

# Deformationsgesetze der Standardform in konvektiver Metrik

Helge Bergander

## 1. Einleitung

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen in einem elastischen Medium ist unabhängig vom Weg im Raum der Spannungs- oder Verzerrungskomponenten. Das Deformationsgesetz des elastischen Materials ist daher als Funktion des Spannungstensors vom Verzerrungstensor (oder umgekehrt) zu formulieren. Für alle inelastischen Stoffe wird der Zusammenhang jedoch abhängig von dem oben genannten Weg, oft außerdem von der Zeit, in der dieser Weg zurückgelegt wird. Daher tritt an die Stelle der Funktion ein allgemeiner Funktionaloperator. Die einfachste Darstellung dieses Operators ist ein Differentialoperator. Durch eine geeignete Einführung von Hilfsgrößen (sogenannte innere Zustandsparameter) lassen sich allgemeine Differentialoperatoren stets auf ein System von solchen erster Ordnung zurückführen. Diese Klasse von Operatoren gestattet die Annäherung der beobachtbaren Phänomene inelastischen Materials mit jeder gewünschten Genauigkeit.

Die Aufbereitung der eben genannten Gedanken in eine Formelsprache gestattet es, für nichtlineare, inelastische Deformationsgesetze eine Standardform anzugeben. Der größte Vorzug einer solchen Formulierung ist es, daß mit ihr Computerprogramme entwickelt werden können, ohne daß in dieser Phase bereits irgendwelche Festlegungen oder Einschränkungen hinsichtlich Plastizität, Viskoelastizität und -plastizität, Temperatur- und Alterungseinfluß, Anisotropie usw. getroffen werden müssen. Die nachträgliche Abänderung ist gleichfalls mühelos.

Für kleine Deformationen sind die erforderlichen Untersuchungen abgeschlossen und in einer Reihe von Veröffentlichungen vorgestellt. In den Arbeiten [1] bis [3] wurde das Problem grundsätzlich dargelegt, in [4] bis [7] sind Einzelfragen untersucht. Auch praktische Erprobungen liegen mit den Materialprogrammen NIMEHS [8] und NIMAG [9] sowie mit dem Schalenprogramm NISCHA 82 [10] vor.

Der eingangs genannte Grundgedanke ist natürlich nicht an kleine Deformationen gebunden. Die Erweiterung auf große Deformationen wird durch den Einsatz stark verformbarer Materialien und durch Umformprobleme erforderlich. Erste Programmentwicklungen für verformbare Rotationsschalen [10], Rotationskörper [11] und allgemeine Schalen [12] liegen bereits vor oder sind in einer fortgeschrittenen Phase der Projektierung.

Dennoch ist die Übertragung auf große Deformationen keine einfache Erweiterung. Auch und gerade für das Deformationsgesetz müssen klare Festlegungen zur Wahl des Koordinatensystems getroffen werden. Das Ziel einer Standardisierung macht diese Wahl nicht leicht, denn sie muß so getroffen werden, daß die verwendete

Bezugsmetrik fertiger Programme auch die Unterprogramme der Standardform verkraften kann.

Dabei erweist sich die konvektive Metrik, die konvektive Koordinaten konsequent mit den zeitveränderlichen Basisvektorensystemen verbindet, als besonders sinnvoll.

Solche Metriken erfordern keine gesonderte Untersuchung des in raumfesten Bezugssystemen besonders bedeutsamen Problems der materiellen Objektivität. Im folgenden wird daher die Grundkonzeption einer Standardform von Deformationsgesetzen in der konvektiven Metrik einschließlich einiger für die numerische Diskretisierung bedeutsamer Fragen zum Variantenprinzip und zum Potential vorgestellt. Außerdem wird die Konzeption einer vom Feldproblem getrennten Testung der Deformationsgesetz-Unterprogramme theoretisch fundiert.

## 2. Kinematik in der konvektiven Metrik

Es wird das Tensorkalkül für krummlinige Koordinaten verwendet [13], [14]. Die Position eines materiellen Teilchens des Kontinuums in bezug auf ein raumfestes Koordinatensystem beschreibt der Ortsvektor  $\vec{r}$  (Bild 1). Jedes Teilchen ist durch 3 Parameter  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  eindeutig fixiert, so daß für die Bewegung

$$\vec{r} = \vec{r}(\Theta^\alpha, t) \quad (1)$$

gilt. Die partiellen Ableitungen nach  $\Theta^\alpha$  und  $t$  werden durch

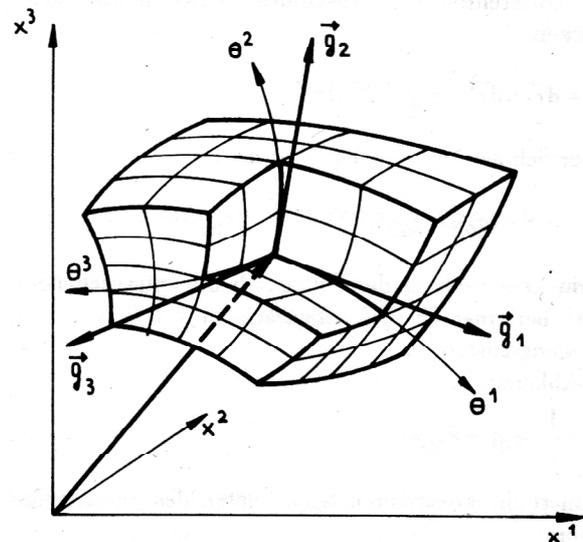


Bild 1  
 Konvektive Koordinaten und konvektive kovariante Basis

$$\frac{\partial(\ )}{\partial \Theta^\alpha} = ( \ )_{,\alpha} \quad (2)$$

und

$$\frac{\partial(\ )}{\partial t} = ( \ ) \quad (3)$$

gekennzeichnet. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist somit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad (4)$$

In jedem Punkt des Kontinuums existiert ein orts- und zeitveränderliches kovariantes Basisvektorsystem

$$\vec{g}_\alpha = \vec{r}_{,\alpha} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta^\alpha} \quad (5)$$

(Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien  $\Theta^\alpha$ ) und ein reziprokes kontravariantes System gemäß

$$\vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (6)$$

Hierbei ist  $\delta_\beta^\alpha$  das Kroneckersymbol, die kontravarianten Basisvektoren stehen daher senkrecht auf den Tangentialebenen  $\Theta^\alpha = \text{const}$ . Die Skalarprodukte

$$g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta \quad (7.1)$$

$$g^{\alpha\beta} = \vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}^\beta \quad (7.2)$$

bilden die ko- bzw. kontravarianten Koordinaten des Maßstensors; jeder Tensor läßt sich auf die begleitende Metrik beziehen, also z. B.

$$\vec{v} = v_\alpha \vec{g}^\alpha = v^\alpha \vec{g}_\alpha \quad (8)$$

wobei im weiteren grundsätzlich die Summationskonvention für zwei gleiche Indizes angewendet werden soll. Die partielle Differentiation eines Tensors nach  $\Theta^\alpha$  und die anschließende Zerlegung auf die Basis definiert die kovariante Ableitung

$$\vec{v}_{;\alpha} = (v_\beta g^{\beta\gamma})_{,\alpha} = v_\beta |_\alpha g^{\beta\gamma} \quad (9)$$

Das Differential des Abstandes zweier benachbarter Teilchen

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{\alpha\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta \quad (10)$$

eignet sich zur Messung der Deformation

$$ds^2 - d\bar{s}^2 = (g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}) d\Theta^\alpha d\Theta^\beta = 2\epsilon_{\alpha\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta \quad (11)$$

Hierin kennzeichnet der Querstrich die entsprechenden Werte bei einer Bezugskonfiguration  $t = \bar{t}$  (i. a.  $\bar{t} = 0$ , „Ausgangszustand“).

Die Abkürzung

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}) \quad (12)$$

definiert die kovarianten Koordinaten des Verzerrungstensors.

Der symmetrische Teil des Geschwindigkeitsgradienten in bezug auf die momentane Konfiguration ist der Ten-

sor der Deformationsgeschwindigkeit. Seine kovarianten Koordinaten sind

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_\alpha |_\beta + v_\beta |_\alpha) \quad (13)$$

Die Differentiation von (12) nach  $t$  ergibt unter Beachtung von (7.1), (5), (4) und (9)

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}$$

Dieser einfache Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Verzerrungs- und des Deformationsgeschwindigkeitstensors existiert nur in der konvektiven Metrik. Er gilt auch hier ausschließlich für die kovarianten Koordinaten, da das Herauf- und Herunterziehen von Indices nach den Regeln des Tensorkalküls und die Differentiation nach der Zeit nicht vertauschbar sind. So gilt z. B.

$$\dot{\epsilon}_\beta^\alpha = (g^{\alpha\mu} \epsilon_{\mu\beta}) \cdot \neq d_\beta^\alpha = g^{\alpha\mu} d_{\mu\beta} \quad (15)$$

Abschließend wird noch das Volumenelement in der konvektiven Messung angegeben

$$dV = \sqrt{g} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \quad (16.1)$$

mit

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) \quad (16.2)$$

Für die zeitliche Änderung des Volumenelements gilt

$$\dot{\sqrt{g}} = \sqrt{g} d_\gamma^\gamma \quad (17)$$

### 3. Konjugierte statische Variable

Die Leistung pro Volumeneinheit beträgt

$$P^* = \sigma^{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} \quad (18)$$

Hierin sind  $\sigma^{\alpha\beta}$  die kontravarianten Koordinaten des wahren (oder Cauchyschen) Spannungstensors. Über die volumenbezogene Leistung sind also speziell diese Werte den kovarianten Koordinaten der Deformationsgeschwindigkeit zugeordnet – sie sind leistungskonjugierte statische Variable.

Die Gesamtleistung für ein Volumen  $V$  beträgt

$$P = \dot{W} = \int_V P^* dV = \int_G P^* \sqrt{g} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \quad (19)$$

Das zeitveränderliche Volumen wird durch die konvektiven Koordinaten  $\Theta^\alpha$  auf ein zeitunabhängiges Gebiet  $G$  abgebildet. Daher ist es günstig, für die Arbeit eine spezifische Größe in  $G$  einzuführen

$$W = \int_G \omega^* d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \quad (20)$$

da eine Integration von  $P^*$  nach (18) über die Zeit keinen physikalischen Sinn hat. Der Vergleich von (20) und (19) gibt unter Beachtung von (18) und (14)

$$\dot{\omega}^* = \sqrt{g} \sigma^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \quad (21)$$

Die spezifische Arbeit pro Einheit des zeitunabhängigen Elementargebiets  $d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3$  – bis auf einen konstanten Faktor also pro Masseinheit – ordnet somit den kovarianten Koordinaten von  $de_{\alpha\beta}$  die kontravarianten Koordinaten von

$$\tau^{\alpha\beta} = \sqrt{g} \sigma^{\alpha\beta} \quad (22)$$

als arbeitskonjugierte statische Variable zu. Für Stoffe mit einem Potential („hyperelastische“ Stoffe) sind somit  $\epsilon_{\alpha\beta}$  und  $\tau^{\alpha\beta}$  zugeordnete und hinsichtlich der Abhängigkeit austauschbare Grundvariable. Demgemäß gehört zu  $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$  dann  $\dot{\tau}^{\alpha\beta}$ . Wird das Produkt dieser Grundvariablen (als Ausgangspunkt einer Legendreschen Transformation) nach der Zeit differenziert und anschließend auf  $\sqrt{g}$  normiert, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\tau^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta})' = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$$

In dieser normierten Form wird der Anschluß zu (18) hergestellt und als arbeitskonjugierte Spannungsgeschwindigkeit

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \sigma^{\alpha\beta})' = \dot{\sigma}^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} d_{\lambda}^{\lambda} \quad (23)$$

ausgewiesen. Für den zweiten Ausdruck wurde (17) genutzt. Hill [15] hat diese Spannungsgeschwindigkeit in der konvektiven Metrik zuerst begründet. Die gleiche Spannungsgeschwindigkeit in einem krummlinigen raumfesten Bezugssystem (also mit zeitunabhängiger Basis), das mit lateinischen Indices gekennzeichnet werden soll, ergibt sich aus dem Vergleich<sup>1)</sup>

$$\overset{\circ}{\sigma} = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} \vec{g}_{\alpha} \vec{g}_{\beta} = \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j \quad (24.1)$$

in der Darstellung

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij} v^k |_{|k} - \sigma^{kl} v^j |_{|k} + \sigma^{ij} v^k |_{|k} \quad (24.2)$$

Damit wird erkennbar, daß (23) die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit darstellt.

In der Aufstellung elastoplastischer Deformationsgesetze ist noch eine zweite, mit (23) verwandte quasi-konjugierte Spannungsgeschwindigkeit von Bedeutung:

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \sigma_{\beta}^{\alpha})'_{\text{sym}} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \sigma_{\beta}^{\alpha})' - d_{\beta}^{\nu} \sigma_{\nu}^{\alpha} + d_{\nu}^{\alpha} \sigma_{\beta}^{\nu} \quad (25)$$

Diese Spannungsgeschwindigkeit hat Bedeutung bei Potentialen, die in den Variablen  $\tau_{\beta}^{\alpha} = \sqrt{g} \sigma_{\beta}^{\alpha}$  formuliert sind. Sie wird als „quasi“-konjugiert bezeichnet, weil

1) Die Umrechnung erfolgt sinnvollerweise zur Vermeidung vieler Transformationsmatrizen zwischen zwei Koordinatensystemen, die zur Zeit  $t$  gerade zusammenfallen. Im Falle des raumfesten Systems stellt dann der Punkt die materielle Ableitung dar.

ein zu  $\tau^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}$  analoger gemischtvarianter Ausdruck  $\tau_{\beta}^{\alpha} \epsilon_{\alpha}^{\beta}$  physikalisch nicht relevant ist. Das liegt in der Relation (15) begründet.

Die Rücktransformation von (25) in die kontravariante Form und die vergleichende Darstellung zwischen konvektiven und raumfesten Bezug liefert

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \overset{\nabla}{\sigma}_{\beta}^{\alpha} \vec{g}_{\alpha} \vec{g}^{\beta} = \overset{\nabla}{\sigma}^{\alpha\beta} \vec{g}_{\alpha} \vec{g}_{\beta} = \overset{\nabla}{\sigma}^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j \quad (26.1)$$

mit

$$\overset{\nabla}{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \sigma^{\alpha\beta})' + \sigma^{\alpha\lambda} d_{\lambda}^{\beta} + \sigma^{\lambda\beta} d_{\lambda}^{\alpha} \quad (26.2)$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} - \sigma^{il} \omega_{l|j} - \sigma^{lj} \omega_{l|i} + \sigma^{ij} d_{l|}^l \quad (26.3)$$

Hierin sind die  $\omega_{l|i}$  die gemischtvarianten Koordinaten des antisymmetrischen Tensors der Drehgeschwindigkeit des Materials

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_i |_{|j} - v_j |_{|i}) \quad (27)$$

Die ersten 3 Terme (26.3) bilden die Jaumannsche Spannungsgeschwindigkeit. Daher soll  $\overset{\nabla}{\sigma}$  als gewichtete Jaumannsche Ableitung bezeichnet werden. Für inkompressibles Material  $d_{\lambda}^{\lambda} = d_{l|}^l = 0$  geht  $\overset{\nabla}{\sigma}$  in die konvektive oder Oldroydsche Ableitung [17] und  $\overset{\circ}{\sigma}$  in die Jaumannsche über. Man kommt mit letzteren beiden Definitionen auch bei kompressiblem Material aus, wenn die wahre Spannung durch die „gewichtete“ Spannung (auch Trefftzsche Spannung)

$$\bar{\tau}^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}} \sigma^{\alpha\beta} \quad (28)$$

ersetzt. Diese stimmt bis auf einen (willkürlichen) Normierungsfaktor mit (22) überein.

Grundsätzlich zeigen (24) und (26), daß partielle Ableitungen der Koordinaten des Spannungstensors – gleichviel, ob gewichtet oder nicht – in der konvektiven Metrik automatisch die Forderung der Objektivität erfüllen. Die Forderung nach konjugierten Größen ist schärfer. Sie garantiert die Zuordnung von Potentialen in den Zustandsvariablen zu denen in den Geschwindigkeiten.

Für die weiteren Untersuchungen wird noch der direkte Zusammenhang zwischen der Truesdellschen und der modifizierten Jaumannschen Ableitung bereitgestellt:

$$\overset{\nabla}{\sigma}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} \quad (29.1)$$

Dabei ist der Tensor

$$N^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} [\sigma^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + \sigma^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + \sigma^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} + \sigma^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}] \quad (29.2)$$

symmetrisch in den beiden Indexpaaren und bei einer Vertauschung derselben.

#### 4. Variationsprinzip und Potential der Formänderungsgeschwindigkeiten

Im Kontinuum herrscht Gleichgewicht, wenn der symmetrische Spannungstensor  $\sigma^{\alpha\beta}$  in jedem Punkt des Gebiets die Gleichung

$$\sigma^{\alpha\beta}|_{\beta} + f^{\alpha} = 0 \quad (30)$$

erfüllt. Hierin sind  $f^{\alpha}$  die Koordinaten der am materiellen Element angreifenden Kraft  $\vec{f} = f^{\alpha}\vec{g}_{\alpha}$  pro Volumeneinheit. Auf dem Teil  $\Omega_p$  der Oberfläche, auf dem sich die Verformungen einstellen können, greifen gegebene Randlasten  $\vec{p} = p^{\alpha}\vec{g}_{\alpha}$  an:

$$\sigma^{\alpha\beta} n_{\beta} = p^{\alpha}. \quad (31)$$

Hierin ist  $\vec{n} = n_{\beta}\vec{g}^{\beta}$  der Normaleneinheitsvektor auf der Oberfläche.

Durch Differentiation beider Gleichungen nach der Zeit ergeben sich nach einigen Umformungen die beiden zugeordneten Zuwuchsgleichungen

$$(\sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\mu\beta} v^{\alpha}|_{\mu})|_{\beta} + \frac{1}{dV} (f^{\alpha} dV)^{\cdot} + f^{\mu} v^{\alpha}|_{\mu} = 0 \quad (32)$$

und

$$(\sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\mu\beta} v^{\alpha}|_{\mu}) n_{\beta} = \frac{1}{d\Omega} (p^{\alpha} d\Omega)^{\cdot} + p^{\mu} v^{\alpha}|_{\mu}. \quad (33)$$

Die Multiplikation von (32) mit einer zulässigen Geschwindigkeitsfeldvariation  $\delta v_{\alpha}$  gemäß  $\delta \vec{v} = \delta v_{\alpha}\vec{g}^{\alpha}$  und der Integration über das Volumen gibt nach der üblichen Umformung mit dem Gaußschen Satz unter Beachtung der Randbedingung

$$\int_V [\sigma^{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} v^{\mu}|_{\alpha} \delta v_{\mu}|_{\beta}] dV = \int_V \frac{1}{dV} (\vec{f} dV)^{\cdot} \delta \vec{v} dV + \int_{\Omega} \frac{1}{d\Omega} (\vec{p} d\Omega)^{\cdot} \delta \vec{v} d\Omega. \quad (34)$$

Wird nun vorausgesetzt, daß das Material ein lokales Potential in der Form

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial \pi^*}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} \quad (35)$$

besitzt, dann geht die linke Seite von (34) in ein Potential der Formänderungsgeschwindigkeiten über:

$$\pi_F = \int_V [\pi^* + \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} v^{\mu}|_{\alpha} v_{\mu}|_{\beta}] dV. \quad (36)$$

Die rechte Seite von (34), die virtuelle „Arbeit“ der äußeren Kraftzuwüchse

$$\delta L_A = \int_V \frac{1}{dV} (\vec{f} dV)^{\cdot} \delta \vec{v} dV + \int_{\Omega} \frac{1}{d\Omega} (\vec{p} d\Omega)^{\cdot} \delta \vec{v} d\Omega \quad (37)$$

ist nur in Ausnahmefällen einem Potential zuzuordnen. Um die Aufbereitung des Variationsprinzips der konvektiven Metrik

$$\delta \pi_F - \delta L_A = 0 \quad (38)$$

für Flächentragwerke haben sich Landgraf [16] und Ulbricht [12] verdient gemacht. Ihnen gebührt auch das Verdienst, auf die konjugierte Variable (23) aus der Sicht von (32) bis (34) wieder aufmerksam gemacht zu haben.

Auch in anderen Betrachtungsweisen der nichtlinearen Festkörpermechanik mit raumfester Metrik, so der Lagrangeschen und der Eulerschen, entstehen Variationsprinzipie formal gleichen Aufbaus, wenn die der jeweiligen Basis zugeordneten Koordinaten der Deformationsgeschwindigkeit und der Truesdellschen Spannungsgeschwindigkeit genutzt werden. Sie sind für die Lagrangesche Betrachtungsweise z. B. bei Günther [17] und für die Eulersche bei Lubarda und Lee [18]<sup>2)</sup> zu finden und unterschiedlich bezeichnet (in [17] nach Green-Dirichlet, in [18] nach Hill). In allen Fällen besteht der Potentialanteil (36) aus einem lokalen Potential und einem entsprechend (36) strukturierten Zusatzterm, der für die geometrische Steifigkeit verantwortlich ist.

Die jeweilige Formulierung des lokalen Potentials (35) in der Truesdellschen Spannungsgeschwindigkeit unterstreicht die Sinnfälligkeit der Verwendung derselben bei der Standardisierung von Deformationsgesetzen.

#### 5. Deformationsgesetz

Mit der Formulierung eines allgemeinen linearen Zusammenhanges zwischen den Zuwüchsen der lokalen kinematischen und kinetischen Größen und bei der Einbeziehung einer endlichen Zahl interner Parameter liegt für kleine Verformungen ein Deformationsgesetz vor, das für alle technisch bedeutsamen Anwendungen den Anforderungen voll genügt [1], [3]. Die Verallgemeinerung auf große Verformungen erfolgt sinnvollerweise unter Verwendung konjugierter kinematischer und kinetischer Variabler. Durch die konvektive Metrik ist dabei dem Prinzip der materiellen Objektivität entsprochen. Die entstehenden Gleichungen sollen als Deformationsgesetz der Standardform für inelastisches Material bezeichnet werden:

$$\vartheta^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \cdot \dot{\epsilon}_{\mu\nu} + s^{\alpha\beta} \cdot \dot{\vartheta} + s^{\alpha\beta} \quad (39.1)$$

$$h_i = B_i^{\mu\nu} \cdot \dot{\epsilon}_{\mu\nu} + e_{\vartheta i} \cdot \dot{\vartheta} + e_i. \quad (39.2)$$

Die Materialeigenschaften werden durch die Tensoren  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ ,  $s^{\alpha\beta}_{\vartheta}$ ,  $s^{\alpha\beta}$ ,  $B_i^{\mu\nu}$ ,  $e_{\vartheta i}$  und  $e_i$  festgelegt. Diese Tensoren können von der Metrik  $g_{\alpha\beta}$ , der Verzerrung  $\epsilon_{\alpha\beta}^3$ , der Spannung  $\tau^{\alpha\beta} = \sqrt{g} \sigma^{\alpha\beta}$ , den inneren Variablen  $h_i$  und der Temperatur  $\vartheta$  abhängen. Die inneren Variablen repräsentieren die Koordinaten von

2) In [18] ist das Variationsprinzip in der gewichteten Jaumann-Ableitung (26.3) aufgestellt und formal viel umständlicher. Es läßt sich jedoch leicht in die Truesdell-Ableitung umrechnen und wird dann wesentlich klarer – ein schönes Beispiel für den Wert des Prinzips der konjugierten Variablen.

3) Es werden i. a. beide Informationen, Metrik und Verzerrung, benötigt, da sie implizit nach (12) den Ausgangszustand enthalten, der bei elastischem Material wesentlich ist. Die Metrik hat in der Regel die fundamentalere Bedeutung.

Tensoren verschiedener Stufe. Das ist nur für die Aufstellung von (39) von Bedeutung, bei der Verwendung im Feldproblem nicht mehr. Unter Umständen kann für einen Teil dieser Variablen die konstitutive Annahme einer speziellen Tensorgeschwindigkeit zweckmäßig sein. Sie führt jedoch stets auf die allgemeine Form (39.2) zurück, weil diese Tensorgeschwindigkeiten stets nur Geschwindigkeiten und Metriktensoren enthalten, die den Rahmen (39.2) nicht sprengen.

So ergibt sich z. B. für eine konstitutive Annahme vom Typ

$$\overset{\circ}{h}_i = \widetilde{B}_1^{\mu\nu} \cdot \dot{\epsilon}_{\mu\nu} + e_{\partial i} \cdot \dot{\vartheta} + e_i \quad (40)$$

mit der Definition (23)

$$\overset{\circ}{h}_i = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} h_i) \cdot = \dot{h}_i + h_i d_{\rho}^{\rho} \quad (41)$$

sofort unter Beachtung von (14)

$$\dot{h}_i = (\widetilde{B}_1^{\mu\nu} - h_i g^{\mu\nu}) \dot{\epsilon}_{\mu\nu} + e_{\partial i} \cdot \dot{\vartheta} + e_i \quad (42)$$

eine Gleichung vom Typ (39.2).

Ein Potential (35) existiert für (39.1) genau dann, wenn  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$  in den Indexpaaren symmetrisch ist. Es hat den Aufbau

$$\pi^* = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} + (s_{\vartheta}^{\alpha\beta} \cdot \dot{\vartheta} + s^{\alpha\beta}) \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}, \quad (43)$$

wobei hier ein bekanntes (und nicht mit der Deformation gekoppeltes) Temperaturfeld  $\vartheta(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t)$  vorausgesetzt wird. Die Frage nach der Symmetrie der Materialsteifigkeitsmatrix  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$  in den Indexpaaren hat also wesentliche Bedeutung zur Trennung von Vorgängen mit bzw. ohne Potential der Formänderungsgeschwindigkeiten. Diese Frage soll nun für einzelne konstitutive Annahmen erörtert werden.

## 6. Beispiele

### Hyperelastische Deformationsgesetze

Im Falle der Hyperelastizität ist die spezifische Arbeit  $\omega^*$  nach (20) eine eindeutige Funktion des Verzerrungszustandes:

$$\omega^* = \omega^*(\epsilon_{\alpha\beta}). \quad (44)$$

Differentiation nach der Zeit und der Vergleich mit (21) gibt

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \omega^*}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} \quad (45)$$

Eine nochmalige Differentiation nach der Zeit führt auf

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \epsilon_{\alpha\beta} \partial \epsilon_{\mu\nu}} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}. \quad (46)$$

(46) ist als Sonderfall in (39) enthalten, die Materialsteifigkeitsmatrix ist erwartungsgemäß in den Indexpaaren symmetrisch.

Eine inverse Formulierung erfordert  $\tau^{\alpha\beta}$  als unabhängige Variable und beruht auf dem Ergänzungspotential

$$\mu^*(\tau^{\alpha\beta}) = \tau^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} - \omega^*(\epsilon_{\mu\nu}(\tau^{\alpha\beta})) \quad (47)$$

mit

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mu^*}{\partial \tau^{\alpha\beta}} \quad (48)$$

und

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \sqrt{g} \frac{\partial^2 \mu^*}{\partial \tau^{\alpha\beta} \partial \tau^{\mu\nu}} \overset{\circ}{\sigma}^{\mu\nu} = J_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{\circ}{\sigma}^{\mu\nu}. \quad (49)$$

Die Materialnachgiebigkeitsmatrix  $J_{\alpha\beta\mu\nu}$  ist die Inverse zu  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ .

### Elastoplastische Deformationsgesetze

Im Falle elastisch-plastischer Deformationen werden folgende übliche konstitutive Annahmen getroffen:

– Der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit läßt sich in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen:

$$\dot{\epsilon}_{\mu\nu} = \overset{E}{\dot{\epsilon}}_{\mu\nu} + \overset{P}{\dot{\epsilon}}_{\mu\nu}. \quad (50)$$

– Es existiert eine Fließbedingung im Raum der arbeitskonjugierten Spannungen, deren Erfüllung notwendige Voraussetzung für das Fließen ist. Um sie metrikfrei formulieren zu können, werden die gemischtvarianten Koordinaten als Grundvariable ausgewählt. Bei Verfestigung hängt die Fließbedingung noch von den inneren Variablen  $h_i$  ab:

$$F(\tau_{\beta}^{\alpha}, h_i) = 0. \quad (51)$$

– Der Bildvektor der Koordinaten der plastischen Deformationsgeschwindigkeit steht senkrecht auf der Fließfläche (Normalenregel):

$$\overset{P}{\dot{\epsilon}}_{\mu\nu} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \tau^{\mu\nu}} = \dot{\lambda} \varphi_{\mu\nu}. \quad (52)$$

– Die inneren Variablen der Fließbedingung (Verfestigungsparameter) ändern sich nur beim plastischen Fließen [6]:

$$\dot{h}_i = q_i(\tau_{\beta}^{\alpha}, h_j) \dot{\lambda} \quad (53)$$

Die Einhaltung der Fließbedingung während des Fließens führt auf die Konsistenzbedingung:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{\beta}^{\alpha}} \dot{\tau}_{\beta}^{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial h_i} \dot{h}_i = 0.$$

Wird die Konsistenzbedingung mit  $\sqrt{g}^{-1}$  multipliziert, (53) eingesetzt und die Verfestigungsfunktion

$$V = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial h_i} q_i \quad (54)$$

eingeführt, so nimmt die Konsistenzbedingung die Form

$$\varphi_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} - V \dot{\lambda} = 0 \quad (55)$$

an. Hierbei wurde einerseits beachtet, daß

$$\varphi_{\alpha}^{\beta} = g^{\lambda\beta} \varphi_{\alpha\lambda} = g^{\lambda\beta} \frac{\partial F}{\partial \tau^{\alpha\lambda}} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{\beta}^{\alpha}} \quad (56)$$

gilt und andererseits die Tatsache genutzt, daß das Skalarprodukt eines symmetrischen und eines unsymmetrischen Tensors gleich dem des ersten mit dem symmetrischen Teil des zweiten ist. Aus (55) läßt sich nun auch das Entlastungskriterium

$$\varphi_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha\beta} < 0 \quad (57)$$

ableiten.

Für die weitere Herleitung des elastisch-plastischen Zusammenhangs wird nun die Abhängigkeit des elastischen Deformationsanteils von der Spannungsgeschwindigkeit benötigt.

Hierfür sollen zwei Varianten betrachtet werden. In der ersten Variante wird die Hyperelastizität auf den elastisch-plastischen Zustand verallgemeinert. Die durch den elastischen Deformationsanteil verrichtete spezifische Arbeit  $\omega_E^*$  sei eine Funktion der elastischen Deformation. Dann folgt wie bei (46):

$$\varrho^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \omega_E^*}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}^E \partial \epsilon_{\mu\nu}^E} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}^E = C_E^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}^E \quad (58)$$

Mit (50) und (52) ergibt sich

$$\varrho^{\alpha\beta} = C_E^{\alpha\beta\mu\nu} (\dot{\epsilon}_{\mu\nu} - \dot{\lambda} \varphi_{\mu\nu}). \quad (59)$$

Die Konsistenzbedingung erhält mit (59) unter Beachtung von (29) die Form

$$\varphi_{\alpha\beta} \bar{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} - \dot{\lambda} (\varphi_{\alpha\beta} C_E^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} + V) = 0, \quad (60)$$

wobei der Tensor

$$\bar{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu} = C_E^{\alpha\beta\mu\nu} + N^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (61)$$

die gleichen Symmetrieeigenschaften wie  $C_E^{\alpha\beta\mu\nu}$  selbst hat.

Mit den Abkürzungen

$$\bar{\Psi}^{\mu\nu} = \bar{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\alpha\beta} \quad (62)$$

$$\text{und } \beta = \begin{cases} 0 & \text{für } F < 0 \text{ oder } \varphi_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha\beta} < 0 \\ [\varphi_{\alpha\beta} C_E^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} + V]^{-1} F = 0 \text{ und } \varphi_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha\beta} \geq 0 & \text{für } F = 0 \text{ und } \varphi_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha\beta} \geq 0 \end{cases} \quad (63)$$

folgt

$$\dot{\lambda} = \beta \Psi^{\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}. \quad (64)$$

Einsetzen von (64) in (59) und (53) gibt unter analoger Anwendung von (62) für die nicht überstrichenen Größen

$$\varrho^{\alpha\beta} = [C_E^{\alpha\beta\mu\nu} - \beta \Psi^{\alpha\beta} \bar{\Psi}^{\mu\nu}] \dot{\epsilon}_{\mu\nu} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} \quad (65.1)$$

$$h_i = \beta q_i \bar{\Psi}^{\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} = B_i^{\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}. \quad (65.2)$$

Dieses elastoplastische Deformationsgesetz ist nicht exakt in den Indexpaaren symmetrisch. Der Fehler hat entsprechend (61) die Größenordnung Spannung/Modul und ist für technische Stoffe klein. Wird in den Spannungsgeschwindigkeiten jedoch der elastische Anteil in den Differenzgliedern vernachlässigt und

$$\nabla^{\alpha\beta} \approx \varrho^{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}^P \quad (66)$$

in die Konsistenzbedingung (55) eingesetzt, dann folgt

$$\varphi_{\alpha\beta} C_E^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} - \dot{\lambda} (\varphi_{\alpha\beta} \bar{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} + V) = 0 \quad (67)$$

und

$$\dot{\lambda} = \tilde{\beta} \Psi^{\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} \quad (68)$$

mit

$$\tilde{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu} = C_E^{\alpha\beta\mu\nu} - N^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (69)$$

$\tilde{\beta}$  wird analog zu  $\beta$  gebildet. Das Deformationsgesetz lautet nun

$$\varrho^{\alpha\beta} = [C_E^{\alpha\beta\mu\nu} - \tilde{\beta} \Psi^{\alpha\beta} \Psi^{\mu\nu}] \dot{\epsilon}_{\mu\nu} \quad (70.1)$$

$$h_i = \tilde{\beta} q_i \Psi^{\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}. \quad (70.2)$$

Erst mit der Näherung (66) wird also eine Potentialform des Deformationsgesetzes entsprechend (35) erreicht.

Obwohl der Tensor  $N^{\alpha\beta\mu\nu}$  für technische Stoffe klein gegenüber  $C_E^{\alpha\beta\mu\nu}$  ist, zeigen numerische Berechnungen [9], daß seine vollständige Vernachlässigung zu deutlicher Abweichung von der Fließbedingung während der Integration führt. Dagegen führt die Näherung (70) zur Einhaltung der Fließbedingung in hoher Qualität. Eine von vornherein symmetrische Theorie ergibt sich, wenn in einer zweiten Variante (58) durch

$$\nabla^{\alpha\beta} = \bar{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}^E \quad (71)$$

ersetzt wird, wobei (61) gilt. Es ist offensichtlich, daß (71) und (58) im Falle rein elastischer Deformation (auch nach beliebiger plastischer Vordeformation) identisch sind. Rein elastische Be- und Entlastungen bleiben hyperelastisch. Sobald aber plastisches Fließen stattfindet, entsteht ein modifizierter elastischer Zuwachs.

Der übliche Weg – Einsetzen von (50) und (52) in (71), (71) in (55) – gibt

$$\dot{\lambda} = \bar{\beta} \bar{\Psi}^{\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}, \quad (72)$$

wobei  $\bar{\beta}$  gemäß (63) mit  $\bar{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu}$  bestimmt wird. Schließlich folgt dann nach (71) und unter Rücksubstitution von  $\varrho^{\alpha\beta}$  nach (29)

$$\varrho^{\alpha\beta} = [C_E^{\alpha\beta\mu\nu} - \bar{\beta} \bar{\Psi}^{\alpha\beta} \bar{\Psi}^{\mu\nu}] \dot{\epsilon}_{\mu\nu} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu} \quad (73.1)$$

Dieser Tensor  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$  erfüllt wieder alle Anforderungen für die Existenz des Potentials gemäß (35). Aus diesem Grunde wird (73) (meist in der formalen Darstellung mit der gewichteten Jaumann-Ableitung) in der Literatur

bevorzugt. Bei energetischen Untersuchungen ist aber zu beachten, daß  $\dot{\epsilon}_{\mu\nu}^E$  im Falle des plastischen Fließens auch einen plastischen Anteil enthält. Die Erfassung der Kinematik der endlichen Anteile der Deformation nach Lee führt ebenfalls auf (73) [18].

Da für Metalle die elastischen Anteile der Deformation sehr klein bleiben, wird auf eine hyperelastische Beschreibung meist verzichtet. Für isotrope Stoffe eignet sich eine hypoelastische Formulierung mit dem konstanten Elastizitätstensor

$$E^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{E}{2(1+\nu)} [g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}]. \quad (74)$$

Formal gleichberechtigt sind dann bekanntlich die beiden (unterschiedlichen) konstitutiven Annahmen

$$g^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}^E \quad (75)$$

bzw.

$$\gamma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{\epsilon}_{\mu\nu}^E. \quad (76)$$

Dabei wird aber die zweite Fassung bevorzugt, da sie mit (71) korrespondiert und (35) genügt. Die energetischen Mängel bleiben natürlich bestehen, aber (76) hat zudem den Vorzug, daß in einer orthogonalen Metrik weitgehend dem physikalisch attraktiven „linearen“ Hencky-Gesetz entsprochen wird. Mit

$$\bar{C}_E^{\alpha\beta\mu\nu} = C_E^{\alpha\beta\mu\nu} + N^{\alpha\beta\mu\nu} = E^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (77)$$

wird der Anschluß zu (73) hergestellt. Beispiele für die Anwendung von (73) mit (77) finden sich in großer Anzahl in der Literatur, stellvertretend seien [19] für die Lagrange-Fassung, [20] für die Euler-Darstellung und [21] für die konvektive Metrik genannt.

## Rheonome und temperaturabhängige Deformationsgesetze

Im Falle rheonomer (viskoelastischer und viskoplastischer) Deformationsgesetze treten die Materialtensoren  $s_{ij}^{\alpha\beta}$  und  $e_i$ , bei Temperaturabhängigkeit  $s_{ij}^{\alpha\beta}$  und  $e_i$  in (39) zusätzlich auf [3]. Prinzipiell neue Fragestellungen im Vergleich zu den kleinen Verformungen sind nicht zu erwarten. Die wesentliche Frage nach der Symmetrie von  $C^{\alpha\beta\mu\nu}$  wird durch die rheonomen Einflüsse nicht berührt. Das gilt auch für den Temperatureinfluß, solange die Rückwirkung der Deformation auf das Temperaturfeld vernachlässigt wird.

## 7. Numerische Testung der Deformationsgesetze

Kerngedanke der Standardformulierung war, die Ausrüstung und Nachrüstung von Feld- und Bauteilprogrammen auf der Basis der Zuwuchsgleichungen mit Deformationsgesetzen für beliebige inelastische und nichtlineare Eigenschaften programmtechnisch zu realisieren. Die Vorzüge dieser Konzeption liegen in der Einsparung von hochqualifizierter Ingenieurarbeit zu Lasten des Computers. Dieser Vorteil wird dann besonders prägnant, wenn es gelingt, die erforderlichen Unterprogramme getrennt vom (meist sehr aufwendigen und daher auch viel Rechenzeit kostenden) Feldprogramm zu entwickeln und umfassend unter unterschiedlichen Spannungs- und Verzerrungszuständen und Belastungswegen zu testen.

Das Feldproblem wird bei Beschränkung auf einen homogenen Zustand ausgeklammert. Bei kleinen Verformungen sind die globalen Größen (Längen, Winkel, Kräfte) zu den lokalen Größen (Verzerrungen, Spannungen) im homogenen Fall proportional, so daß die Identifikation problemlos ist.

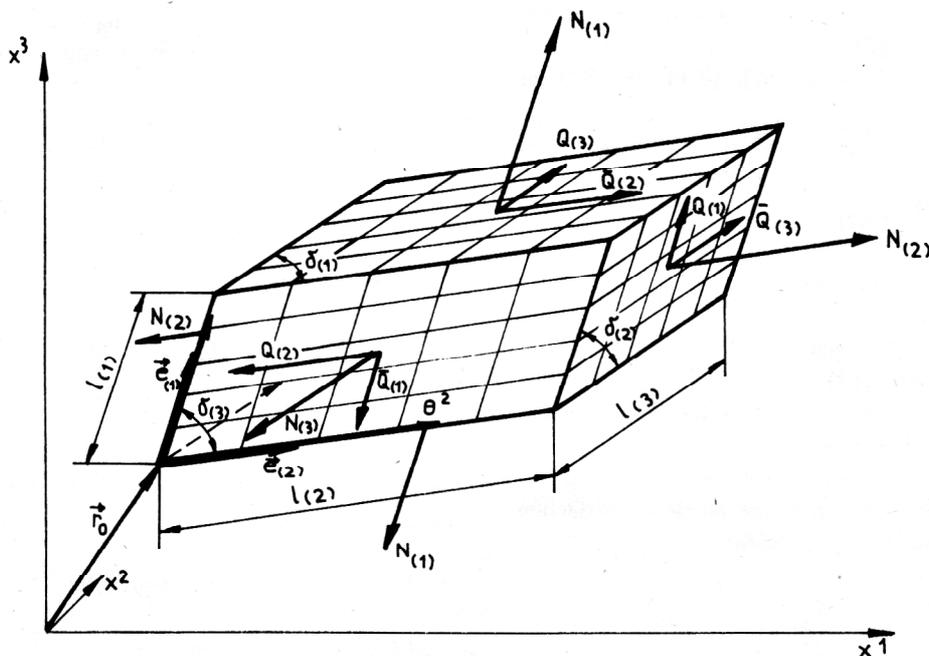


Bild 2  
Parallelepipid unter homogener Beanspruchung

Bei endlichen Verformungen verändern sich die lokalen Größen jedoch anders als die globalen. Daher wurde in [9] eine Metrik untersucht, die die numerische Berechnung homogener Felder lokaler und zugeordneter globaler Variabler bei endlichen Verformungen erlaubt. Voraussetzung dabei ist, daß das Material in dem betrachteten endlichen Volumen homogen ist.

Da Metrik und Verzerrung gekoppelt sind, ist ein homogener Zustand nur zu erreichen, wenn alle Koordinatenlinien geradlinig und gleichabständig sind. Der homogene Zustand führt daher zwangsläufig auf ein Parallelepipet. Für diesen „Probekörper“ sind nun lediglich die meßbaren (globalen) geometrischen und kinetischen Größen zweckmäßig zu definieren. Diese Festlegungen zeigt Bild 2.

Basis der physikalischen Betrachtungen sind drei zu den Kanten des Parallelepipeds parallele Einheitsvektoren  $\vec{e}_{(\alpha)}$ . Die Kantenlängen haben die Länge  $l_{(\alpha)}(t)$ , und die Koordinaten  $\Theta^\alpha$  werden so normiert, daß das Parallelepipet durch

$$0 \leq \Theta^\alpha \leq 1 \quad (78)$$

beschrieben wird. Die Geometrie wird außerdem durch 3 Winkel  $\delta_{(\alpha)}(t)$  festgelegt, die je zwei Einheitsvektoren in der Ebene  $\Theta^\alpha = \text{const.}$  einschließen. Für sie soll

$$-\frac{\pi}{2} < \delta_{(\alpha)} < \frac{\pi}{2} \quad (79)$$

gelten. Der Ortsvektor für ein beliebiges Teilchen im Parallelepipet wird durch

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \sum_{\alpha=1}^3 l_{(\alpha)} \Theta^\alpha \vec{e}_{(\alpha)} \quad (80)$$

beschrieben. Nach (5) folgt

$$\vec{g}_\alpha = l_{(\alpha)} \vec{e}_{(\alpha)}. \quad (81)$$

Dabei sei vereinbart, daß für die eingeklammerten Indizes, die physikalische Werte ausweisen, die Summationskonvention nicht gilt.

Der Metriktensor ergibt sich nach (7.1) aus (81) zu

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} l_{(1)}^2 & l_{(1)}l_{(2)}\cos\delta_{(3)} & l_{(3)}l_{(1)}\cos\delta_{(2)} \\ l_{(1)}l_{(2)}\cos\delta_{(3)} & l_{(2)}^2 & l_{(2)}l_{(3)}\cos\delta_{(1)} \\ l_{(3)}l_{(1)}\cos\delta_{(2)} & l_{(2)}l_{(3)}\cos\delta_{(1)} & l_{(3)}^2 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Auf die Angabe der kovarianten Koordinaten des Verzerrungstensors nach (12) und der Deformationsgeschwindigkeit nach (14) soll der einfachen Berechenbarkeit wegen verzichtet werden.

Über die Flächen  $\Theta^\alpha = \text{const.}$  werden gleichmäßig verteilte Schnittkräfte übertragen, die an den Endflächen mit den Belastungen übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \Theta^1 = \text{const.} : \vec{S}_1 &= N_{(1)}\vec{e}_{(1)} + \bar{Q}_{(2)}\vec{e}_{(2)} + Q_{(3)}\vec{e}_{(3)} \\ \Theta^2 = \text{const.} : \vec{S}_2 &= Q_{(1)}\vec{e}_{(1)} + N_{(2)}\vec{e}_{(2)} + Q_{(3)}\vec{e}_{(3)} \\ \Theta^3 = \text{const.} : \vec{S}_3 &= \bar{Q}_{(1)}\vec{e}_{(1)} + Q_{(2)}\vec{e}_{(2)} + N_{(3)}\vec{e}_{(3)}. \end{aligned} \quad (83)$$

Das Momentengleichgewicht fordert

$$\begin{aligned} Q_{(1)}l_{(2)} &= \bar{Q}_{(2)}l_{(1)} \\ Q_{(2)}l_{(3)} &= \bar{Q}_{(3)}l_{(2)} \\ Q_{(3)}l_{(1)} &= \bar{Q}_{(1)}l_{(3)}. \end{aligned} \quad (84)$$

Der Flächeninhalt und die Flächeneinheitsnormale der Schnittflächen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \Theta^1 = \text{const.} : A_{(1)} &= l_{(2)}l_{(3)}\sin\delta_{(1)}; \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \vec{g}^1 \\ \Theta^2 = \text{const.} : A_{(2)} &= l_{(3)}l_{(1)}\sin\delta_{(2)}; \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \vec{g}^2 \\ \Theta^3 = \text{const.} : A_{(3)} &= l_{(1)}l_{(2)}\sin\delta_{(3)}; \vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \vec{g}^3 \end{aligned} \quad (85)$$

Aus (16.2) folgt für (82)

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= l_{(1)}l_{(2)}l_{(3)} \\ &\sqrt{1 - \cos^2\delta_{(1)} - \cos^2\delta_{(2)} - \cos^2\delta_{(3)} + 2\cos\delta_{(1)}\cos\delta_{(2)}\cos\delta_{(3)}} \end{aligned} \quad (86)$$

und aus der reziproken Matrix zu (82) läßt sich

$$\sqrt{g^{\alpha\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{g}} A_{(\alpha)} \quad (87)$$

berechnen. Damit sind alle Formeln zusammengestellt, um aus

$$t^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} n_\beta \quad (88)$$

die kontravarianten Koordinaten des Spannungstensors zu bestimmen, wobei der Spannungsvektor  $\vec{t} = \vec{S}_\alpha/A_{(\alpha)}$  und der Normalenvektor  $\vec{n} = \vec{n}_\alpha$  aus der Zuordnung zur jeweiligen Schnittfläche  $\Theta^\alpha = \text{const.}$  zu nehmen sind. Es folgt

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \frac{N_{(1)}}{l_{(1)}} & \frac{Q_{(1)}}{l_{(1)}} & \frac{Q_{(3)}}{l_{(3)}} \\ \frac{Q_{(1)}}{l_{(1)}} & \frac{N_{(2)}}{l_{(2)}} & \frac{Q_{(2)}}{l_{(2)}} \\ \frac{Q_{(3)}}{l_{(3)}} & \frac{Q_{(2)}}{l_{(2)}} & \frac{N_{(3)}}{l_{(3)}} \end{bmatrix} \quad (89)$$

Im allgemeinen räumlichen Fall stehen sich somit 6 lokale kinematische Variable

$$\epsilon = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{31}]^T \quad (90)$$

und 6 kinetische Größen

$$\sigma = [\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{23}, \sigma^{31}]^T \quad (91)$$

gegenüber, die 6 globalen kinematischen Variablen

$$\underline{l} = [l_{(1)}, l_{(2)}, l_{(3)}, \delta_{(1)}, \delta_{(2)}, \delta_{(3)}]^T \quad (92)$$

und 6 Kraftgrößen

$$\underline{f} = [N_{(1)}, N_{(2)}, N_{(3)}, Q_{(1)}, Q_{(2)}, Q_{(3)}]^T \quad (93)$$

zugeordnet sind. Während die lokalen Variablen gemäß (18) leistungskonjugiert sind

$$\underline{p}^* = \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon}, \quad (94)$$

gilt dies für die globalen Größen nicht. Die Gesamtleistung ergibt sich zu

$$P = N_{(1)} \dot{l}_{(1)} + N_{(2)} \dot{l}_{(2)} + N_{(3)} \dot{l}_{(3)} \quad (95)$$

$$+ Q_{(1)} l_{(2)} [(\dot{l}_{(1)}/l_{(1)} + \dot{l}_{(2)}/l_{(2)}) \cos \delta_{(3)} - \dot{\delta}_{(3)} \sin \delta_{(3)}]$$

$$+ Q_{(2)} l_{(3)} [(\dot{l}_{(2)}/l_{(2)} + \dot{l}_{(3)}/l_{(3)}) \cos \delta_{(1)} - \dot{\delta}_{(1)} \sin \delta_{(1)}]$$

$$+ Q_{(3)} l_{(1)} [(\dot{l}_{(3)}/l_{(3)} + \dot{l}_{(1)}/l_{(1)}) \cos \delta_{(2)} - \dot{\delta}_{(2)} \sin \delta_{(2)}].$$

Eine konjugierte Zerlegung ist auf verschiedene Weise möglich. In [9] wird der eindeutigen Kräftentrennung der Vorzug gegeben. Sollen gleichzeitig die kinematische Variable einfach über  $t$  integrierbar bleiben, so ist die Wahl folgender globaler konjugierter Variabler sinnvoll:

$$\tilde{\underline{l}} = [l_{(1)}, l_{(2)}, l_{(3)}, l_{(1)} l_{(2)} \cos \delta_{(3)}, l_{(2)} l_{(3)} \cos \delta_{(1)}, l_{(3)} l_{(1)} \cos \delta_{(2)}]^T \quad (96)$$

$$\tilde{\underline{f}} = [N_{(1)}, N_{(2)}, N_{(3)}, Q_{(1)}/l_{(1)}, Q_{(2)}/l_{(2)}, Q_{(3)}/l_{(3)}]^T \quad (97)$$

Für sie gilt:

$$\underline{P} = \tilde{\underline{f}}^T \tilde{\underline{l}}. \quad (98)$$

Der Zusammenhang zwischen den globalen und lokalen Variablen wird durch eine einfach strukturierte Diagonalmatrix  $\underline{L}$ , die nur die  $l_{(\alpha)}$  und die 1 auf der Diagonale enthält, hergestellt:

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \tilde{\underline{l}} \quad (99)$$

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \underline{L}^{-1} \tilde{\underline{f}} \quad (100)$$

Die Zeitdifferentiation von (100) unter Beachtung von (23) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\sigma}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\underline{L}^{-1} \dot{\tilde{\underline{f}}} + \dot{\underline{L}}^{-1} \tilde{\underline{f}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \underline{L}^{-1} (\dot{\tilde{\underline{f}}} - \underline{\dot{N}} \tilde{\underline{l}}). \end{aligned} \quad (101)$$

Auch  $\underline{N}$  ist eine Diagonalmatrix, die durch  $N_{(\alpha)}/l_{(\alpha)}$  und Nullelemente aufgebaut wird.

Das Deformationsgesetz (39) geht mit den Vektoren (90) und (91) und dem Vektor  $\underline{h} = [h_i]^T$  in eine entsprechende Matrizenformulierung über

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{s}_g \dot{\vartheta} + \underline{s} \quad (102.1)$$

$$\underline{\dot{h}} = \underline{B} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{e}_g \dot{\vartheta} + \underline{e}, \quad (102.2)$$

und der globale Zusammenhang folgt mit (99) und (101) zu

$$\tilde{\underline{\dot{f}}} = (\sqrt{g} \underline{L} \underline{C} \underline{L} + \underline{N}) \tilde{\underline{\dot{l}}} + \sqrt{g} \underline{L} \underline{s}_g \dot{\vartheta} + \sqrt{g} \underline{L} \underline{s} \quad (103.1)$$

$$\underline{\dot{h}} = \underline{B} \underline{L} \tilde{\underline{\dot{l}}} + \underline{e}_g \dot{\vartheta} + \underline{e}. \quad (103.2)$$

Diese Gleichungen zeigen, daß auch die globale Steifigkeitsmatrix

$$\tilde{\underline{K}} = \sqrt{g} \underline{L} \underline{C} \underline{L} + \underline{N} \quad (104)$$

nur für konjugierte Variable symmetrisch ist (wobei diese Symmetrie überhaupt erst für symmetrische lokale Steifigkeitsmatrizen  $\underline{C} = \underline{C}^T$  untersucht werden kann).

Für die Simulation beliebiger Kraft-Verformungs-Vorgänge ist oft der Globalgrößensatz (92), (93) angenehmer. Die Kopplung von (92), (93) zu (96), (97) ist leicht herzustellen. Durch Differentiation nach der Zeit ergibt sich

$$\tilde{\underline{\dot{l}}} = \tilde{\underline{\Lambda}} \tilde{\underline{\dot{l}}} \quad (105)$$

$$\tilde{\underline{\dot{f}}} = \tilde{\underline{\Lambda}} \tilde{\underline{\dot{f}}} + \underline{P} \tilde{\underline{\dot{l}}} \quad (106)$$

Dabei weichen die Matrizen  $\tilde{\underline{\Lambda}}$  und  $\underline{\Lambda}$ , die wiederum nur geometrische Parameter enthalten, in den von  $\delta_{(\alpha)}$  abhängigen Elementen stark voneinander ab. Die Matrix  $\underline{P}$  enthält die  $Q_{(\alpha)}$  und  $l_{(\alpha)}$  und ist unsymmetrisch. Daher ergeben (105) und (106) den globalen Zusammenhang

$$\tilde{\underline{\dot{f}}} = (\tilde{\underline{\Lambda}} \tilde{\underline{K}} \tilde{\underline{\Lambda}} + \underline{P}) \tilde{\underline{\dot{l}}} + \sqrt{g} \underline{\Lambda} \underline{L} \underline{s}_g \dot{\vartheta} + \sqrt{g} \underline{\Lambda} \underline{L} \underline{s} \quad (107.1)$$

$$\underline{\dot{h}} = \underline{B} \underline{L} \underline{\Lambda} \tilde{\underline{\dot{l}}} + \underline{e}_g \dot{\vartheta} + \underline{e} \quad (107.2)$$

mit einer nunmehr unsymmetrischen globalen Steifigkeitsmatrix

$$\underline{K} = \underline{\Lambda} \tilde{\underline{K}} \tilde{\underline{\Lambda}} + \underline{P}. \quad (108)$$

Die Gleichungen (102), (103) und (104) bilden die Grundlage eines Programms NIMAG zur Untersuchung von Deformationsgesetzen [9]. Die Berechnung der Matrizen in (102) erfolgt in Unterprogrammen, die dem Deformationsgesetz zugeordnet sind. Dagegen erfolgt die Steuerung, welche Elemente von  $\underline{\sigma}$  und  $\underline{\epsilon}$  bzw. von  $\underline{l}$  und  $\underline{f}$  vorgegeben werden, automatisch. So kann jeder reduzierte Spannungs- oder Verzerrungszustand (z. B. ebene Probleme in beiden Varianten, rotations-symmetrische Probleme usw.) numerisch simuliert werden. Es ist auch möglich, von vornherein konjugierte Paare ohne Beitrag zur Leistung zu streichen und mit reduzierten Matrizen (zum Beispiel ebener Spannungszustand) zu rechnen. Die Integration aller Unbekannten ( $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}$ ,  $\underline{f}$ ,  $\underline{l}$ ,  $\underline{h}$ ,  $\vartheta$ ) einschließlich der durch vorgegebene

Belastungsgeschwindigkeiten definierten kinematischen oder kinetischen Größen und der vorgegebenen Temperaturänderung sowie der Metrik nach (82) erfolgt mit Runge-Kutta. Basisgleichungen sind wahlweise (102) oder (107), und die Umrechnungen erfolgen nach (99), (101), (105) und (106).

## 8. Zusammenfassung

In einer konvektiven Metrik, die sich durch die konsequente Anwendung der Tensorrechnung in krummlinigen Koordinaten auszeichnet und daher mit zeitveränderlichen Basisvektoren arbeitet, ist mit (39) die Standardform eines inelastischen Deformationsgesetzes gegeben. Wesentlich für die Existenz eines Potentials in den Formänderungsgeschwindigkeiten und damit für abgesicherte numerische Verfahren ist die Symmetrie der Materialsteifigkeitsmatrix. Sie wird an Beispielen untersucht. Ein Weg zur Testung der Matrizen der Standardformulierung wird vorgestellt.

## LITERATUR

- [ 1 ] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. ZAMM 58 (1978), 489 – 499.
- [ 2 ] Bergander, H.: Einheitliches Konzept der Gleichungen des nichtlinear-inelastischen Materialverhaltens für FEM-Programmentwicklungen. WBZ FKM, Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz. Vorträge zum Problemseminar Finite Elemente II, Heft 5/77, TU Dresden 1977.
- [ 3 ] Bergander, H.: Das Deformationsgesetz in Rechenprogrammen für Bauteile aus inelastischem Material. Techn. Mech. 1 (1980), 57 – 61.
- [ 4 ] Bergander, H.: Die Berücksichtigung des nichtelastischen Materialverhaltens bei der Methode der finiten Elemente. IfL-Mitt. 18 (1979), 93 – 96.
- [ 5 ] Bergander, H.: Zur Inversion allgemeiner inelastischer Deformationsgesetze. IfL-Mitt. 19 (1980), 142 – 144.
- [ 6 ] Bergander, H.: Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung. ZAMM 60 (1980), 509 – 519.
- [ 7 ] Bergander, H.: Programmiergerechte Standardformulierung des inelastischen Materialverhaltens. Tagung Festkörpermechanik. Festigkeitsprobleme und Materialverhalten, Berichte. Band B, XLV 1/1 – 12, Leipzig: Fachbuchverlag 1982.

- [ 8 ] Bergander, H.: Anwendungsbeschreibung und Programmierschrift für das Programm NIMEHS, TU Dresden, 1981.
- [ 9 ] Bergander, H. u. a.: Grundlagen nichtelastischer Deformationsgesetze und deren Anwendung. Jahresforschungsbericht, TH Karl-Marx-Stadt, 1985.
- [ 10 ] Bergander, H.; Nitzschke, R.; Ulbricht, V.: Anwendungsbeschreibung für das Programmpaket NISCHA 82. TU Dresden und TH Karl-Marx-Stadt, 1983.
- [ 11 ] Drey, K.-D.; Pausch, E.: ESER-Version des Programms FIDEFA. Programmbeschreibung. TH Karl-Marx-Stadt, 1984.
- [ 12 ] Landgraf, G.; Ulbricht, V.: Berechnung von geometrisch und physikalisch nichtlinearen beliebigen Schalen. Forschungsbericht, TU Dresden, 1985.
- [ 13 ] Green, A. E.; Zerna, T.: Theoretical Elasticity. Oxford: University Press, 1968.
- [ 14 ] Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre. Band 2, Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1985.
- [ 15 ] Hill, R.: Some Basic Principles in the Mechanics of Solids without a Natural Time. J. Mech. Phys. Solids 7 (1959), 209 – 225.
- [ 16 ] Landgraf, G.: Extremalprinzip für geometrisch nichtlineare Flächentragwerke. WBZ FKM, Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz, Vorträge zum Problemseminar Flächentragwerke III, TU Dresden, 1982.
- [ 17 ] Günther, H.: Finite Deformationen. Zur Berechnung großer elastischer und inelastischer Deformationen kompressibler Methoden mit einer inkrementellen Methode. Zwickau: Wissensch. Beiträge der Ingenieurhochschule, 1983.
- [ 18 ] Lubarda, V. A.; Lee, E. H.: A Correct Definition of Elastic and Plastic Deformation and Its Computational Significance. J. Appl. Mech. 48 (1981), 35 – 40.
- [ 19 ] Hutchinson, J. W.: Finite Strain Analysis of Elastic-Plastic Solids and Structures. Numerical Solutions of Nonlinear Structural Problems. ASME, New York 1973, 17 – 29.
- [ 20 ] Balke, H.: Zum Verzweigungsproblem elastisch-plastischer Verbundstäbe. Techn. Mech. 2 (1981), 47 – 53.
- [ 21 ] Lehmann, T.: On the Concept of Stress-Strain Relations in Plasticity. Acta Mechanica 42 (1982), 263 – 275.