

Lösung diskretisierter Kontaktprobleme unter Verwendung der linearen Optimierung

Udo Fischer, Uwe Hoyer, R.-J. Melosh

1. Einführung

Die Notwendigkeit der Berechnung von Kräften, Spannungen und Verformungen beim elastischen Kontakt zweier Körper hat zu einer Vielzahl von Arbeiten zu diesem Thema geführt. In der Regel wird das Problem dadurch gelöst, daß die Gesamlast in eine endliche Zahl von Lastschritten zerlegt wird. Diese werden nacheinander bis zum Erreichen der vollständigen Last aufgebracht. Solch eine Vorgehensweise ist notwendig, wenn das Problem durch nichtlineare Gleichungen beschrieben wird (vgl. [1] – [3]). Solche Gleichungen entstehen beispielsweise, wenn durch den Kontakt Reibkräfte hervorgerufen werden. Für den linearen Fall und bei Vernachlässigung der Reibung kann die Lösung auch ohne diese inkrementale Herangehensweise gefunden werden ([4], [5]).

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß das Kontaktproblem als lineares Optimierungsproblem formuliert werden kann. Es wird eine neue Variante des Simplexalgorithmus' vorgestellt. Die Lösung dieses Algorithmus' ist die eindeutige Lösung des Kontaktproblems. Anhand zweier Beispiele werden die Vorteile des Verfahrens für die Automatenrechnung im Vergleich zu alternativen Vorgehensweisen unterstrichen.

2. Problemstellung

Als ein Beispiel für die interessierende Klasse von Problemen soll der Kontakt zwischen einem elastischen Körper und einer ebenen starren Oberfläche dienen (Bild 1). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, daß sich der Körper bis zum Kontakt mit der Ebene unter der Einwirkung der äußeren Kräfte F_K als starrer Körper senkrecht zur Ebene bewegt.

Die genaue Lage eines der Kontaktpunkte wird in Bild 2 gezeigt. Der Punkt 0 ist ein willkürlich gesetzter Bezugspunkt auf dem Körper. In Bild 2a wird der Körper im unbelasteten Zustand dargestellt. a_K ist der senkrechte Abstand des Kontaktpunktes von der Oberfläche. Bild 2b zeigt den Zustand, nachdem sich der Bezugspunkt um die Strecke v_0 zum Punkt 0' bewegt hat. c_K ist das Maß für den jetzigen Abstand zwischen dem Körper und dem potentiellen Kontaktpunkt auf der Oberfläche. Die Verschiebung des Kontaktpunktes bezüglich 0' infolge der elastischen Deformation wird durch v_K beschrieben. F_K ist die nach erfolgtem Kontakt zwischen den Punkten wirkende innere Kraft. Es gilt

$$c_K \geq 0; F_K \geq 0 \text{ und } F_K c_K = 0 \quad (1)$$

Die beiden Ungleichungen ergeben sich aus dem physikalischen Hintergrund der Problemstellung. Das Produkt beider Größen ist Null, da nur entweder c_K oder F_K verschieden von Null sein können.

Das elastische Potential des Körpers ergibt sich zu

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n F_K v_K + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n \bar{F}_K \bar{v}_K - v_0 \sum_{K=1}^n \bar{F}_K \quad (2)$$

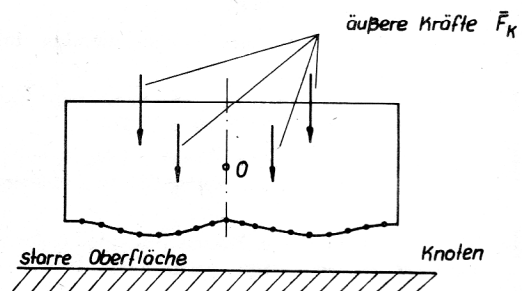


Bild 1
Unverformter elastischer Körper vor dem Kontakt mit einer starren Oberfläche

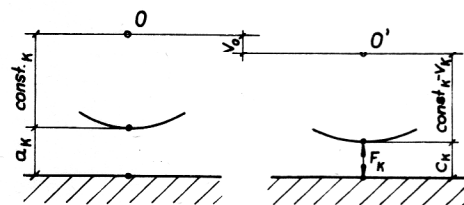


Bild 2
Kontaktpunkt vor und nach der Deformation
a) Unbelasteter Körper
b) Belasteter Körper

Unter den Voraussetzungen der linearen Elastizität läßt sich der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Kräften folgendermaßen formulieren

$$v_K = \sum_i \alpha_{Ki} F_i + \sum_j \beta_{Kj} \bar{F}_j$$

$$\bar{v}_K = \sum_j \beta_{jK} F_j + \sum_i \gamma_{Ki} \bar{F}_i \quad (3)$$

\bar{F}_i sind die an \bar{n} Knoten angreifenden senkrechten äußeren Kräfte. Nach erfolgtem Kontakt sind diese Knoten um die Strecke \bar{v}_K relativ zu 0' verschoben. Die Größen α , β und γ bilden die Matrizen der Einflüßzahlen der Kontakt- bzw. äußeren Kräfte.

Wie aus Bild 2 ersichtlich, gilt für den Abstand a_K

$$a_K = v_o - v_K + c_K \quad (4)$$

Ferner ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen zu

$$\sum_K F_K = \sum_K \bar{F}_K \quad (5)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (4) und (5) läßt sich das elastische Potential folgendermaßen schreiben

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_K F_K (c_K - a_K) - \frac{1}{2} v_o \sum_K F_K + \frac{1}{2} \sum_i \bar{F}_i \bar{v}_i \quad (6)$$

Die Verschiebung der Kontaktpunkte durch die äußeren Kräfte wird mit b_K bezeichnet. In Übereinstimmung mit Gleichung (3) gilt

$$-b_K = \sum_i \beta_{Ki} \bar{F}_i \quad (7)$$

Damit wird b_K entgegen der Wirkungsrichtung der Resultierenden von \bar{F}_i als positiv angenommen.

Die Zusammenfassung der Gleichungen (3), (5) und (7) führt zu

$$2\Pi = F_o v_o - \sum_K (a_K + b_K) F_K \quad (8)$$

Letztlich besteht das mathematische Problem darin, das durch Gleichung (8) ausgedrückte Potential zu minimieren.

Dabei müssen folgende Nebenbedingungen eingehalten werden

$$c_K = a_K + b_K + \sum_i \alpha_{Ki} F_i - v_o \quad (9)$$

$$F_K \geq 0; c_K \geq 0; F_K c_K = 0 \quad (10)$$

$$F_o = \sum_K F_K = \sum_K \bar{F}_K \quad (11)$$

Damit wurde das Problem auf die Problemstellung der linearen Optimierung zurückgeführt.

3. Lösungsalgorithmus

Ausgangspunkt für die Minimierung des Potentials ist eine zulässige Basislösung, d. h. eine mit den Nebenbedingungen verträgliche Lösung, die mit der sogenannten Phase I des Simplexalgorithmus erhalten werden kann [7].

Bild 3 zeigt das entsprechende Simplextableau. Eingeführt wurden die Zusatzvariablen x_1, x_2, \dots, x_{K+1} .

F_1, F_2, \dots, F_n	c_1, c_2, \dots, c_n	v_o	RS	x_1, x_2, \dots, x_{n+1}	
$-\alpha_{ik}$	\bar{E}	1	$\alpha_{11} + b_1$	\bar{E}	0
		1	$\alpha_{21} + b_2$		0
		\vdots	\vdots		\vdots
		1	$\alpha_{n1} + b_n$		0
1 1 ... 1	0 0 ... 0	0	F_o		0
0 0 ... 0	0 0 ... 0	0	0	1 1 ... 1 1	-z

Bild 3
Matrixtableau für das Kontaktproblem in Bild 1

Tabelle 1
Matrixtableaus und Lösungsprozeß für ein Beispiel nach Bild 1 mit zwei Knoten

1	2	3	4	5	
F_1	F_2	c_1	c_2	v_o	RS
-0,2	-0,1	1	0	1	0
-0,1	-0,2	0	1	1	1
1	1	0	0	0	2
-0,7	-0,7	-1	-1	-2	-3

0	0,1	1	0	1	0,4
0	-0,1	0	-1	1	1,2
1	1	0	0	0	2
0	0	-1	-1	-2	-1,6

0	0,1	1	0	1	0,4
0	-0,1	0	1	1	1,2
1	1	0	0	0	2
0	-0,1	-1	0	-1	-0,4

0	0,1	1	0	1	0,4
0	-0,2	-1	1	0	0,8
1	1	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0

Basisvariablen: 6 7 8
 x_1 x_2 x_3

Anfangstableau nach dem Einführen der Zusatzvariablen. Der Algorithmus beginnt mit der Elimination von x_3 (Vektor 8) durch die Kraft F_1 (Vektor 1)

Basisvariablen: x_1 x_2 F_1

c_1 kann nicht in die Basis eingefügt werden, da dies bereits mit F_1 erfolgte. Folglich wird x_2 eliminiert durch c_2 .

Basisvariablen: x_1 c_2 F_1

F_2 und c_1 können nicht eingefügt werden, da c_2 und F_1 bereits Basisvariablen sind. Also wird x_1 durch v_o ersetzt.

Basisvariablen: v_o c_2 F_1

Damit wird der Zyklus beendet. Die Nichtbasisvariablen F_2 und c_1 sind Null. Als Resultat ergibt sich $F_1 = 2; c_2 = 0,8; v_o = 0,4$.

Da jeder Variablen eine Spaltennummer zugeordnet ist, ergeben sich für jeden Schritt die aktuellen Basisvariablen nach folgendem Schema:

6 7 8
6 7 1
6 4 1
5 4 1

Diese Zusatzvariablen sind die anfänglichen Basisvariablen, mit deren Hilfe das lineare Optimierungsproblem in die kanonische Form überführt wird. Die Darstellung der Zusatzvariablen im Simplextableau wird in Bild 3 nur zur Erläuterung des Algorithmus vorgenommen. Das Ziel jedes einzelnen Rechenzyklus besteht darin, jeweils eine der Zusatzvariablen durch eine der Verschiebungs- bzw. Kraftvariablen zu ersetzen. Bei praktischen Rechnungen genügt es, den Vektor der jeweils aktuellen Basisvariablen abzuspeichern. Demzufolge kann der rechte Teil des Tableaus entfallen.

Die letzte Zeile des Tableaus bildet die Gleichung des zusätzlichen Potentials

$$z = \sum_{K=1}^{n+1} x_K$$

Phase I des Simplexalgorithmus besteht aus folgenden Schritten:

1. Subtraktion jeder vorhergehenden von der letzten Zeile.
2. Beseitigen einer Zusatzvariablen aus der Basis. Dazu ist es notwendig, eine Variable auszuwählen, die aus der Basis entfernt wird. An deren Stelle wird eine neue, in die Basis einzubringende Variable ausgewählt. Diese Entscheidung wird folgendermaßen getroffen:
 - a) Die zu eliminierende Variable wird so gewählt, daß negative Zahlen im Vektor der rechten Seite vermieden werden.
 - b) Die neu in die Basis einzuführende Variable muß drei Bedingungen erfüllen. Diese unterscheiden sich teilweise von den Bedingungen der herkömmlichen Simplexmethode.
 1. Es können nur Variablen mit negativem Wert in der letzten Zeile des zugehörigen Spaltenvektors ausgewählt werden.
 2. Eine Kraft oder ein Spiel können nicht in die Basis eingefügt werden, wenn die Gegenvariable in der Basis verbleibt. So kann F_K nicht hinzugefügt werden, wenn c_K in der revidierten Basis verbleibt.
 3. Eine einmal aus der Basis eliminierte Zusatzvariable kann nicht wieder eingefügt werden.

Schritt 2 wird so lange wiederholt, bis alle Zusatzvariablen eliminiert sind.

Tabelle 1 erläutert die Anwendung des modifizierten Algorithmus für ein Beispiel mit zwei Knoten. Da es sich hier um fünf Variablen und zwei Knoten handelt, machen sich drei Schritte notwendig.

4. Eindeutigkeit der Lösung

Eine mögliche Lösung für F_K , c_K und v_o erfüllt die Gleichungen 9 bis 11. Im folgenden wird nachgewiesen, daß nur eine mögliche Lösung existiert. Damit ist die durch den vorgestellten Algorithmus entwickelte Lösung die wirkliche Lösung des Problems.

Zum Beweis der Eindeutigkeit wird die Existenz zweier unterschiedlicher möglicher Lösungen $F_K(1)$, $c_K(1)$, $v_o(1)$ und $F_K(2)$, $c_K(2)$, $v_o(2)$ vorausgesetzt. Dann ist die Differenz der Spiele in beiden Lösungen:

$$c_K(2) - c_K(1) = \sum_i \alpha_{Ki} \{ F_i(2) - F_i(1) \} - \{ v_o(2) - v_o(1) \} \quad (12)$$

Durch Multiplikation der Gleichung (12) mit $\{ F_K(2) - F_K(1) \}$, die Summation über alle K und die Verwendung der Gleichungen (10) und (11) ergibt sich

$$\sum_K \{ F_K(1) c_K(2) + F_K(2) c_K(1) \} + \sum_{K,i} \alpha_{Ki} \{ F_i(2) - F_i(1) \} \{ F_K(2) - F_K(1) \} = 0 \quad (13)$$

Dabei ist in (13) die erste Summe in Übereinstimmung mit Gleichung (1) nicht negativ. Da die Matrix der Einflußzahlen positiv definit sein muß, ist der zweite Term in Gleichung (13) positiv, wenn beide Lösungen unterschiedlich sind. Folglich ist diese Gleichung nur für zwei identische Lösungen erfüllt.

Die gesuchte Lösung des Kontaktproblems liegt damit vor, und es entfällt die Notwendigkeit der Abarbeitung der zweiten Phase des Simplexalgorithmus.

5. Anwendungen des modifizierten Algorithmus

Im folgenden wird der modifizierte Algorithmus an zwei praktischen Beispielen erläutert.

Bild 4 zeigt das erste Berechnungsbeispiel. Eine kreisförmige Gummischeibe wird durch eine konstante Flächenlast p gegen eine starre Ebene gepreßt. Durch die entgegengesetzt gerichtete Linienlast q kommt es stellenweise zum Abheben der Scheibe von ihrer Unterlage. Für das diskretisierte Modell wurden 13 konzentrische Kreise einschließlich des Mittelpunktes gewählt. Der anfängliche Abstand a_K wurde für alle Punkte gleich Null gesetzt. Die Zuordnung der in Phase I benötigten Variablen geschieht nach folgendem Schema:

- 1 - 13, die zwischen den Kontaktlinien wirkenden Kräfte F_K
- 14 - 26, die Spiele c_K
- 27, die Starrkörperverschiebung v_o
- 28 - 41, die zusätzlichen Variablen

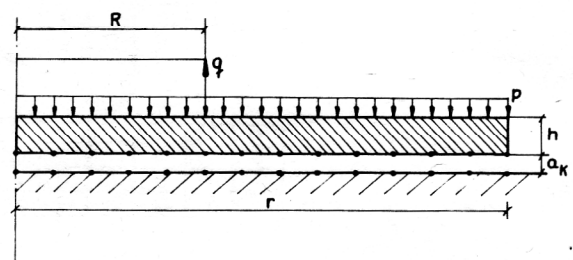


Bild 4

Kreisscheibe auf starrer Unterlage im unverformten Zustand
 $(E = 2 \cdot 10^3 \frac{N}{mm^2}, \nu = 0,49, r = 120 \text{ mm}, h = 5 \text{ mm}, R = 50 \text{ mm})$

Das Problem wurde für verschiedene Belastungsfälle gerechnet. In Tab. 2 sind für $p = 0,01 \frac{N}{mm^2}$ und $q = 0,36 \frac{N}{mm^2}$ die aktuellen Basisvariablen nach jedem Abarbeitungsschritt dargestellt. Die Auswahl der zu

Tabelle 2
Basisvariablen und Zusatzpotential für den 1. Belastungsfall

28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	1	Z=	+9.433634E+02
28	15	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	1	Z=	+8.454402E+02
28	15	16	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	1	Z=	+7.509362E+02
28	15	16	17	32	33	34	35	36	37	38	39	40	1	Z=	+6.608934E+02
28	15	16	17	18	33	34	35	36	37	38	39	40	1	Z=	+5.759645E+02
28	15	16	17	18	19	34	35	36	37	38	39	40	1	Z=	+4.965944E+02
28	15	16	17	18	19	20	35	36	37	38	39	40	1	Z=	+4.230222E+02
28	15	16	17	18	19	20	21	36	37	38	39	40	1	Z=	+3.553181E+02
28	15	16	17	18	19	20	21	22	37	38	39	40	1	Z=	+2.934114E+02
28	15	16	17	18	19	20	21	22	23	38	39	40	1	Z=	+2.371347E+02
28	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	39	40	1	Z=	+1.862698E+02
28	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	40	1	Z=	+1.405776E+02
28	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	1	Z=	+9.982490E+01
28	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	27	1	Z=	+5.907224E+01
28	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	12	27	1	Z=	+4.576965E+00
28	15	16	17	18	19	20	21	22	23	11	12	27	1	Z=	+3.104914E+00
28	15	16	17	18	19	20	21	22	13	11	12	27	1	Z=	+2.323890E+00
28	15	16	17	18	19	20	21	22	13	10	12	27	1	Z=	+8.032218E-01
28	15	16	17	18	19	20	21	9	13	10	12	27	1	Z=	+6.280387E-01
28	15	16	17	18	19	20	11	9	13	10	12	27	1	Z=	+2.800267E-01
28	15	16	8	18	19	20	11	9	13	10	12	27	1	Z=	+1.375669E-01
28	15	3	8	18	19	20	11	9	13	10	12	27	1	Z=	+3.211113E-02
28	17	3	8	18	19	20	11	9	13	10	12	27	1	Z=	+8.357529E-03
28	17	3	8	18	19	20	11	9	13	10	12	27	2	Z=	+2.939005E-03
14	17	3	8	18	19	20	11	9	13	10	12	27	2	Z=	+1.900798E-13

eliminierten Basisvariablen erfolgt unter Beachtung der in 3. erläuterten Kriterien so, daß nach jedem Schritt der Betrag des Zusatzpotentials z verringert wird. Nach Abarbeitung des Zyklus und dem vollständigen Ersatz der Zusatzvariablen ergeben sich für die Kontaktkräfte und die Spiele folgende Werte:

Knoten	Kräfte [N/mm]	Spiele [mm]
1	0	0,00292
2	0,1314	0
3	0,1615	0
4	0	0,00379
5	0	0,01061
6	0	0,01244
7	0	0,00498
8	0,0271	0
9	0,1329	0
10	0,1487	0
11	0,0501	0
12	0,1328	0
13	0,0352	0

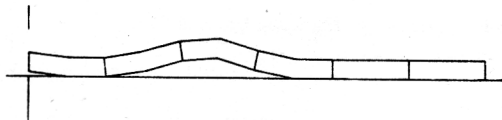


Bild 5
Deformierte Scheibe (1. Belastungsfall) - Verschiebung 400fach vergrößert

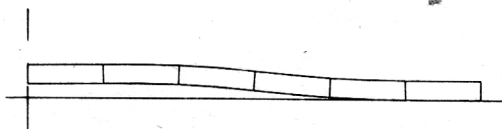


Bild 6
Deformierte Scheibe (2. Belastungsfall) - Verschiebung 40fach vergrößert

Bild 5 zeigt die deformierte Scheibe. Für den zweiten Lastfall ($p = 0,01 \frac{N}{mm^2}$, $\nu = 0,72 \frac{N}{mm^2}$) wird der Elimi-

nationszyklus 14mal durchlaufen. Nach dem letzten Schritt ergibt sich die Verteilung der Basisvariablen:

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 26 12 27 11

Es werden folgende Kräfte bzw. Spiele berechnet:

Knoten	Kräfte [N/mm]	Spiele [mm]
1	0	0,9105
2	0	0,9245
3	0	0,9451
4	0	0,9539
5	0	0,9033
6	0	0,7643
7	0	0,5505
8	0	0,3219
9	0	0,1384
10	0	0,3579
11	0,0324	0
12	0,2950	0
13	0	0,05595

In Bild 6 wird für diesen Fall die Verschiebung des Querschnittes grafisch dargestellt.

Als weiteres Beispiel werden die Kontaktkräfte und die Spiele des in Bild 7 gezeigten Systems berechnet. Ein starrer Stempel drückt mit einer Kraft F auf eine elastische Halbebene. Die Kontaktlinie des Stempels wird durch die Gleichung $y/mm = 0,05 (x/mm)^4$ beschrieben. Damit kann das Problem nicht durch die Hertz'sche Pressung beschrieben werden. Wegen der vorhandenen Symmetrie genügt es, die folgenden Betrachtungen nur für die Hälfte des Systems anzustellen. Im Bereich des möglichen Kontaktes wurden im Abstand von je 0,025 mm 33 Kontaktpunkte angeordnet. Mit einem FEM-Programm wurde für den in Bild 7 schraffiert dargestellten Bereich die (33x33)-Matrix der Einflußzahlen aufgestellt.

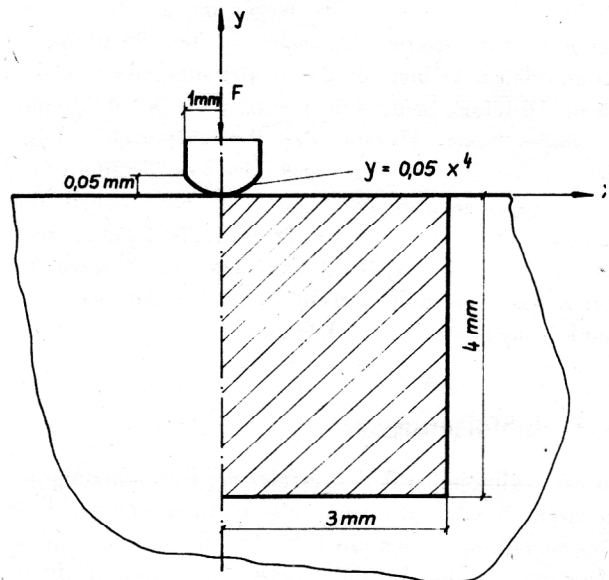


Bild 7
Druck eines starren Stempels auf eine elastische Halbebene ($E = 10^6 \frac{N}{mm^2}$, $\nu = 0,25$)

Die Rechnung erfolgt mit 100 Variablen. Davon sind, in Analogie zum vorherigen Beispiel, die ersten 66 die Kraft- bzw. Verschiebungsvariablen, die Variable 67 die Starrkörperverschiebung des Stempels und die Variablen 68 – 100 die neu eingeführten Zusatzvariablen. Die Krümmung der Stempelunterseite wird durch die Beträge der a_k an den Kontaktpunkten erfaßt.

Bild 8 zeigt die Lösung des Problems für verschiedene Größen F . Das Diagramm gibt eine Gegenüberstellung dieser Werte zu den von Mahmoud, Salamon und Marks in [6] aufgeführten Ergebnissen.

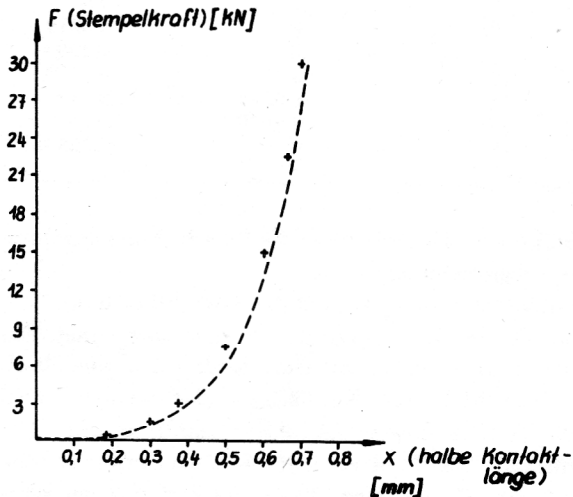


Bild 8
Vergleich der, für das Problem in Bild 7 erhaltenen, Ergebnisse mit den von Mahmoud in [6] angegebenen Werten (gestrichelte Linie)

Die Lösung des Problems erfolgte für verschiedene Beträge der Stempelkraft F . Wegen der zu Beginn vorgenommenen Diskretisierung ist die berechnete halbe Kontaktlänge kleiner als die in [6] angegebene. Dabei ist die Differenz beider Lösungen $\Delta x \leq h$ ($h = 0,025$ mm – vorgegebener Abstand der Kontaktpunkte). Folglich erhöht sich mit der Anzahl der Kontaktpunkte für einen gegebenen Bereich auch die Genauigkeit der Lösung. Die exakte Lösung für die halbe Kontaktlänge ist (bei $F = 30$ kN) 0,699 mm. Die Differenz zu der durch das vorgestellte Verfahren mit 0,7 mm berechneten Lösung beträgt damit 0,41 %.

6. Schlußfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Formulierung des linearen Kontaktproblems als Optimierungsproblem. Dessen Lösung erfolgt mit Hilfe der Phase I des Simplexalgorithmus. Die Vorteile dieses Näherungsverfahrens vor der inkrementalen Methode sind folgende:

1. Ohne vorherige Kenntnis der Kontaktbereiche läßt sich eine eindeutige Lösung in einem formalisierbaren Berechnungsablauf finden.
2. Die Berechnung erfolgt in einer endlichen Anzahl von Lösungsschritten.

3. Eine Erweiterung auf zweiseitigen Kontakt (zweiseitige Verbindung mit Spiel) ist ohne Schwierigkeiten möglich.
4. Eine Formulierung des Problems für allgemeine Probleme, die sich z. B. durch allgemeine Bewegungsmöglichkeiten der beteiligten Körper ausdrücken, ist ohne Schwierigkeiten möglich.

Die Anwendung der Methode auf die behandelten Probleme zeigt, daß diese durchaus konkurrenzfähig mit der inkrementalen Methode ist. Nach Aufstellen der Matrix der Einflußzahlen ist der Rechenaufwand minimal.

LITERATUR

- [1] Oden, J. T.; Pines, E. B.: „Contact Problems with Non-classic Laws”, in „Computers and Structures”, Vol. 19, No. 1 – 2 1984, S. 137 – 147.
- [2] Wong, C. J.: „Application of the Nonlinear Finite Element Method to Contact Problems” in „Computers and Structures”, Vol. 19, No. 3, 1984, S. 315 – 320.
- [3] Rahman, M. V. u. a.; „An Iterative procedure for Finite Element Stress Analysis of Frictional Contact Problems” in „Computers and Structures”, Vol. 18, No. 16, 1984, S. 347 – 354.
- [4] Francavilla, A.; Zienkiewicz, O. C.: „A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems” in „Internat. Journal f. Numerical Methods in Engineering”, Vol. 9, No. 4, 1975, S. 913 – 924.
- [5] Garugel, M. D.: „Direct Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems” in „Intern. Journal f. Numerical Methods in Engineering” Vol. 5, No. 1, 1972, S. 145 – 147.
- [6] Mahmoud, F. F. u. a.: „A Direct Automated Procedure for Frictionless Contact Problems” in „Intern. Journal f. Numerical Methods in Engineering”, Vol. 18, No. 2, 1982, S. 245 – 257.
- [7] Murty, K.: „Linear and Combinational Programming” John Wiley and Sons, New York, 1976.