabei ist zu beachten, daß in Gebieten mit schwach wechselnden Beanspruchungen ein relativ grobes Elementnetz in der Lage ist, das Lösungsverhalten hinreichend genau wiederzugeben. In Gebieten mit einer starken Lösungsveränderlichkeit wird jedoch eine angemessene lokale Verdichtung des Elementnetzes unumgänglich.

Lokale Lösungsverbesserungen lassen sich auf zwei prinzipiell unterschiedlichen Wegen erzielen. Der eine Weg besteht in der Möglichkeit, die Approximationsfunktion zu verbessern, d. h. z. B. die Ordnung eines Interpolationspolynoms zu erhöhen. Problematisch kann dabei die ausreichende geometrische Anpassungsfähigkeit in Verbindung mit dem isoparametrischen Konzept sein, da Polynome höherer Ordnung ein schlechtes Verhalten hinsichtlich der Krümmungsanpassung aufweisen [1]. Der andere Weg, eine Diskretisierungsverdichtung in kritischen Bereichen, weist diese Nachteile nicht auf, zeigt jedoch nach [2] ein schlechteres Konvergenzverhalten. Bei beiden Möglichkeiten ist jedoch die Entwicklung spezieller Elemente angebracht. Während der erste Weg die sogenannte p-Verbesserung, die Entwicklung von Elementen mit unterschiedlicher Polynomordnung im Element einschließt, begünstigt der zweite Weg, die h-Verfeinerung, die Entwicklung kompatibler Übergangselemente mit stückweise definierten Ansatzfunktionen, die den Anschluß einer an mehrere Elementkanten bzw. -flächen bei 3D-Modellen ermöglichen [3].

Eine in letzter Zeit in der internationalen Literatur stärker beachtete Möglichkeit zur Entwicklung der Elementansatzfunktionen solcher Spezialelemente, die die bekannten Elementfamilien der Serendipity-Klasse mit einschließt, ist die Methode der gemischten Interpolation (blending - function - method). Ihre zunehmende Verbreitung zeigt sich in einer größeren Zahl neuer Arbeiten [4] bis [14].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich sowohl die Ansatzfunktionen der bekannten Standard-Verschiebungselemente als auch von Spezialelementen mit stückweise differenzierbaren Randverschiebungsansätzen zur Realisierung starker lokaler Netzverfeinerungen mit Hilfe der gemischten Interpolation herleiten lassen. Obwohl die Methode der gemischten Interpolation keine prinzipiellen Grenzen hinsichtlich der Polynomordnung der Randverschiebungsansätze vorschreibt, erfolgt hier eine Beschränkung auf Polynomansätze zweiter Ordnung bzw. stückweise Polynomansätze zweiter Ordnung. Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung im Zusammenhang mit modernen Datengeneratoren und einer übersichtlicheren Vernetzungstechnik sind nur rechteckige bzw. quaderförmige Interpolationsgebiete berücksichtigt.

2. Die Methode der gemischten Interpolation als Hilfsmittel zur Konstruktion zusammengesetzter zwei- und dreidimensionaler Interpolationsfunktionen

Die Methode der gemischten Interpolation ist eine Interpolationstechnik, bei der die Approximation von Funktionen mehrerer Variabler mit Hilfe gemischter Interpolationsfunktionen in einer Variablen vorgenommen wird. Das Ziel der Methode besteht in der Gewinnung einer Interpolationsfunktion $U(\xi_1, \xi_2)$, die im Gebiet $-1 \leq \xi_1 \leq +1$ und $-1 \leq \xi_2 \leq +1$ stetig ist und an den Rändern beliebige vorgegebene Randverschiebungsansätze $u(\xi_1, \pm 1)$ bzw. $u(\pm 1, \xi_2)$ erfüllt, Bild 2.1.

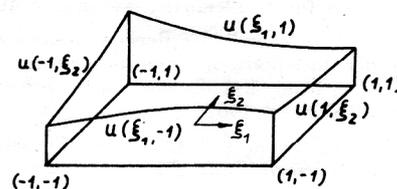


Bild 2.1
 Interpolationsgebiet mit Randverschiebungsansätzen

Mit Hilfe der beiden Interpolationsansätze $I_1(\xi)$ und $I_2(\xi)$ läßt sich folgende Projektion der Randverschiebungsansätze in das Innere des Gebietes vornehmen.

$$P_{\xi_1} [u] = u(1, \xi_2) I_1(\xi_1) + u(-1, \xi_2) I_2(\xi_1)$$

$$P_{\xi_2} [u] = u(\xi_1, 1) I_1(\xi_2) + u(\xi_1, -1) I_2(\xi_2) \quad (2.1)$$

P_{ξ_1} und P_{ξ_2} sind dabei zwei aufeinander senkrecht stehende Interpolationsoperatoren und I_1 und I_2 ergeben sich zum Beispiel aus einer linearen Interpolationsfunktion entsprechend Gl. (2.2).

$$I_1(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

$$I_2(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (2.2)$$

Damit ist die Projektion $P_{\xi_1} [u]$ durch die Randverläufe $u(\pm 1, \xi_2)$ vollständig bestimmt. Ebenso ist $P_{\xi_2} [u]$ durch die Randverläufe von $u(\xi_1 \pm 1)$ eindeutig festgelegt. Zuletzt erfolgt die Definition eines gemischten Interpolationsoperators P nach Gl. (2.3).

$$P[u(\xi_1, \xi_2)] = P_{\xi_1} [u] + P_{\xi_2} [u] - P_{\xi_1} [P_{\xi_2} [u]] \quad (2.3)$$

Unter Beachtung der Tatsache, daß $P_{\xi_1} [u(\pm 1, \xi_2)]$ identisch mit $u(\pm 1, \xi_2)$ und $P_{\xi_2} [u(\xi_1, \pm 1)]$ identisch mit $u(\xi_1, \pm 1)$ ist, wird deutlich, daß $P[u(\xi_1, \xi_2)]$ eine stetige Fläche beschreibt, die die ausgangs festgelegten Randverschiebungsansätze realisiert. Damit ist

$$P[u(\xi_1, \xi_2)] \equiv U(\xi_1, \xi_2) \quad (2.4)$$

wobei $U(\xi_1, \xi_2)$ als gemischte Interpolationsfunktion bezeichnet wird.

Die Anwendung der gemischten Interpolation zur Konstruktion dreidimensionaler Interpolationsfunktionen läßt sich ganz analog darstellen. Es sei $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ die gesuchte gemischte Interpolationsfunktion im Intervall $-1 \leq \xi_i \leq +1$ mit $i = 1, 2, 3$. Die Definition der Interpolationsoperatoren P_{ξ_1} , P_{ξ_2} und P_{ξ_3} erfolgt entsprechend Gl. (2.5), wobei die Randverschiebungsansätze $u(\pm 1, \xi_2, \xi_3)$, $u(\xi_1, \pm 1, \xi_3)$ und $u(\xi_1, \xi_2, \pm 1)$ jetzt zweidimensionale Funktionen der Randflächen des Interpolationsgebietes nach Bild 2.2 darstellen, wie sie z. B. entsprechend Gl. (2.4) als zweidimensionale gemischte Interpolationsfunktionen vorliegen.

$$P_{\xi_1} [u] = u(1, \xi_2, \xi_3) I_1(\xi_1) + u(-1, \xi_2, \xi_3) I_2(\xi_1)$$

$$P_{\xi_2} [u] = u(\xi_1, 1, \xi_3) I_1(\xi_2) + u(\xi_1, -1, \xi_3) I_2(\xi_2)$$

$$P_{\xi_3} [u] = u(\xi_1, \xi_2, 1) I_1(\xi_3) + u(\xi_1, \xi_2, -1) I_2(\xi_3) \quad (2.5)$$

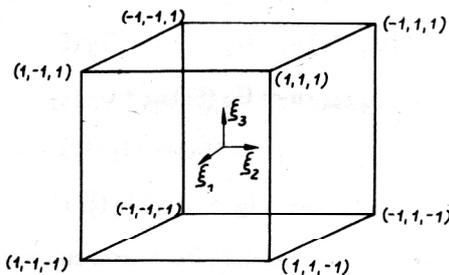


Bild 2.2
Dreidimensionales Interpolationsgebiet

I_1 und I_2 können in der in Gl. (2.2) für den zweidimensionalen Fall definierten Weise verwendet werden. Damit ist z. B. die Projektion $P_{\xi_1} [u]$ durch die Randverschiebungen $u(\pm 1, \xi_2, \xi_3)$ eindeutig festgelegt. Der gemischte Interpolationsoperator $P[u]$ wird für den dreidimensionalen Fall entsprechend Gl. (2.6) erweitert.

$$P[u] = P_{\xi_1} + P_{\xi_2} + P_{\xi_3} - P_{\xi_1} P_{\xi_2} - P_{\xi_2} P_{\xi_3} - P_{\xi_3} P_{\xi_1} + P_{\xi_1} P_{\xi_2} P_{\xi_3} \quad (2.6)$$

Damit ergibt sich analog zu Gl. (2.4) die dreidimensionale gemischte Interpolationsfunktion aus Gl. (2.7).

$$P[u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \equiv U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (2.7)$$

3. Die Ableitung der Ansatzfunktionen zweidimensionaler finiter Elemente

In diesem Abschnitt werden systematisch die Ansatzfunktionen für Rechteckelemente mit linearen, stückweise linearen, quadratischen und stückweise quadratischen Randverschiebungsansätzen hergeleitet.

Unter Einbeziehung des isoparametrischen Konzepts kann die Geometrie der vorgestellten Elemente entsprechend den Ansatzfunktionen variiert werden, d. h. die Elemente mit linearen bzw. stückweise linearen Ansätzen sind geradlinig bzw. polygonartig berandet, und die Elemente mit quadratischen bzw. stückweise quadratischen Ansätzen sind krummlinig bzw. stückweise krummlinig berandet. Bei der Herleitung werden die Gleichungen (2.1) bis (2.4) verwendet. Bild 3.1 zeigt ein Rechteckelement mit linearen Randverschiebungsansätzen entsprechend Gleichung (3.1).

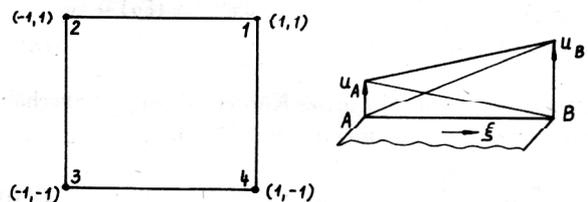


Bild 3.1
Rechteckelement mit linearen Randverschiebungsansätzen

$$u(\xi_1, \pm 1) = G_1(\xi_1) u(1, \pm 1) + G_2(\xi_1) u(-1, \pm 1) \quad (3.1)$$

$$u(\pm 1, \xi_2) = G_1(\xi_2) u(\pm 1, 1) + G_2(\xi_2) u(\pm 1, -1)$$

Dabei sind G_1 und G_2 lineare Ansätze entsprechend Gl. (3.2)

$$G_1 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (3.2)$$

Damit erhält man für den gemischten bilinearen Interpolationsoperator nach der Bildungsvorschrift aus Gl. (2.3) den vollständigen Verschiebungsansatz, wie er in Gl. (3.3) dargestellt ist

$$\begin{aligned}
U(\xi_1, \xi_2) = P[u] = & \\
& [G_1(\xi_2) u(1,1) + G_2(\xi_2) u(1,-1)] I_1(\xi_1) \\
& + [G_1(\xi_2) u(-1,1) + G_2(\xi_2) u(-1,-1)] I_2(\xi_1) \\
& + [G_1(\xi_1) u(1,1) + G_2(\xi_1) u(-1,1)] I_1(\xi_2) \\
& + [G_1(\xi_1) u(1,-1) + G_2(\xi_1) u(-1,-1)] I_2(\xi_2) \quad (3.3) \\
& - [I_1(\xi_2) u(1,1) + I_2(\xi_2) u(1,-1)] I_1(\xi_1) \\
& - [I_1(\xi_2) u(-1,1) + I_2(\xi_2) u(-1,-1)] I_2(\xi_1)
\end{aligned}$$

Einsetzen von Gl. (2.2) und (3.2) in (3.3) liefert den bekannten bilinearen Verschiebungsansatz entsprechend Gl. (3.4).

$$\begin{aligned}
U(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 + \xi_2) u_1 \\
& + \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 + \xi_2) u_2 \quad (3.4) \\
& + \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 - \xi_2) u_3 + \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 - \xi_2) u_4
\end{aligned}$$

Die Erweiterung auf ein Element mit stückweise linearem Randverschiebungsansatz, welches den Anschluß von zwei Elementen gestattet, vgl. Bild 3.2., erfordert jetzt lediglich die Bereitstellung eines entsprechenden Randverschiebungsansatzes.

Bild 3.3. zeigt einen solchen Randverschiebungsansatz, der durch Einfügen des Knotens 5 entsteht.

Im Vergleich zu Bild 3.1 tritt jetzt eine Differenz zwischen der Gerade von u_1 nach u_5 auf, die mit Δu_5 bezeichnet werden soll. Damit erweitert sich der Randverschiebungsansatz für diese Kante gegenüber Gl. (3.1) wie folgt:

$$\begin{aligned}
u(1, \xi_2) = & G_1(\xi_2) u_1 + G_4(\xi_2) u_4 + G_5(\xi_2) \Delta u_5 \\
\text{mit } G_5 = & 1 - \xi_2 / \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Unter Annahme der Lage des Knotens 5 bei $\xi_2 = 0$ erhält man für die Verschiebung u_5 jetzt Gl. (3.6).

$$u_5 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_4 + \Delta u_5 \quad (3.6)$$

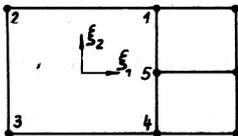


Bild 3.2
Verknüpfung von zwei Elementen mit einem Element mit stückweise linearem Randverschiebungsansatz

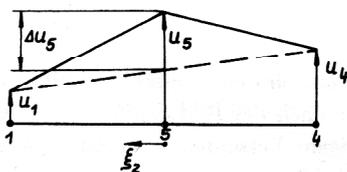


Bild 3.3
Randverschiebungsansatz mit Zwischenknoten

Stellt man diese Gleichung nach Δu_5 um und setzt sie in den ursprünglichen Randverschiebungsansatz ein, ergibt sich der endgültige, stückweise lineare Randverschiebungsansatz in folgender Form:

$$\begin{aligned}
u(1, \xi_2) = & G_1(\xi_2) u_1 + G_4(\xi_2) u_4 \\
& + G_5(\xi_2) \left[u_5 - \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_4 \right] \quad (3.7) \\
= & [G_1 - \frac{1}{2} G_5] u_1 + [G_4 - \frac{1}{2} G_5] u_4 + G_5 u_5
\end{aligned}$$

Setzt man diesen modifizierten Randverschiebungsverlauf $u(1, \xi_2)$ in den Interpolationsoperator $P_{\xi_1}[u]$ aus Gl. (2.1) ein und bildet die gemischte Interpolationsfunktion entsprechend Gl. (2.3), so erhält man analog zu Gleichung (3.3) und (3.4) die Ansatzfunktionen eines Elementes zur Realisierung starker Netzverfeinerungen. Prinzipiell lassen sich auch mehrere Zwischenknoten einbauen. So wird in [11] ein polygonartiges Übergangselement mit mehreren Zwischenknoten vorgestellt, welches in [12] in Verbindung mit finiten Streifenelementen zur Berechnung schiffbaulicher Konstruktionen verwendet wird.

Beim Übergang auf Randverschiebungsansätze zweiter Ordnung entsprechend den Gln. (3.8) erhält man unter Einbeziehung des isoparametrischen Konzepts das Standardelement der Serendipity-Klasse zweiter Ordnung, wie es in Bild 3.4 dargestellt ist.

$$\begin{aligned}
u(\xi_1, \pm 1) = & G_1(\xi_1) u(1, \pm 1) + G_2(\xi_1) u(0, \pm 1) \\
& + G_3(\xi_1) u(-1, \pm 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(\pm 1, \xi_2) = & G_1(\xi_2) u(\pm 1, 1) + G_2(\xi_2) u(\pm 1, 0) \\
& + G_3(\xi_2) u(\pm 1, -1)
\end{aligned}$$

$$\text{mit } G_1 = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1)$$

$$G_2 = 1 - \xi^2 \quad (3.8)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)$$

Setzt man diesen Randverschiebungsansatz zweiter Ordnung in die Gln. (2.1) bis (2.3) ein, ergibt sich als gemischte Interpolationsfunktion Gl. (3.9).

$$\begin{aligned}
U(\xi_1, \xi_2) = & P[u(\xi_1, \xi_2)] \\
= & [G_1(\xi_2) u_1 + G_2(\xi_2) u_8 + G_3(\xi_2) u_7] I_1(\xi_1) \\
& + [G_1(\xi_2) u_3 + G_2(\xi_2) u_4 + G_3(\xi_2) u_5] I_2(\xi_1) \\
& + [G_1(\xi_1) u_1 + G_2(\xi_1) u_2 + G_3(\xi_1) u_3] I_1(\xi_2) \\
& + [G_1(\xi_1) u_7 + G_2(\xi_1) u_6 + G_3(\xi_1) u_5] I_2(\xi_2) \\
& - [(I_1(\xi_2) u_1 + I_2(\xi_2) u_7) I_1(\xi_1) \\
& + (I_1(\xi_2) u_3 + I_2(\xi_2) u_5) I_2(\xi_1)] \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Um den entstehenden Serendipity-Ansatz zu veranschaulichen und um die Interpolationsfunktion z. B. des Knotens 1 zu isolieren, seien $u_2 - u_8$ identisch Null und u_1 sei 1. Dann ergibt sich aus Gl. (3.9) die bekannte Serendipity-Ansatzfunktion entsprechend Gl. (3.10).

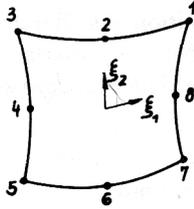


Bild 3.4
Standard – 8-Knoten-Element der Serendipity-Klasse

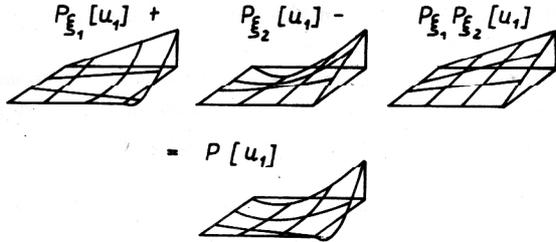


Bild 3.5
Ansatzfunktionen des Eckknotens 1 eines Elementes der Serendipity-Klasse zweiter Ordnung

$$u_1(\xi_1, \xi_2) = [G_1(\xi_2) I_1(\xi_1) + G_1(\xi_1) I_1(\xi_2) - I_1(\xi_2) I_1(\xi_1)] u_1 \quad (3.10)$$

Bild 3.5 veranschaulicht, wie sich dieser Ansatz für den Knoten 1 aus den einzelnen Interpolationsoperatoren zusammensetzt.

Eine Erweiterung auf ein kompatibles Übergangselement analog zu Bild 3.2 ist ohne weiteres möglich. Im Vergleich zu Bild 3.4 zeigt Bild 3.6 ein Übergangselement mit einer 5-Knotenkante, welches den direkten kompatiblen Anschluß von zwei Nachbar-Elementen 2. Ordnung ermöglicht. Den Ausgangspunkt bildet dabei die Erweiterung des quadratischen Randverschiebungsansatzes um zwei zusätzliche Knoten.

Gleichung (3.11) beschreibt den ursprünglichen Randverschiebungsansatz zweiter Ordnung, der jetzt um die zwei zulässigen Verschiebungsdifferenzen Δu_9 und Δu_{10} erweitert ist.

$$u(\xi_1, 1) = G_1(\xi_1) u_1 + G_2(\xi_1) u_2 + G_3(\xi_1) u_3 + G_9(\xi_1) \Delta u_9 + G_{10}(\xi_1) \Delta u_{10} \quad (3.11)$$

$$\text{mit } G_1 = \frac{1}{2} \xi(\xi+1) \quad \text{und} \quad G_9 = 2(1-\xi)/(\xi/\xi+\xi)$$

$$G_2 = 1 - \xi^2 \quad G_{10} = 2(1+\xi)/(\xi/\xi-\xi)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$$

Damit ergeben sich die Verschiebungen u_9 und u_{10} entsprechend den Gln. (3.12).

$$u_9 = \frac{3}{8} u_1 + \frac{6}{8} u_2 - \frac{1}{8} u_3$$

$$u_{10} = -\frac{1}{8} u_1 + \frac{6}{8} u_2 + \frac{3}{8} u_3 \quad (3.12)$$

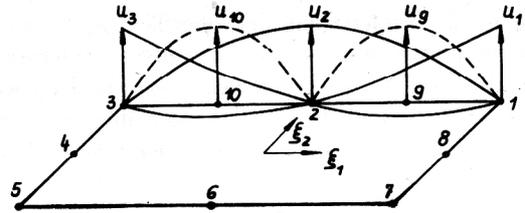


Bild 3.6
Kompatibles Übergangselement mit stückweise quadratischem Randverschiebungsansatz an einer Knotenkante

Das Einsetzen von Gl. (3.12) und (3.11) liefert den endgültigen Randverschiebungsansatz Gl. (3.13).

$$u(\xi_1, 1) = [G_1 - \frac{3}{8} G_9 + \frac{1}{8} G_{10}] u_1 + [G_2 - \frac{6}{8} G_9 - \frac{6}{8} G_{10}] u_2 + [G_3 + \frac{1}{8} G_9 - \frac{3}{8} G_{10}] u_3 + G_9 u_9 + G_{10} u_{10} \quad (3.13)$$

Mit Hilfe dieses erweiterten Randverschiebungsansatzes läßt sich über die Gln. (2.1) bis (2.3) der vollständige Verschiebungsansatz herleiten.

4. Die Ableitung der Ansatzfunktionen dreidimensionaler finiter Vollkörper-Elemente

Analog zum Abschnitt 3. soll jetzt die Konstruktion der Ansatzfunktionen für Hexaederelemente mit linearen, stückweise linearen, quadratischen und stückweise quadratischen Randverschiebungsansätzen demonstriert werden. Das Interpolationsgebiet bildet dabei der in Bild 2.2 dargestellte Hexaeder. Entsprechend den Gln. (2.5) bilden die Randverschiebungsansätze der sechs Randflächen des Hexaeders den Ausgangspunkt der Untersuchungen. Dabei ist es zweckmäßig, die in Abschnitt 3. erhaltenen Ergebnisse zu berücksichtigen, da die dort gewonnenen gemischten Interpolationsfunktionen als Randverschiebungsansätze für die Hexaederflächen verwendet werden können. In Bild 4.1 ist ein 8-Knoten-Element mit linearen Randverschiebungsansätzen dargestellt.

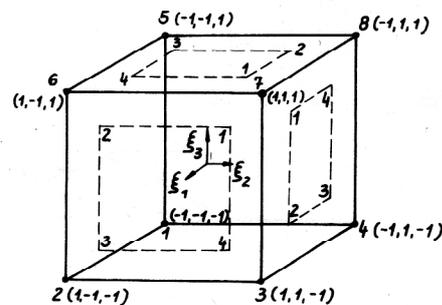


Bild 4.1
8-Knoten-Hexaederelement mit linearen Randverschiebungsansätzen

Das Bild 4.1 zeigt die lokale Elementnumerierung und die lokale Numerierung der Oberflächen, die so vorgenommen werden muß, daß die gemischte Interpolationsfunktion aus Gl. (3.4) mit den beiden in der jeweiligen Oberfläche befindlichen Koordinaten übereinstimmt. Die Randverschiebungsansätze sind in den Gln. (4.1) zusammengefaßt.

$$\begin{aligned}
 u(\pm 1, \xi_2, \xi_3) &= G_1(\xi_2, \xi_3) u(\pm 1, 1, 1) \\
 &+ G_2(\xi_2, \xi_3) u(\pm 1, -1, 1) \\
 &+ G_3(\xi_2, \xi_3) u(\pm 1, -1, -1) + G_4(\xi_2, \xi_3) u(\pm 1, 1, -1) \\
 u(\xi_1, \pm 1, \xi_3) &= G_1(\xi_3, \xi_1) u(1, \pm 1, 1) \\
 &+ G_2(\xi_3, \xi_1) u(1, \pm 1, -1) \\
 &+ G_3(\xi_3, \xi_1) u(-1, \pm 1, -1) + G_4(\xi_3, \xi_1) u(-1, \pm 1, 1) \\
 u(\xi_1, \xi_2, \pm 1) &= G_1(\xi_1, \xi_2) u(1, 1, \pm 1) \\
 &+ G_2(\xi_1, \xi_2) u(-1, 1, \pm 1) \\
 &+ G_3(\xi_1, \xi_2) u(-1, -1, \pm 1) + G_4(\xi_1, \xi_2) u(1, -1, \pm 1)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 G_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), \\
 G_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2), \\
 G_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), \\
 G_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2). \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Setzt man die Randverschiebungsansätze aus Gl. (4.1) in Gl. (2.5) ein, und verknüpft die so entstandenen Interpolationsoperatoren entsprechend Gl. (2.6), erhält man die trilineare gemischte Interpolationsfunktion, aus der sich gegebenenfalls analog zu den Gln. (3.9) bis (3.10) die einzelnen Ansatzfunktionen für die jeweiligen Knoten isolieren lassen.

Ein Übergangselement zur Realisierung einer zweiachsig Netzverfeinerung ist in Bild 4.2 dargestellt.

Die Ableitung der Ansatzfunktionen für ein solches Übergangselement erfolgt analog zu dem in Bild 4.1 dar-

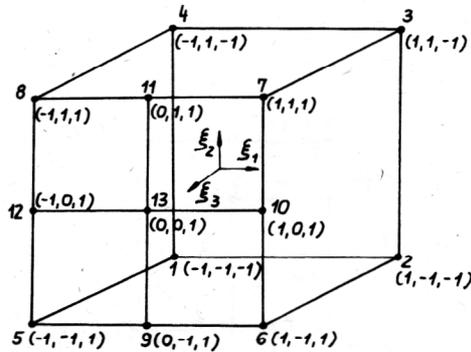


Bild 4.2
Kompatibles Übergangselement mit stückweise linearen Randverschiebungsansätzen

gestellten Standardelement. Es soll deshalb hier nur auf die abweichende Definition der Randverschiebungsansätze eingegangen werden. Die Ansätze der Randfläche $\xi_3 = -1$ sind gegenüber dem Standardelement unverändert und können aus Gl. (4.1) entnommen werden. Die 5-Knoten-Randflächen $\xi_1 = \pm 1$ und $\xi_2 = \pm 1$ sind gegenüber dem Standardelement modifiziert. Die Veränderung in den Randverschiebungsansätzen ist in Bild 3.2 bis 3.3 und den Gln. (3.5) bis (3.7) beschrieben. Die gemischte Interpolationsfunktion zur Beschreibung des Verschiebungsansatzes des in Bild 3.2 dargestellten ebenen Übergangselementes ist identisch mit den Randverschiebungsansätzen der 4 genannten Flächen. Die Fläche $\xi_3 = 1$ erfordert eine gesonderte Beschreibung.

Die Randverschiebungsansätze der Knoten 5–8 analog zu den Gln. (4.1) bilden den Ausgangspunkt. Sie sind in den Gln. (4.2) noch einmal zusammengefaßt.

$$G_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_1, \xi_{1i})(1 + \xi_2, \xi_{2i}) \quad \text{mit } i = 5, 6, 7, 8 \quad (4.2)$$

Dabei ist ξ_{1i} die lokale ξ_1 bzw. ξ_2 Koordinate des Knotens i . Die möglichen Verschiebungsdifferenzen $\Delta u_9 - \Delta u_{13}$ werden wie folgt angesetzt.

$$\begin{aligned}
 G_9 &= \frac{1}{2}(1 - |\xi_1|)(|\xi_2| - \xi_2), \\
 G_{10} &= \frac{1}{2}(1 - |\xi_2|)(|\xi_1| + \xi_1), \\
 G_{11} &= \frac{1}{2}(1 - |\xi_1|)(|\xi_2| + \xi_2), \\
 G_{12} &= \frac{1}{2}(1 - |\xi_2|)(|\xi_1| - \xi_1) \\
 G_{13} &= (1 - |\xi_1|)(1 - |\xi_2|) \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Randverschiebungsansatz für die Fläche $\xi_3 = 1$ zuerst in Form der Gl. (4.4).

$$\begin{aligned}
 u(\xi_1, \xi_2, +1) &= \sum_{i=5}^8 G_i(\xi_1, \xi_2) u_i \\
 &+ \sum_{i=9}^{12} G_i(\xi_1, \xi_2) \Delta u_i \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Lage der Knoten im lokalen Koordinatensystem erhält man damit für die Randverschiebungen der Knoten 9 bis 13 die Gln. (4.5).

$$\begin{aligned}
 u_9 &= \frac{1}{2} u_5 + \frac{1}{2} u_6 + \Delta u_9 \\
 u_{10} &= \frac{1}{2} u_6 + \frac{1}{2} u_7 + \Delta u_{10} \\
 u_{11} &= \frac{1}{2} u_7 + \frac{1}{2} u_8 + \Delta u_{11} \\
 u_{12} &= \frac{1}{2} u_8 + \frac{1}{2} u_5 + \Delta u_{12} \\
 u_{13} &= \frac{1}{4} u_5 + \frac{1}{4} u_6 + \frac{1}{4} u_7 + \frac{1}{4} u_8 + \Delta u_{13}
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Durch Umstellen der Gln. (4.5) nach den Werten Δu_9 bis Δu_{13} und Einsetzen in den Randverschiebungsansatz in Gl. (4.4) ergibt sich der endgültige Randverschiebungsansatz aus Gl. (4.6).

$$\begin{aligned}
u(\xi_1, \xi_2, +1) &= [G_5 - \frac{1}{2} G_9 - \frac{1}{2} G_{12}] u_5 \\
&+ [G_6 - \frac{1}{2} G_{10} - \frac{1}{2} G_9] u_6 \\
&+ [G_7 - \frac{1}{2} G_{10} - \frac{1}{2} G_{11}] u_7 + [G_8 - \frac{1}{2} G_{11} - \frac{1}{2} G_{12}] u_8 \\
&+ \sum_{i=9}^{13} G_i u_i
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Damit können jetzt die Interpolationsoperatoren aus Gl. (2.5) vollständig aufgeschrieben werden. Mit Ausführung von Gl. (2.6) erhält man dann die vollständige gemischte Interpolationsfunktion für das Übergangselement aus Bild (4.2).

Beim Übergang auf Polynome zweiter Ordnung werden quadratische Randverschiebungsansätze entsprechend Gl. (4.7) als Ausgangspunkt verwendet.

$$\begin{aligned}
u(\pm 1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{i=1}^8 u(\pm 1, \xi_{2i}, \xi_{3i}) G_i(\xi_2, \xi_3) \\
u(\xi_1, \pm 1, \xi_3) &= \sum_{i=1}^8 u(\xi_{1i}, \pm 1, \xi_{3i}) G_i(\xi_1, \xi_3) \\
u(\xi_1, \xi_2, \pm 1) &= \sum_{i=1}^8 u(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \pm 1) G_i(\xi_1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei i die acht Knotenpunkte der Flächenränder durchläuft, wie es in Bild 4.3 dargestellt ist.

Diese Randverschiebungsansätze sind mit der in Gl. (3.9) erhaltenen gemischten Interpolationsfunktion identisch. Die einzelnen Ansatzfunktionen G_i aus Gl. (4.7) haben dabei folgende Form.

$$G_i(\xi_j, \xi_k) = \frac{1}{4} (1 + \xi_j \xi_{ji}) (1 + \xi_k \xi_{ki}) \cdot (\xi_j \xi_{ji} + \xi_k \xi_{ki} - 1)$$

mit $i = 1, 3, 5, 7$ für die Eckknoten und

$$G_i(\xi_j, \xi_k) = \frac{1}{2} (1 + \xi_j \xi_{ji}) (1 - \xi_k^2)$$

mit $i = 2, 6$ und

$$G_i(\xi_j, \xi_k) = \frac{1}{2} (1 + \xi_k \xi_{ki}) (1 - \xi_j^2) \tag{4.8}$$

mit $i = 4, 8$ für die Seitenmittenknoten.

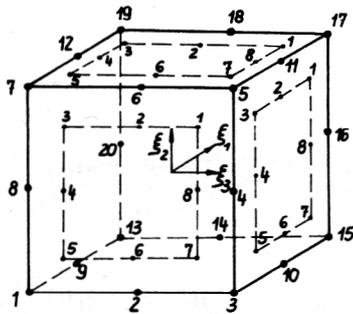


Bild 4.3
20-Knoten-Hexaederelement der Serendipity-Klasse

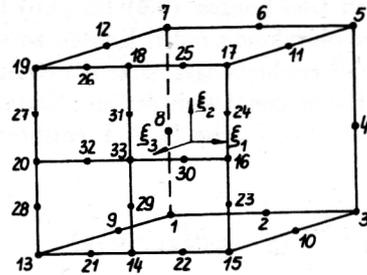


Bild 4.4
Kompatibles Übergangselement mit stückweise quadratischen Randverschiebungsansätzen

Mit Gl. (2.5) bis (2.7) erhält man die gemischte Interpolationsfunktion, aus der sich jetzt knotenweise die dreidimensionalen Ansatzfunktionen entwickeln lassen.

Die Entwicklung eines Übergangselementes mit stückweise quadratischen Randverschiebungsansätzen in Analogie zu Bild 4.2 erfordert bereits einen deutlich höheren Aufwand. Bild 4.4. zeigt die lokale Knotennummerierung eines solchen Elementes, welches über 33 Knoten verfügt.

Die Problematik der Ableitung der Ansatzfunktionen kann jetzt in gleicher Weise, wie bei dem in Bild 4.2 dargestellten Element erfolgen. Die Randverschiebungsansätze für die 8-Knotenfläche bei $\xi_3 = -1$ unterscheidet sich nicht von den Ansätzen in Gl. (4.8). Die 10-Knotenflächen bei $\xi_1 = \pm 1$ und $\xi_2 = \pm 1$ sind im Aufbau ihrer Ansätze dem in Bild 3.6 dargestellten Element identisch. Die Ansatzfunktionen sind in den Gln. (3.11) bis (3.13) beschrieben und können aus der entsprechenden gemischten Interpolationsfunktion gewonnen werden. Eine Besonderheit bildet die Fläche $\xi_3 = 1$. Bei der Beschreibung dieser Fläche kann von den schon beim Standardelement vorhandenen Knoten 13 bis 20 ausgegangen werden. Die Randverschiebungsansätze dieser Knoten sind in den Gln. (4.8) beschrieben. Die Ansätze für die neu hinzukommenden Knoten 21 bis 33 sind in den Gln. (4.9) zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
G_{21} &= (|\xi_2| - \xi_2) (|\xi_1| - \xi_1) (1 + \xi_1) \\
G_{22} &= (|\xi_2| - \xi_2) (|\xi_1| + \xi_1) (1 - \xi_1) \\
G_{23} &= (|\xi_2| - \xi_2) (1 + \xi_2) (|\xi_1| + \xi_1) \\
G_{24} &= (|\xi_2| + \xi_2) (1 - \xi_2) (|\xi_1| + \xi_1) \\
G_{25} &= (|\xi_2| + \xi_2) (|\xi_1| + \xi_1) (1 - \xi_1) \\
G_{26} &= (|\xi_2| + \xi_2) (|\xi_1| - \xi_1) (1 + \xi_1) \\
G_{27} &= (|\xi_2| + \xi_2) (1 - \xi_2) (|\xi_1| - \xi_1) \\
G_{28} &= (|\xi_2| - \xi_2) (1 + \xi_2) (|\xi_1| - \xi_1) \\
G_{29} &= (|\xi_2| - \xi_2) (1 + \xi_2) (1 - |\xi_1|) \\
G_{30} &= (1 - |\xi_2|) (|\xi_1| + \xi_1) (1 - \xi_1) \\
G_{31} &= (|\xi_2| + \xi_2) (1 - \xi_2) (1 - |\xi_1|) \\
G_{32} &= (1 - |\xi_2|) (|\xi_1| - \xi_1) (1 + \xi_1) \\
G_{33} &= (1 - |\xi_1|) (1 - |\xi_2|)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Analog zu den Gleichungen (4.4) bis (4.6) kommt es durch die neu hinzukommenden Knoten zu einer Korrektur der Randverschiebungsansätze der Knoten 13 bis 20 und 33. Damit ergibt sich der endgültige Randverschiebungsansatz der Fläche $\xi_3 = 1$ entsprechend der Gl. (4.10).

$$\begin{aligned}
 u(\xi_1, \xi_2, 1) = & [G_{13} + \frac{1}{4}G_{33} - \frac{3}{8}(G_{21} + G_{28}) \\
 & + \frac{1}{8}(G_{22} + G_{27}) + \frac{1}{16} \sum_{j=29}^{32} G_j] u_{13} \\
 & + [G_{14} - \frac{1}{2}(G_{33} + G_{29}) - \frac{6}{8}(G_{21} + G_{22}) - \frac{1}{8}(G_{30} + G_{32})] u_{14} \\
 & + [G_{15} + \frac{1}{4}G_{33} - \frac{3}{8}(G_{22} + G_{23}) + \frac{1}{8}(G_{21} + G_{24}) + \frac{1}{16} \sum_{j=29}^{32} G_j] u_{15} \\
 & + [G_{16} - \frac{1}{2}(G_{33} + G_{30}) - \frac{6}{8}(G_{23} + G_{24}) - \frac{1}{8}(G_{29} + G_{31})] u_{16} \\
 & + [G_{17} + \frac{1}{4}G_{33} - \frac{3}{8}(G_{24} + G_{25}) + \frac{1}{8}(G_{23} + G_{26}) + \frac{1}{16} \sum_{j=29}^{32} G_j] u_{17} \\
 & + [G_{18} - \frac{1}{2}(G_{33} + G_{31}) - \frac{6}{8}(G_{25} + G_{26}) - \frac{1}{8}(G_{30} + G_{32})] u_{18} \\
 & + [G_{19} + \frac{1}{4}G_{33} - \frac{3}{8}(G_{26} + G_{27}) + \frac{1}{8}(G_{25} + G_{28}) + \frac{1}{16} \sum_{j=29}^{32} G_j] u_{19} \\
 & + [G_{20} - \frac{1}{2}(G_{33} + G_{32}) - \frac{6}{8}(G_{27} + G_{28}) - \frac{1}{8}(G_{29} + G_{31})] u_{20} \\
 & + \sum_{i=21}^{32} [G_i u_i] + [G_{33} - \frac{1}{2} \sum_{i=29}^{32} G_i] u_{33}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Mit Hilfe dieses Randverschiebungsansatzes ist jetzt ein vollständiger Aufbau der drei in Gl. (2.5) beschriebenen Interpolationsoperatoren gewährleistet. Mit Gl. (2.6) und (2.7) ist damit der Aufbau der gemischten Interpolationsfunktion möglich.

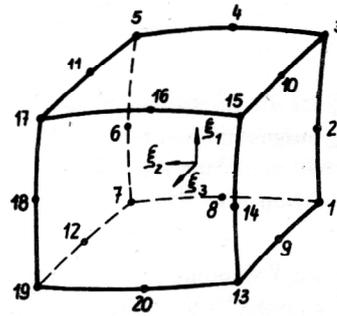
5. Programmtechnische Umsetzung im FE-PS-COSAR

Für die programmtechnische Umsetzung der vorgestellten Algorithmen mit dem Ziel der Erweiterung vorhandener Elementkataloge erwies sich das universelle FE-Programmsystem COSAR als besonders geeignet, da hier nutzerfreundliche Schnittstellen für die Implementierung neuer Elemente vorhanden sind. Der Elementkatalog des PS COSAR [15] enthält für die mechanischen Modelle Scheibe, Rotationskörper, dicke Platte, dicke Schale, Membranschale und Vollkörper ausschließlich isoparametrische Verschiebungselemente der Serendipity-Klasse mit quadratischen Verschiebungsansätzen auf den Elementrändern bzw. -flächen.

Nachfolgend werden unter 5.1 der erweiterte 3D-Elementkatalog und unter 5.2 der erweiterte 2D-Elementkatalog des PS-COSAR mit allen Formfunktionen dargestellt.

5.1. Der erweiterte Elementkatalog der 3D-Vollkörper-elemente des PS COSAR

HEXAEDER – Element HK 60



Elementeckknotenansätze

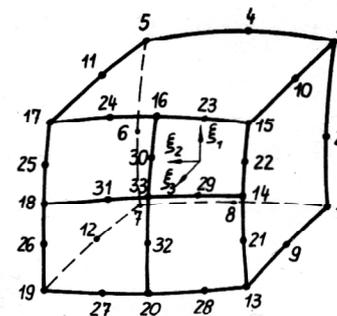
$$G_L = \frac{1}{8} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (1 + \xi_{3L} \xi_3) (\xi_{1L} \xi_1 + \xi_{2L} \xi_2 + \xi_{3L} \xi_3 - 2)$$

Seitenmittenknotenansätze

$$G_L = \frac{1}{4} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (1 + \xi_{3L} \xi_3) \left[1 - (\xi_1 \xi_{2L} \xi_{3L})^2 - (\xi_{1L} \xi_2 \xi_{3L})^2 - (\xi_{1L} \xi_{2L} \xi_3)^2 \right]$$

ξ_{iL} lokale Koordinate des Knotens L

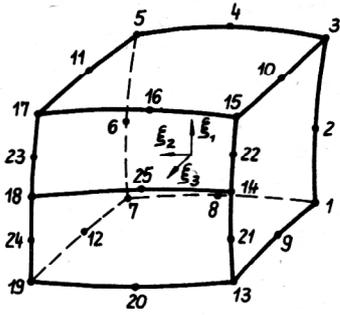
HEXAEDER – Element HK 99



Zusatzknotenansätze 21 – 33

$$\begin{aligned}
 G_L = & \frac{1}{2} (1 + \xi_3) (|\xi_1| + \xi_{1L} \xi_1) (|\xi_1| + 2 \xi_{1L} \xi_1) (1 - 2 \xi_{1L} \xi_1) \\
 & l = 1, J = 2, L = 23, 24, 27, 28 \\
 & l = 2, J = 1, L = 21, 22, 25, 26 \\
 G_L = & (1 + \xi_3) (|\xi_1| + 2 \xi_{1L} \xi_1) (1 - 2 \xi_{1L} \xi_1) (1 - |\xi_1|) \\
 & l = 1, J = 2, L = 30, 32 \\
 & l = 2, J = 1, L = 29, 31 \\
 G_{33} = & \frac{1}{2} (1 + \xi_3) (1 - |\xi_1|) (1 - |\xi_2|)
 \end{aligned}$$

HEXAEDER – Element HK 75



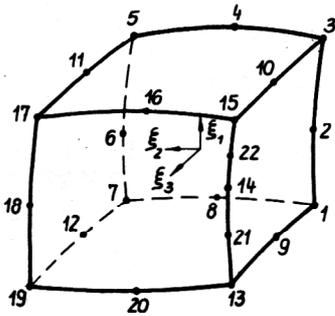
Zusatzknotenansätze 21 – 25

$$G_L = \frac{1}{2} (1 + \xi_3)(1 + \xi_{2L} \xi_2) (|\xi_1| + 2\xi_{1L} \xi_1) (1 - 2\xi_{1L} \xi_1)$$

L = 21, 22, 23, 24

$$G_{25} = \frac{1}{2} (1 + \xi_3)(1 - \xi_2^2)(1 - |\xi_1|)$$

HEXAEDER – Element HK 66

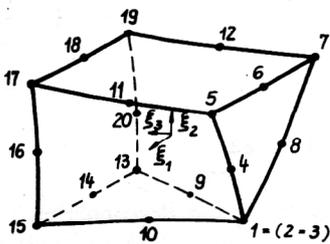


Zusatzknotenansätze 21 – 22

$$G_L = \frac{1}{2} (1 + \xi_3)(1 + \xi_{2L} \xi_2) (|\xi_1| + 2\xi_{1L} \xi_1) (1 - 2\xi_{1L} \xi_1)$$

L = 21, 22

ANVIL – Element AK 54



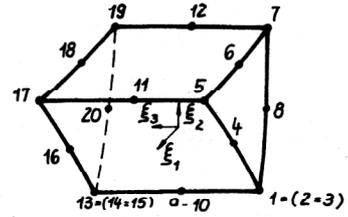
Korrektur der Ansatzfunktionen durch Degeneration

$$G_1^* = G_1 + G_2 + G_3, \quad G_L^* = G_L + \Delta G_{31} \quad \text{mit } L = 5, 7$$

$$G_6^* = G_6 - 2\Delta G_{31}, \quad G_L^* = G_L + \Delta G_{21} \quad \text{mit } L = 13, 15$$

$$G_{14}^* = G_{14} - 2\Delta G_{21}$$

PENTAEDER – Element PK 45



$$G_1^* = G_1 + G_2 + G_3, \quad G_6^* = G_6 - 2\Delta G_{31}$$

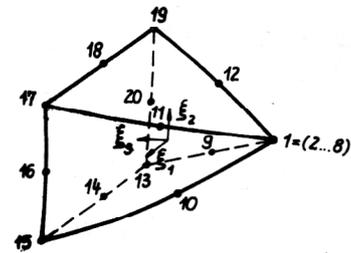
$$G_{13}^* = G_{13} + G_{14} + G_{15}, \quad G_{18}^* = G_{18} - 2\Delta G_{32}$$

$$G_9^* = G_9 + G_{10}$$

$$G_L^* = G_L + \Delta G_{IJ} \quad \text{mit } L = 5, 7; I = 3; J = 1$$

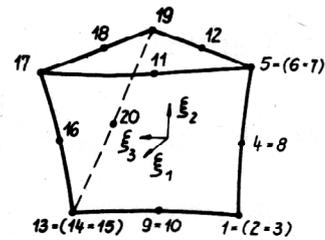
$$L = 17, 19; I = 3; J = 2$$

WEDGE – Element WK 39



	L	I	J	K	M
$G_L^* = G_L + \Delta G_{IJ} + \Delta G_{KM}$	13	1	1	2	1
	15	2	1	1	2
	17	1	2	1	2
	19	2	2	1	1
	L	I	J		
$G_L^* = G_L - 2\Delta G_{IJ}$	14	2	1		
	16	1	2		
	18	2	2		
$G_1^* = \sum_{L=1}^8 G_L$	20	1	1		

CHISEL – Element CK 36



	L	I	J
$G_L^* = G_L + G_I + G_J$	1	2	3
	5	6	7
	13	14	15

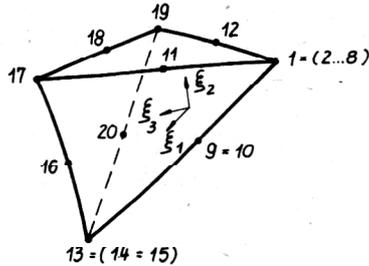
$$G_L^* = G_L + G_I \quad \begin{array}{cc} L & I \\ 4 & 8 \\ 9 & 10 \end{array}$$

$$G_{17}^* = G_{17} + \Delta G_{22} + \Delta G_{32}$$

$$G_{18}^* = G_{18} + 2(\Delta G_{22} + \Delta G_{32})$$

$$G_{19}^* = G_{19} + \Delta G_{22} + \Delta G_{32}$$

TETRAEDER – Element TK 30



$$G_1^* = \sum_{L=1}^8 G_L, \quad G_9^* = G_9 + G_{10}$$

$$G_{13}^* = G_{13} + G_{14} + G_{15} + \Delta G_{11} + \Delta G_{12}$$

$$G_{17}^* = G_{17} + \Delta G_{12} + \Delta G_{22} + \frac{1}{2}(1 + \xi_3) \Delta G_{32}$$

$$G_{18}^* = G_{18} - 2\Delta G_{22} - (1 + \xi_3) \Delta G_{32}$$

$$G_{19}^* = G_{19} + \Delta G_{22} + \Delta G_{11} + \frac{1}{2}(1 + \xi_3) \Delta G_{32}$$

$$G_L^* = G_L - 2\Delta G_{IJ} \quad \begin{array}{ccc} L & I & J \\ 16 & 1 & 2 \\ 20 & 1 & 1 \end{array}$$

Aufgrund der Überlagerung der Ansätze der Zusatzknoten bei den Elementen HK 99, HK 75 und HK 66 ist eine Korrektur der Ansätze für die Knoten 1 bis 20 notwendig.

HEXAEDER – Element HK 99

$$G_{13}^* = G_{13} + \frac{1}{8}(G_{22} + G_{27}) - \frac{3}{8}(G_{21} + G_{28}) + \frac{1}{16} \sum_{L=29}^{32} G_L + \frac{1}{4} G_{33}$$

$$G_{15}^* = G_{15} + \frac{1}{8}(G_{21} + G_{24}) - \frac{3}{8}(G_{22} + G_{23}) + \frac{1}{16} \sum_{L=29}^{32} G_L + \frac{1}{4} G_{33}$$

$$G_{17}^* = G_{17} + \frac{1}{8}(G_{23} + G_{26}) - \frac{3}{8}(G_{24} + G_{25}) + \frac{1}{16} \sum_{L=29}^{32} G_L + \frac{1}{4} G_{33}$$

$$G_{19}^* = G_{19} + \frac{1}{8}(G_{25} + G_{28}) - \frac{3}{8}(G_{26} + G_{27}) + \frac{1}{16} \sum_{L=29}^{32} G_L + \frac{1}{4} G_{33}$$

$$G_{14}^* = G_{14} - \frac{6}{8}(G_{21} + G_{22}) - \frac{1}{8}(G_{30} + G_{32}) - \frac{1}{2}(G_{29} + G_{33})$$

$$G_{16}^* = G_{16} - \frac{6}{8}(G_{23} + G_{24}) - \frac{1}{8}(G_{29} + G_{31}) - \frac{1}{2}(G_{30} + G_{33})$$

$$G_{18}^* = G_{18} - \frac{6}{8}(G_{25} + G_{26}) - \frac{1}{8}(G_{30} + G_{32}) - \frac{1}{2}(G_{31} + G_{33})$$

$$G_{20}^* = G_{20} - \frac{6}{8}(G_{27} + G_{28}) - \frac{1}{8}(G_{29} + G_{31}) - \frac{1}{2}(G_{32} + G_{33})$$

$$G_{33}^* = G_{33} - \frac{1}{2} \sum_{L=29}^{32} G_L$$

HEXAEDER – Element HK 75

$$G_L^* = G_L + \frac{1}{8} G_I - \frac{3}{8} G_J + \frac{1}{4} G_K \quad \begin{array}{cccc} L & I & J & K \\ 13 & 22 & 21 & 25 \\ 15 & 21 & 22 & 25 \\ 17 & 24 & 23 & 25 \\ 19 & 23 & 24 & 25 \end{array}$$

$$G_L^* = G_L - \frac{6}{8}(G_I + G_J) - \frac{1}{2} G_K \quad \begin{array}{cccc} L & I & J & K \\ 14 & 21 & 22 & 25 \\ 18 & 23 & 24 & 25 \end{array}$$

$$G_L^* = G_L + \frac{1}{2} G_I \quad \begin{array}{cc} L & I \\ 16 & 25 \\ 20 & 25 \end{array}$$

HEXAEDER – Element HK 66

$$G_L^* = G_L + \frac{1}{8} G_I - \frac{3}{8} G_J \quad \begin{array}{ccc} L & I & J \\ 13 & 21 & 22 \\ 15 & 22 & 21 \end{array}$$

$$G_{14}^* = G_{14} - \frac{6}{8}(G_{21} + G_{22})$$

Die Korrekturterme $\Delta G_{I\alpha}$ der degenerierten Elemente AK 54, PK 45, WK 39, CK 36 und TK 30 lassen sich einheitlich wie folgt darstellen:

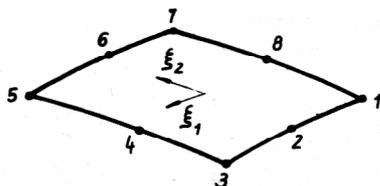
$$\Delta G_{I\alpha} = \frac{1}{16} [1 + (-1)^\alpha \xi_I] (1 - \xi_J^2) (1 - \xi_K^2)$$

mit $\alpha = 1, 2$; $I, J, K = 1, 2, 3$; $I \neq J \neq K$

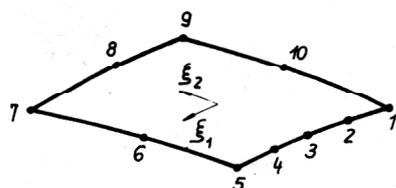
5.2. Der erweiterte Elementkatalog der flächenhaften Elemente des PS COSAR

Räumliche Membranelemente des PS COSAR

RKM 24



RKM 30



Elementeckknotenansätze

$$G_L = \frac{1}{4} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (\xi_{1L} \xi_1 + \xi_{2L} \xi_2 - 1)$$

L = 1, 3, 5, 7 für RKM24
L = 1, 5, 7, 9 für RKM30

Seitenmittenknotenansätze

$$G_L = \frac{1}{2} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (1 - (\xi_1 \xi_{2L})^2 - (\xi_{1L} \xi_2)^2)$$

L = 2, 4, 6, 8 für RKM24
L = 3, 6, 8, 10 für RKM30

Zusatzknotenansätze der Knoten 2 und 4 des Elementes RKM 30

$$G_L = (1 - \xi_2) (1 - 2\xi_{1L} \xi_1) (|\xi_1| + 2\xi_{1L} \xi_1) \quad L = 2, 4$$

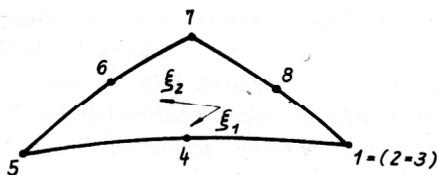
Korrekturen der Ansätze für die Knoten 1, 3 und 5 für das Element RKM 30

$$G_L^* = G_L + 3/8 G_I + 1/8 G_J$$

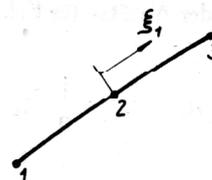
L	I	J
1	2	4
5	4	2

$$G_3^* = G_3 - 6/8 (G_2 + G_4)$$

DKM 18



SKM 9



$$G_1^* = G_1 + G_2 + G_3 \quad G_L = \frac{1}{2} \xi_{1L} \xi_1 (1 + \xi_{1L} \xi_1) \quad L = 1, 3$$

$$G_5^* = G_5 + \Delta G \quad G_2 = 1 - \xi_1^2$$

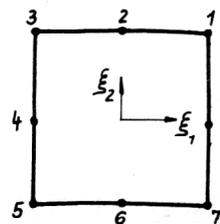
$$G_6^* = G_6 + 2\Delta G$$

$$G_7^* = G_7 + \Delta G$$

$$\text{mit } \Delta G = \frac{1}{8} (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2)$$

Die Elemente der Problemklassen Scheibe, Rotationskörper, dicke Platte und dicke Schale verfügen über identische Ansatzfunktionen, die am Beispiel allgemeiner flächenhafter Elemente dargestellt werden sollen.

8-Knoten-Viereckelement



Elementeckknotenansätze

$$G_L = \frac{1}{4} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (\xi_{2L} \xi_2 + \xi_{1L} \xi_1 - 1)$$

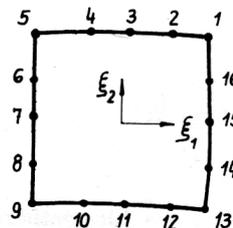
L = 1, 3, 5, 7

Seitenmittenknotenansätze

$$G_L = \frac{1}{2} (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 + \xi_{2L} \xi_2) (1 - (\xi_1 \xi_{2L})^2 - (\xi_{1L} \xi_2)^2)$$

L = 2, 4, 6, 8

Übergangselement



Zusatzknotenansätze

$$G_L = (1 + \xi_{1L} \xi_1) (1 - 2\xi_{2L} \xi_2) (|\xi_2| + 2\xi_{2L} \xi_2)$$

I = 1, J = 2, L = 6, 8, 14, 16
I = 2, J = 1, L = 2, 4, 10, 12

Korrekturen der Ansätze für Eck- und Seitenmittenknoten

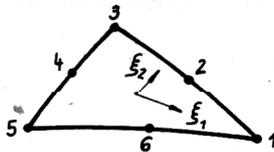
$$G_L = G_L - \frac{3}{8}(G_I + G_J) + \frac{1}{8}(G_K + G_M)$$

L	I	J	K	M
1	2	16	4	14
5	4	6	2	8
9	8	10	6	12
13	12	14	10	16

$$G_L = G_L - \frac{6}{8}(G_I + G_J)$$

L	I	J
3	2	4
7	6	8
11	10	12
15	14	16

Dreieckelement



Elementeckknotenansätze

$$G_1 = \frac{1}{2} \xi_1 (1 + \xi_1)$$

$$G_L = \frac{1}{8} (1 - \xi_1)(1 + \xi_{2L} \xi_2)(-1 - \xi_1 + \xi_{2L} \xi_2 - \xi_{2L} \xi_1 \xi_2)$$

L = 3, 5

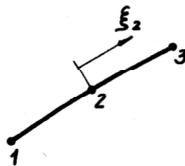
Seitenmittenknotenansätze

$$G_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)$$

$$G_L = \frac{1}{2} (1 - \xi_{2L} \xi_1^2)(1 + \xi_{2L} \xi_2)$$

L = 2, 4

Stabelement



$$G_2 = 1 - \xi_1^2$$

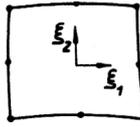
$$G_L = \frac{1}{2} \xi_{1L} \xi_1 (1 + \xi_{1L} \xi_1)$$

L = 1, 3

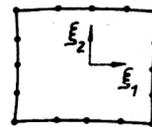
Eine Übersicht über die Elementbezeichnungen ist in Bild 5.1 dargestellt. Eine Besonderheit bildet in diesem Rahmen das spezielle Übergangselement mit bis zu 16 Knoten. Dieses Element wurde bezüglich seiner Knotenkonfiguration flexibel gehalten, d. h. an jeder der 4 Elementseiten können entweder drei oder fünf Knoten angeordnet werden. Daraus folgt, daß sowohl zwei als auch ein Nachbarlement angeschlossen werden können.

Ebene Scheibenelemente

SRK16



SRK32



SDK12

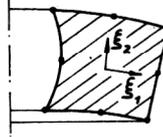


SKM6

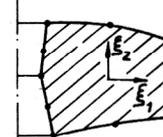


Rotationssymmetrische Elemente

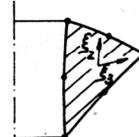
RRK16



RRK32



RDK12

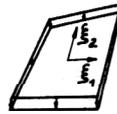


RKM6

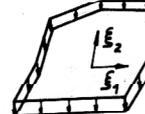


Dicke Plattenelemente

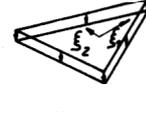
PDRK24



PDRK48



PDRK18



Dicke Schalelemente

SDRK40



SDRK80



SDRK30



Bild 5.1

Erweiterter Elementkatalog des PS COSAR mit den flächhaften Elementen für die Problemklassen Scheibe, Rotationskörper, dicke Platte und dicke Schale

6. Anwendungsbeispiele

Die folgenden zwei Beispiele zeigen die Einsatzmöglichkeiten der um spezielle Übergangselemente erweiterten Elementkataloge des PS COSAR. Im ersten Beispiel wird der rotationssymmetrische Ringkolben eines Verdichters betrachtet. Bild 6.1 zeigt die Vernetzung mit rotationssymmetrischen Elementen des Typs RRK16 und den speziellen Übergangselementen des Typs RRK32 mit variabler Knotenkonfiguration. Aufgrund aufgetretener Risse im Kolbeninnern bildete ein lokaler Bereich den Schwerpunkt der Untersuchungen. Durch die Verwendung der Übergangselemente ist bei einem relativ geringen Gesamtaufwand eine starke lokale Netzverfeinerung realisiert worden. Das zweite Beispiel zeigt die Modellierung einer Rohrverzweigung. Die Vernetzung erfolgte mit dreidimensionalen Elementen des Typs HK60 und speziellen Übergangselementen zur einachsigen Netzverfeinerung. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel des Bauteils betrachtet. Bild 6.2 zeigt das Elementnetz als räumliches Glaskörpermodell. Die Verwendung der Übergangselemente ermöglicht hier einen aufwandarmen Übergang von einem auf zwei Elemente im direkten Übergangsbereich, wodurch eine detailliertere Beanspruchungsanalyse ermöglicht wird.

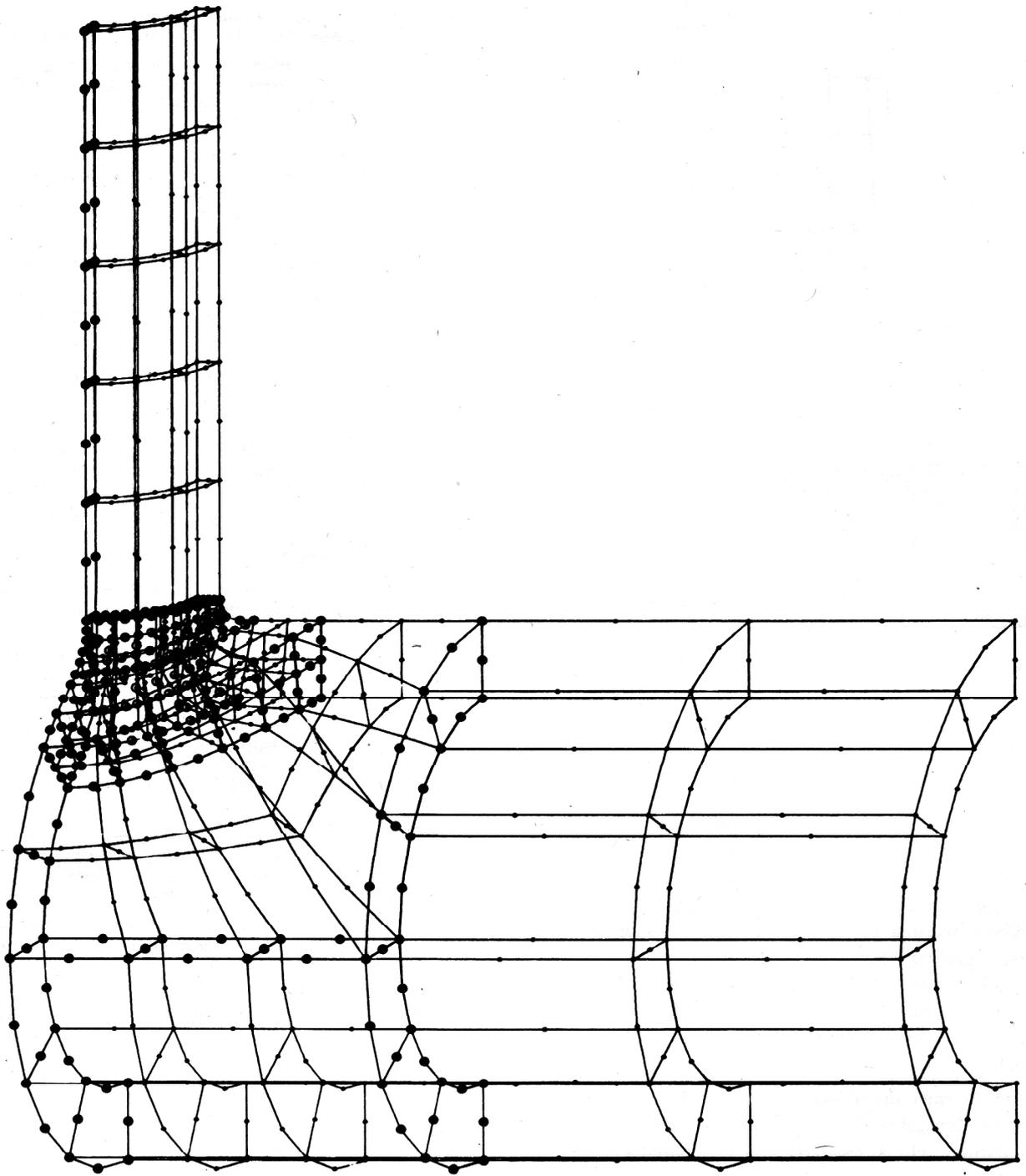
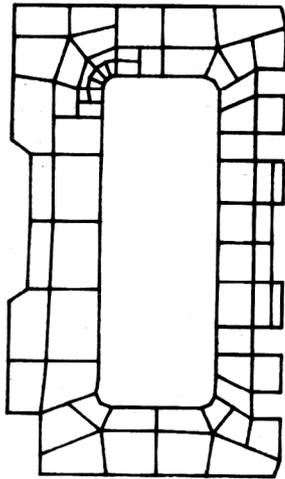


Bild 6.2
Glaskörpermodell der Vernetzung einer Rohrverzweigung mit
dreidimensionalen Vollkörperelementen



2 1	PROGRAMMSYSTEM COSAR	STRUKTUR NR.	LASTFALL NR.	
	BEARBEITET 23. 11. 1986	VERDICHTERKOLBEN		M
	TH MAGDEBURG SEKTION MASCHINENBAU	HYPERSTRUKTUR		1.

Bild 6.1
Vernetzung eines Ringkolbens mit rotationssymmetrischen Elementen

7. Zusammenfassung

Die Ableitung der Formfunktionen für Standard- und Übergangselemente kann mit Hilfe der gemischten Interpolationstechnik nach einer einheitlichen Strategie erfolgen. Für 2D- und 3D-Verschiebungselemente der C^0 -Klasse wurden beispielhaft Formfunktionen mit linearen, quadratischen, stückweise linearen und stückweise quadratischen Randverschiebungen entwickelt. Eine Verallgemeinerung auf höhere Ansatzfunktionen oder auf Elemente der C^1 -Klasse ist ohne Schwierigkeiten möglich.

Am Beispiel des Programmsystems COSAR wurde die programmtechnische Umsetzung der gemischten Interpolationstechnik erläutert und der erweiterte Elementkatalog beschrieben.

Zwei einfache Anwendungsbeispiele demonstrieren, daß ein durch Übergangselemente erweiterter Elementkatalog die FE-Modellierung in Rand- oder Durchdringungsbereichen wesentlich verbessert.

LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1983.
- [2] Kelley, D. W.; de S. R. Gago, J. P.; Zienkiewicz, O. C.; Babuska, I.:
A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method.
Part I – Error analysis.
Part II – Adaptive mesh refinement.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19 (1983), S. 1593 – 1655.
- [3] Scholz, E.; Altenbach, J.: Kompatible Übergangselemente für lokale Netzverfeinerungen bei 2D- und 3D-Finite-Elemente-Modellen. Technische Mechanik 6 (1985) Heft 2, S. 72 – 78.
- [4] Birkhoff, G.; Cavendish, J. C.; Gordon, W. J.: Multivariate approximation by locally blended univariate interpolants. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 71 (1974), No. 9, S. 3423 – 3425.
- [5] Cavendish, J. C.; Gordon, W. J.: Substructured macro elements based on a locally blended interpolation. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 11 (1977), S. 1405 – 1421.
- [6] Cavendish, J. C.: Local mesh refinements using rectangular blended finite elements. J. Comp. Phys., Vol. 19 (1975), S. 211 – 228.
- [7] Gordon, W. J.: Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation. SIAM J. Num. Meth. Anal., Vol. 8 (1971), S. 158 – 177.
- [8] Cavendish, J. C.; Hall, C. A.: A new class of transition blended finite elements for the analysis of solid structures. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20 (1984), S. 241 – 253.
- [9] Marshall, J. A.; Mitchell, A. R.: Blending interpolants in the finite element method. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12 (1978), S. 77 – 83.
- [10] Watkins, D. S.: On the construction of conforming rectangular plate elements. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10 (1976), S. 925 – 933.
- [11] Röhr, U.: Lokale finite Elementnetzverfeinerungen bei Platten- und Scheibenaufgaben mittels gemischter Interpolation. Schiffbauforschung 24 (1985) Heft 1, S. 39 – 50.
- [12] Röhr, U.: Zur Kombination halbanalytischer und finiter Elemente für die elastostatische Berechnung schiffbaulicher Plattenkonstruktionen, WPU Rostock, Dissertation A, 1983.
- [13] Scholz, E.: Kompatible finite Rand-, Übergangs- und Standardstrukturelemente zur effektiven mechanischen Strukturanalyse von Rand- und Übergangsbereichen. TH Magdeburg, Dissertation A, 1986.
- [14] Gordon, W. J.; Hall, C. A.: Transfinite element methods blending-function interpolation over arbitrary curved element domains. Num. Math., Vol. 21 (1973), S. 109 – 129.
- [15] Autorenkollektiv: Nutzerhandbuch COSAR/84, TH Magdeburg, Sektion Maschinenbau, WB Festkörpermechanik.