

# Nichtlineare instationäre Temperaturfeldberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode

Ulrich Gabbert, Hans Baumgarten

## 1. Einleitung

Die Methode der finiten Elemente als universelles Diskretisierungsverfahren wird heute für die Lösung einer Vielzahl komplizierter Problemstellungen der mathematischen Physik und des Ingenieurwesens eingesetzt. Im Ingenieurwesen ist die Methode inzwischen so stark verbreitet, daß nahezu alle Festigkeitsberechnungen an komplizierten Bauteilen mit der FEM durchgeführt werden. Weitere Anwendungsgebiete sind vor allem die Thermodynamik und Strömungsmechanik sowie die Biomechanik, Geomechanik, Elektrostatik und -dynamik u. a. Der weltweit vorhandene und genutzte kommerzielle Softwarebestand ist immens; neben ca. 50 universellen Programmsystemen gibt es einige hundert Spezialprogramme zur Lösung der unterschiedlichsten Aufgabenstellungen [9], [10], [12]. Das im Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik der Technischen Universität „Otto von Guericke“ Magdeburg entwickelte FEM-System COSAR gehört in die Gruppe der universellen Programmsysteme. Es zeichnet sich durch einen großen Leistungsumfang und hohe Nutzerfreundlichkeit aus und ist nach modernen rechentechnischen Gesichtspunkten gestaltet [14], [66], [72]. Es hat eine große Verbreitung in der Industrie erfahren und wird gleichermaßen auch für wissenschaftliche Grundlagenuntersuchungen auf dem Gebiet der FEM genutzt. Als offenes System konzipiert, wird es laufend erweitert und ausgebaut. Die bisher für die industrielle Applikation verfügbare Version COSAR/84 ermöglicht die statische, dynamische und thermische Analyse beliebig gestalteter und belasteter Bauteile, wobei der Zweig zur Temperaturfeldberechnung – COSAR/T84 – nur eine stationäre, lineare Analyse zuläßt. Inzwischen wurde dieses Teilsystem durch das neu geschaffene System COSAR/T86 ersetzt, mit dem sowohl stationäre als auch instationäre Temperaturfeldberechnungen unter Berücksichtigung nichtlinearer Materialeigenschaften und Randbedingungen durchgeführt werden können. Die vorliegende Arbeit enthält die wesentlichen theoretischen Grundlagen und Hinweise zur programmtechnischen Konzeption dieses Systems; an Hand von Test- und Anwendungsbeispielen werden eigene Erfahrungen bei der Lösung instationärer Wärmeleitungsprobleme mitgeteilt. Das Literaturverzeichnis ist eine Zusammenstellung der für die Entwicklung des Programmsystems COSAR/T86 ausgewerteten Arbeiten.

## 2. Grundgleichungen

Aus dem Fourierschen Gesetz und dem Energieerhaltungssatz [3] ergibt sich für ein dreidimensionales, anisotropes Gebiet  $V$  die Differentialgleichung (über kleine lateinische Indizes ist von 1 bis 3 zu summieren):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}) + Q = \mu \frac{\partial T}{\partial t} \text{ in } V \quad (1)$$

die mit den Randbedingungen auf der Oberfläche  $O$

$$T = \bar{T} \text{ auf } O_1 \quad (1a)$$

$$(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}) c_{in} + q_n = 0 \text{ auf } O_2 \quad (1b)$$

$$(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}) c_{in} + \alpha(T - T_\infty) = 0 \text{ auf } O_3 \quad (1c)$$

und der Anfangsbedingung

$$T(t=0) = T_0$$

das Problem vollständig beschreibt. Darin bedeuten:

$T, \bar{T}, T_0, T_\infty$	Temperatur [K], vorgeschriebene Randtemperatur, Anfangstemperaturverteilung, Umgebungstemperatur
$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	Wärmeleitfähigkeitszahlen [W/(mm K)]
$\mu = \rho \cdot c$	Produkt aus Dichte und spezifischer Wärme [Ws/(mm <sup>3</sup> K)]
$\alpha$	Wärmeübergangszahl [W/(mm <sup>2</sup> K)]
$Q$	Wärmequellergiebigkeit [W/mm <sup>3</sup> ]
$q_n$	Wärmestromdichte [W/mm <sup>2</sup> ]
$c_{in} = \cos(x_i, n)$	Richtungskosinus
$x_i$	kartesische Koordinaten [mm]
$t$	Zeit [s]

Da ein klassisches Variationsprinzip nicht existiert [2], wird in der FEM häufig von einer quasi-Variationsformulierung ausgegangen (z. B.: Rosen, Glansdorff, Prigogine, Biot, Gyarmati und andere, siehe z. B. [1], [2], [49], [64]). Entsprechende schwache Formulierungen von (1) lassen sich auf direktem Weg mittels der Methode der gewichteten Residuen ableiten, wobei hier das Galerkinsche Verfahren bevorzugt wird, da es auf mit den quasi-Variationsformulierungen übereinstimmende Beziehungen führt [2], [4].

Für die Temperaturverteilung in  $V$  wird dazu elementweise ein Ansatz der Form

$$T(x_i, t) = \sum_{L=1}^N G_L(x_i) T_L(t) = G(x_i) T(t) \quad (2)$$

eingeführt wird, wobei  $G_L$  die Formfunktionen und  $T_L$  die Temperaturwerte an den  $N$  Knotenpunkten des Elementes sind. Das Galerkinsche Verfahren liefert dann

$$\int_V G_L \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}) + Q - \mu \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0 \quad L=1 \dots N \quad (3)$$

Partielle Integration des ersten Terms in der eckigen Klammer und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert unter Beachtung der Randbedingungen schließlich das folgende Differentialgleichungssystem:

$$KT + C\dot{T} = f \quad (4)$$

mit

$$K = K^\lambda + K^\alpha \quad (4a)$$

$$f = f^\alpha + f^Q - f^q \quad \text{und} \quad (4b)$$

$$K_{LM}^\lambda = \int_V \frac{\partial G_L}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial G_M}{\partial x_j} dV \quad (5a)$$

$$K_{LM}^\alpha = \int_{O_3} \alpha G_L G_M dO \quad (5b)$$

$$C_{LM} = \int_V \mu G_L G_M dV \quad (5c)$$

$$f_L^\alpha = \int_{O_3} \alpha T_\infty G_L dO \quad (5d)$$

$$f_L^Q = \int_V Q G_L dV \quad (5e)$$

$$f_L^q = \int_{O_2} q_n G_L dO \quad (5f)$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Ansatzfunktionen für die Temperatur (2) die Dirichletschen Randbedingungen (1a) erfüllen.

Im allgemeinen muß davon ausgegangen werden, daß die Materialwerte von der Temperatur abhängig sind, so daß das Differentialgleichungssystem (4) nichtlinear ist.

### 3. Zeitintegration

Prinzipiell stehen zwei Methoden zur Ermittlung des Zeitverlaufs der Temperatur zur Verfügung:

- Methode der modalen Superposition, die darauf beruht, daß der Lösungsvektor als Linearkombination der Eigenvektoren des Systems (4) dargestellt werden kann,
- Methode der direkten Zeitintegration, die darauf beruht, daß mittels einer Rekursionsformel der Lösungsvektor zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  aus Lösungsvektoren vorangegangener Zeitpunkte ermittelt wird (step-by-step-solution).

Die modale Superposition ist auf lineare Probleme beschränkt und scheidet daher als allgemeines Lösungsverfahren aus. Es wird jedoch auch im linearen Fall (konstante Materialeigenschaften) kaum angewandt, weil die zunächst notwendige Lösung des Eigenwertproblems von (4) mit einem nicht unbeträchtlichen Rechenaufwand verbunden ist. Die direkte Zeitintegration ist das dominierende Verfahren zur Lösung von (4), wobei in

den meisten FEM-Systemen selbststartende Einschrittverfahren bevorzugt werden. Das Ziel bei der Verfahrensauswahl besteht darin, mit möglichst geringem Aufwand an Rechenzeit und Speicherplatz ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten. Dieser Gesichtspunkt spielt insofern eine besondere Rolle, als davon ausgegangen werden muß, daß das System (4) bei praktischen Aufgabenstellungen aus einigen tausend Gleichungen bestehen kann. Da Mehrschrittverfahren einen wesentlich größeren Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf haben, werden in der vorliegenden Arbeit zunächst Einschrittverfahren benutzt. Ein allgemeines Programmsystem sollte jedoch so konzipiert sein, daß problemlos auch andere Integrationsverfahren implementiert werden können. Übersichten und Vergleiche von unterschiedlichen Verfahren finden sich beispielsweise in [24], [28], [29], [49], [51], [55], [69].

#### 3.1. Einschritt- $\Theta$ -Verfahren

Nachfolgend wird auf der Grundlage der Einschritt- $\Theta$ -Verfahren eine effektive Berechnungsstrategie entwickelt, die eine einheitliche Abarbeitung für lineare und nichtlineare Aufgaben ergibt und sich dadurch von anderen Strategien (z. B. [37]) unterscheidet. Das Ziel besteht darin, aus dem Lösungsvektor zum Zeitpunkt  $t$  den Lösungsvektor zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  zu ermitteln. Dazu wird die Integration von (4) unter Annahme eines Temperaturverlaufs im Zeitintervall von  $t$  bis  $t + \Delta t$  integriert. Wird die Integration unter Nutzung eines Integrationspunktes an der Stelle  $t + \Theta \Delta t$  mit  $\Theta(0,1]$  ausgeführt, ergibt sich das folgende nichtlineare Gleichungssystem (der Index  $\Theta$  besagt, daß die jeweilige Größe zum Zeitpunkt  $t + \Theta \Delta t$  auszuwerten ist):

$$F_\Theta = f_\Theta - C_\Theta \dot{T}_\Theta - K_\Theta T_\Theta = 0 \quad (6)$$

Bei Annahme eines linearen Temperaturverlaufs im Zeitschritt gilt:

$$\dot{T}_\Theta = \frac{1}{\Theta \Delta t} (T_\Theta - T_t) \quad (7)$$

$$T_\Theta = (1 - \Theta) T_t + \Theta T_{t+\Delta t} \quad (8a)$$

$$= T_t + \Delta T_\Theta \quad (8b)$$

Damit läßt sich (6) folgendermaßen schreiben:

$$F_\Theta = f_\Theta + \frac{1}{\Theta \Delta t} C_\Theta T_t - A_\Theta T_\Theta = 0 \quad (9)$$

mit

$$A_\Theta = \frac{1}{\Theta \Delta t} C_\Theta + K_\Theta \quad (10)$$

Die Lösung des nichtlinearen Systems erfordert eine iterative Strategie. Der Startwert für  $T_\Theta$  wird aus (9) mit den Materialdaten am Beginn des Zeitschrittes zum Zeitpunkt  $t$  berechnet (der hochgestellte Index gibt die Nummer der Iteration an):

$$A_t T_\Theta^{(0)} = f_\Theta^{(0)} + \frac{1}{\Theta \Delta t} C_t T_t \quad (11)$$

Setzt man den aus (11) berechneten Lösungsvektor in (9) ein, ergibt sich ein Residuum, das in weiteren Iterationsschritten zu Null gemacht wird. Nach  $i$  Iterationsschritten ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) erhält man eine verbesserte Lösung aus

$$\mathbf{T}_{\Theta}^{(i+1)} = \mathbf{T}_{\Theta}^{(i)} + \Delta \mathbf{T}_{\Theta}^{(i)} \quad (12)$$

Nach Einsetzen dieser Lösung in (9) ergibt sich aus der Taylor-Reihenentwicklung

$$\mathbf{F}_{\Theta}^{(i+1)} = \mathbf{F}_{\Theta}^{(i)} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\Theta}}{\partial \mathbf{T}_{\Theta}} \right|_i \Delta \mathbf{T}_{\Theta}^{(i)} + \dots = 0 \quad (13)$$

bei Abbruch nach der ersten Ableitung mit der Jacobischen Matrix (Tangentenmatrix)

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\Theta}}{\partial \mathbf{T}_{\Theta}} \right|_i = \mathbf{J}_{\Theta}^{(i)} = \left[ \frac{\partial f_{\Theta}}{\partial \mathbf{T}_{\Theta}} + \frac{1}{\Theta \Delta t} \frac{\partial \mathbf{C}_{\Theta}}{\partial \mathbf{T}_{\Theta}} \mathbf{T}_t - \mathbf{A}_{\Theta} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\Theta}}{\partial \mathbf{T}_{\Theta}} \mathbf{T}_{\Theta} \right]_i \quad (14)$$

folgendes Gleichungssystem zur Ermittlung von  $\Delta \mathbf{T}_{\Theta}^{(i)}$ :

$$\mathbf{J}_{\Theta}^{(i)} \Delta \mathbf{T}_{\Theta}^{(i)} = -\mathbf{F}_{\Theta}^{(i)} \quad (15)$$

Die Iteration im Zeitschritt entspricht dem Newton-Raphson-Verfahren, das in dieser Form mit einem extrem hohen Rechenaufwand verbunden ist, da in jedem Iterationsschritt das Gleichungssystem (15) mit der unsymmetrischen Jacobischen Matrix neu aufgebaut und gelöst werden muß. Dieser Nachteil wird überwunden, wenn man mit einer linearisierten Jacobischen Matrix rechnet, die am Anfang des Zeitschrittes bestimmt und für alle Iterationen innerhalb des Zeitschrittes (und gegebenenfalls auch für weitere Zeitschritte) konstant gehalten wird. Damit ergibt sich aus (14) folgende Sekanten-näherung für die Jacobische Matrix

$$\mathbf{J}_{\Theta}^{(i)} = -\mathbf{A}_t \quad (16)$$

die zu der wesentlich effektiveren Iterationsstrategie

$$\mathbf{A}_t \Delta \mathbf{T}_{\Theta}^{(i)} = \mathbf{F}_{\Theta}^{(i)} \quad (17)$$

führt. In jedem Iterationsschritt ergibt sich die Lösung durch Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen mit einem neuen Residuenvektor  $\mathbf{F}_{\Theta}^{(i)}$  nach Gleichung (9). Die Berechnung des Residuenvektors kann elementweise erfolgen, wobei der Aufbau der Systemmatrizen  $\mathbf{C}_{\Theta}$  und  $\mathbf{K}_{\Theta}$  vermieden wird. Die Iteration wird beendet, wenn ein Abbruchkriterium (z. B. Zuwachs oder Residuum kleiner als eine bestimmte Fehlerschranke) erfüllt ist. Bei praktischen Rechnungen hat es sich bewährt, die Iteration abubrechen, wenn die Euklidische Vektornorm des Temperaturzuwachses eine mit der Norm des Temperaturvektors gewichtete Fehlerschranke  $\epsilon$  unterschreitet:

$$\|\Delta \mathbf{T}_{\Theta}^{(i)}\| < \epsilon \|\mathbf{T}_{\Theta}^{(i+1)}\| \quad (18)$$

Die vorgeschlagene Strategie führt, wie Bild 1 zu entnehmen ist, zu einem einheitlichen Berechnungsablauf für lineare und nichtlineare Probleme. Auf das explizite Verfahren  $\Theta = 0$ , bei dem sich einige Abweichungen bei den Formulierungen ergeben, wird hier nicht näher ein-

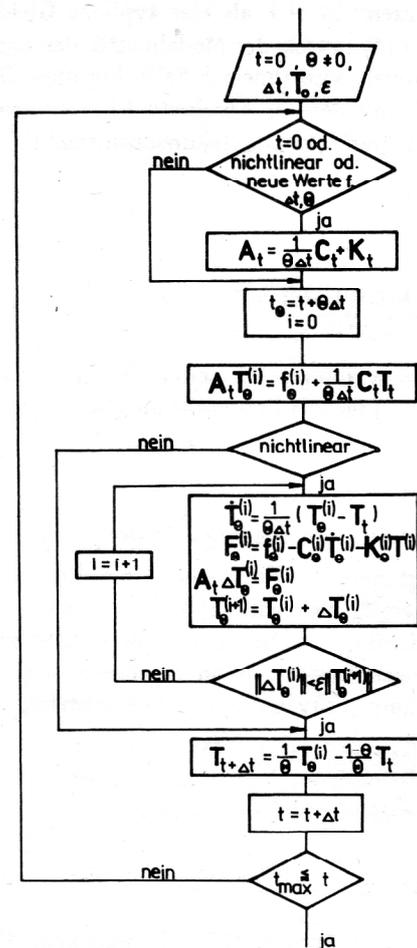


Bild 1  
Einheitlicher Berechnungsablauf der Zeitintegration für die Einschritt- $\Theta$ -Verfahren ( $\Theta \neq 0$ ) bei linearen und nichtlinearen Problemen

gegangen. Die Stabilitätsgrenze dieses nur bedingt stabilen Verfahrens erfordert im Vergleich zu den unbedingt stabilen impliziten Verfahren mit  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  sehr viel kleinere Zeitschritte, so daß es trotz numerischer Vorteile nur in Ausnahmefällen genutzt wird.

Die praktischen Erfahrungen bei der Lösung nichtlinearer Probleme zeigen, daß in der Regel im Zeitschritt nicht mehr als 3 bis 4 Iterationen benötigt werden (siehe Abschnitt 7.). Bei einigen im Rahmen von Testuntersuchungen gelösten Beispielen mit extremen Nichtlinearitäten (z. B. Strahlung mit ungünstigen Materialparametern und extremem Unterschied zwischen Bauteil- und Umgebungstemperatur) war eine Konvergenz nur dadurch zu erreichen, daß auch in jedem Iterationsschritt ein Neuaufbau der Matrix  $\mathbf{A}$  durchgeführt wurde, d. h. statt mit  $\mathbf{A}_t$  mußte mit  $\mathbf{A}_{\Theta}$  gerechnet werden.

### 3.2. Stabilität und Genauigkeit

Die Konsistenz und Konvergenz der FEM-Lösung für den Fall, daß die Maschenweite  $l$  und das Zeitinkrement  $\Delta t$  nach Null gehen, ist theoretisch gesichert (siehe z. B. [28], [46], [51], [56]). Für die Stabilitätsuntersuchung reicht es aus, eine Differentialgleichung der Form

$$\omega \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{r} \quad (19)$$

zu betrachten, die sich als eine typische Gleichung ergibt, wenn (4) mittels der Modalmatrix der Eigenvektoren entkoppelt wird (linearer Fall). Für diese Gleichung ergibt sich mit dem in Abschnitt 3.1. angegebenen Iterationsverfahren folgende Rekursionsformel [5]:

$$T_{t+\Delta t} = A T_t + \dots \quad (20)$$

mit

$$A = \frac{1 - \omega \Delta t (1 - \Theta)}{1 + \omega \Delta t \Theta} \quad (21)$$

Das Lösungsverfahren ist stabil für  $|A| \leq 1$ . Daraus folgt mit (21) für den Zeitschritt die Bedingung

$$\Delta t_s \leq \frac{2}{\omega(1-2\Theta)} \quad (22)$$

Für alle  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  ist das gewählte Integrationsverfahren „unbedingt stabil“, d. h., auch bei beliebig großen Zeitschritten ergibt sich ein stabiles Lösungsverhalten. Dabei ist allerdings zu beachten, daß es zu Oszillationserscheinungen kommt, wenn A negativ wird (die sich aus Gleichung (20) ergebende Zeitschrittfolge verdeutlicht das:  $T_{t+n\Delta t} = (-1)^n |A|^n T_t + \dots$ ).

Um Oszillationen zu vermeiden, ist folgende Bedingung für die Zeitschrittweite einzuhalten:

$$\Delta t_o \leq \frac{1}{\omega(1-\Theta)} \quad (23)$$

Dabei ist in (22) und (23) der maximale Eigenwert  $\omega$  der Matrix  $C^{-1}K$  einzusetzen (siehe Abschnitt 3.3.). Um die Lösungsgenauigkeit abschätzen zu können, wird in (19) für  $\dot{T}$  der Differenzenquotient  $\dot{T} = (T_{t+\Delta t} - T_t)/\Delta t$  eingesetzt und eine Taylor-Reihenentwicklung für  $t + \Theta \Delta t$  vorgenommen. Es ergibt sich

$$\omega T_\Theta + \dot{T}_\Theta + \left[ \frac{1}{2} \ddot{T}_\Theta (1-2\Theta) \Delta t + \frac{1}{6} \ddot{\ddot{T}}_\Theta (1-3\Theta+3\Theta^2) \Delta t^2 + \dots \right]_{t=\Theta} \quad (24)$$

Daraus ist zu erkennen, daß alle Verfahren  $\Theta \neq \frac{1}{2}$  eine Genauigkeit erster Ordnung haben und die zentrale Differenzenformel (auch als Crank-Nicolson-Verfahren bezeichnet) mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung ein Superkonvergenzverhalten aufweist.

### 3.3. Wahl der Schrittweite

Die Aussagen in Abschnitt 3.2., die unter der Voraussetzung linearen Materialverhaltens abgeleitet wurden, gelten auch bei nichtlinearen Problemen, wenn entsprechend dem in Abschnitt 3.1. angegebenen Sekantenverfahren die Iteration am Zeitschritt  $t + \Theta \Delta t$  erfolgt, wobei der maximale Eigenwert aus  $\omega_{\max}(C_\Theta^{-1}K_\Theta)$  zu ermitteln ist.

Mit (22) bzw. (23) lassen sich Aussagen über die Zeitschrittweite gewinnen. Eine exakte Ermittlung des maximalen Eigenwertes  $\omega_{\max}(C^{-1}K)$  scheidet wegen des damit verbundenen hohen numerischen Aufwandes für praktische Schrittweitenabschätzungen aus. Aus diesem Grund wird hier ein anderer Weg vorgeschlagen, der auf folgender Abschätzung des maximalen Eigenwertes basiert. Für die Abschätzung des maximalen bzw. minimalen

Eigenwertes einer aus Elementmatrizen  $A_e$  aufgebauten Systemmatrix A gilt (Beweis siehe [16], [17]):

$$\omega_{\min}(A) \geq \min_e [\omega_{\min}(A_e)] \quad (25)$$

$$\omega_{\min}(A) \leq p_{\max} \cdot \max_e [\omega_{\max}(A_e)] \quad (26)$$

$p_{\max}$  – maximale Anzahl von finiten Elementen, die an einem Knoten zusammentreffen.

Damit ergibt sich aus

$$\omega_{\max}(C^{-1}K) = \frac{\omega_{\max}(K)}{\omega_{\min}(C)} \quad (27)$$

unter Nutzung der Abschätzungen (25), (26) die Formel

$$\omega_{\max}(C^{-1}K) \leq \frac{\max_e [\omega_{\max}(K_e)]}{\min_e [\omega_{\min}(C_e)]} p_{\max} \quad (28)$$

so daß beispielsweise die Schrittweite  $\Delta t_o$  nach Gleichung (23) folgendermaßen abgeschätzt werden kann:

$$\Delta t_o \leq \frac{\min_e [\omega_{\min}(C_e)]}{\max_e [\omega_{\max}(K_e)] (1-\Theta) p_{\max}} \quad (29)$$

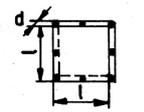
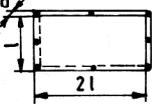
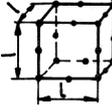
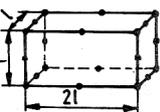
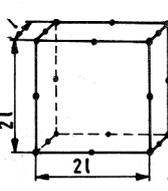
Die Ermittlung des maximalen Eigenwertes der Systemmatrix  $C^{-1}K$  ist damit zurückgeführt auf die Ermittlung des maximalen bzw. minimalen Eigenwertes der Elementmatrizen  $K_e$  bzw.  $C_e$ . Damit ist eine Vorherbestimmung der Schrittweite nach (22) bzw. (23) mit geringem Aufwand (z. B. während der Datengenerierung) möglich. Für typische Elementformen lassen sich natürlich auch vorab entsprechende Berechnungen ausführen. Für einige in COSAR implementierte Elemente sind die Ergebnisse in Bild 2 zusammengestellt. Daraus ergibt sich für gleichmäßig vernetzte Gebiete, deren Elementabmessungen durch  $l$  bestimmt sind, aus (29) folgende einfache zu handhabende Formel für die Schrittweitenabschätzung:

$$\Delta t_o \leq a \frac{\mu l^2}{\lambda (1-\Theta) p_{\max}} \quad (30)$$

wobei  $a$  von der Form und der Größe der Elemente abhängt und vorab für die verwendeten Elemente bestimmt werden muß (siehe Bild 2).

Die Gleichung (30) zeigt, daß die Schrittweite sowohl von den Materialwerten als auch von der Vernetzung abhängt. Zu beachten ist jedoch, daß bei der Ableitung davon ausgegangen wurde, daß die hochfrequenten Anteile des Eigenwertspektrums das Lösungsverhalten entscheidend bestimmen. Das ist jedoch nur bei impulsartig wirkenden Belastungen und Randbedingungen (z. B. Thermoschock) in einem sehr kleinen Zeitbereich der Fall. Außerhalb dieses Bereiches kann mit wesentlich größeren Zeitschritten gerechnet werden.

Das explizite Verfahren  $\Theta = 0$  (Eulersches Verfahren) hat wesentliche numerische Vorteile, insbesondere dann, wenn mit einer durch einen Kondensationsprozeß (z. B. Bildern der Zeilensumme) gewonnenen Kapazitätsmatrix C gerechnet wird (Lösen des Gleichungs-

Element	$\omega_{\min} (C_e)$	$\omega_{\max} (K_e)$	$\alpha$
	$0,08 \mu A l$	$8 \lambda \frac{A}{l}$	0,01
	$0,0133 \mu l^2 d$	$5,33 \lambda d$	0,0025
	$0,0133 \mu l (2l) d$	$8,28 \lambda d$	0,0032
	$0,00735 \mu l^3$	$3,33 \lambda l$	0,0022
	$0,00735 \mu l^2 (2l)$	$5,33 \lambda l$	0,0028
	$0,00735 \mu l (2l)^2$	$8,6 \lambda l$	0,0034

**Bild 2**  
Eigenwerte einiger in COSAR/T86 verfügbarer finiter Elemente

systems entfällt!). Die Stabilitätsgrenze (22) zwingt jedoch im Vergleich zu den unbedingt stabilen, impliziten Verfahren  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  zu extrem kleinen Schrittweiten, so daß  $\Theta = 0$  für praktische Rechnungen nicht zu empfehlen ist. Lediglich für Untersuchungen im Kurzzeitbereich mit starken Nichtlinearitäten, die sehr kleine Zeitschritte erfordern, stellt es eine Alternative dar. Das Verfahren  $\Theta = 1$  (Rückwärtsdifferenzenverfahren) zeigt auch bei großen Zeitschritten kein Oszillationsverhalten, liefert aber im Vergleich zu  $\Theta = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  etwas ungenauere Lösungen. Das Verfahren  $\Theta = \frac{1}{2}$  (Crank-Nicolsonsches Verfahren) hat als Verfahren zweiter Ordnung die höchste Genauigkeit, ergibt aber bei zu großen Zeitschritten und sprungartigen Temperaturänderungen stark oszillierende Lösungen. Im Langzeitbereich bei einem ausgeglichenen Temperaturverlauf hat dieses Verfahren Vorteile. Mit  $\Theta = \frac{2}{3}$  steht eine optimale Variante zur Verfügung, die relativ unempfindlich gegen zu große Schrittweiten und bezüglich der Genauigkeit kaum schlechter als  $\Theta = \frac{1}{2}$  ist. Mit  $\Theta = \frac{2}{3}$  wird die exakte Lösung über ein großes Schrittweitspektrum gut angenähert; es hat sich bei einer Vielzahl praktischer Rechnungen bewährt. Die Testbeispiele (siehe auch Abschnitt 7.) haben weiter gezeigt, daß die Verfahren mit  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  auch bei Thermoschockproblemen mit Schrittweiten, die ein Vielfaches (z. B. das Hundertfache) des durch (23)

bestimmten Wertes betragen, genaue Ergebnisse liefern, wobei das für diese Fälle typische Oszillieren nach einigen Zeitschritten abklingt und eine gute Annäherung an die exakte Lösung festzustellen ist. Eine automatische Schrittweitenanpassung während des Integrationsprozesses kann so erfolgen, daß die maximale Temperaturänderung an einem Knoten eine vorgegebene obere Schranke nicht überschreitet und eine andere untere Schranke nicht unterschreitet [44], [61]. Falls die Temperaturänderung das vorgegebene Intervall unter- bzw. überschreitet, erfolgt eine entsprechende Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Zeitschrittweite, wobei dann bei den impliziten Verfahren ein erneutes Aufbauen und Dreieckszerlegen der Matrix A erforderlich ist.

### 3.4. Wahl der Vernetzung

Nur durch Reduzieren der Zeitschrittweite kann die Genauigkeit nicht beliebig gesteigert werden. Vielmehr müssen die Zeit- und Raumdiskretisierung in einem ausgewogenen Verhältnis stehen. Die Verkleinerung des Zeitschrittes verringert zwar das Oszillieren von Zeitschritt zu Zeitschritt, führt aber bei nicht angepaßter Vernetzung zu räumlichen Oszillationen (Schwankungen im Lösungsverhalten von Knoten zu Knoten) und damit ebenfalls zu ungenauen Ergebnissen. Diese Erscheinungen sind vor allem in der Nähe der Bauteiloberfläche typisch, die mit impulsartig wirkenden Randbedingungen (Thermoschockprobleme) beaufschlagt werden. In [48] wird vorgeschlagen, die erste Elementschicht so anzuordnen, daß die Abmessung senkrecht zur Oberfläche der Eindringtiefe der Temperaturänderung nach dem ersten Zeitschritt entspricht. Dabei ist eine Netzverfeinerung hin zum Rand in Form einer geometrischen Reihe optimal [43]. Die Eindringtiefe hängt von der Art der Randbedingung ab und läßt sich für eine Halbebene problemlos abschätzen. Dazu wird für quadratische Elemente eine quadratische Verteilung der Temperaturänderung im Element angenommen (außerhalb des Elementes ist die Temperaturänderung Null). Damit ergeben sich folgende Eindringtiefen (vergleiche auch [53]):

a) vorgeschriebene Randtemperatur  $\bar{T}$ :

$$l_e = \sqrt{12 \frac{\lambda}{\mu} \Delta t} \quad (31)$$

b) vorgeschriebene Wärmestromdichte  $q_n$ :

$$l_e = \sqrt{6 \frac{\lambda}{\mu} \Delta t} \quad (32)$$

c) Wärmeübergang  $\alpha, T_\infty$ :

$$l_e = 3 \frac{\alpha}{\mu} \Delta t \quad (33)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß beim Wärmeübergang die Matrix (5b) in die Wärmeleitfähigkeitsmatrix eingearbeitet wird, so daß bei einer großen Wärmeübergangszahl für die Eigenwertabschätzung nach (28) eine um (5b) erweiterte Elementmatrix maßgebend werden kann. Diese Tatsache spiegelt sich in Formel (33) wider.

Bei einer gegebenen Vernetzung lassen sich die Beziehungen (31), (32) und (33) auch zur Abschätzung der Schrittweite benutzen. Testrechnungen zeigen, daß sich praktikable Schrittweiten für  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  ergeben, die in einem ausgewogenen Verhältnis zur Abmessung der Elemente stehen, so daß räumliche Oszillationen vermieden werden; zeitliche Oszillationen klingen nach wenigen Zeitschritten ab.

Insbesondere bei den Randbedingungen b) und c) kann es bei zu großen Zeitschritten an der Oberfläche zu starken Oszillationen kommen. In [51] wird zur Verringerung der Oszillationsamplitude vorgeschlagen, die Randbedingung nicht in Form einer Diracschen Deltafunktion aufzubringen, sondern über mehrere Zeitschritte gleichmäßig ansteigen zu lassen. Um das Lösungsverhalten nicht zu stark zu beeinflussen, ist es dabei jedoch erforderlich, die Rechnung bereits bei  $t < 0$  zu beginnen und für die Interpolation nur wenige Zeitschritte zu benutzen (in [51] wird mit  $t_0 = -\frac{1}{2} \Delta t$  und einer Interpolation über 2 Zeitschritte gearbeitet). Als Alternative zu diesem Verfahren wird hier vorgeschlagen, den Startvektor für die Randknoten so festzulegen, daß er der zu erwartenden Lösung in diesem Gebiet entspricht. Die Knotentemperaturen werden dazu näherungsweise mittels der Halbraumlösung des jeweiligen Randbedingungsfalles (z. B. [3]) für  $t = \Theta \Delta t$  bestimmt. Testrechnungen zeigen, daß die Lösungen mit so angepaßtem Startvektor geringere Oszillationsamplituden aufweisen.

### 3.5. Hinweis zur stationären Wärmeleitung

Bei stationären Problemen ist die Temperatur unabhängig von der Zeit, so daß (4) übergeht in das Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (34)$$

Bei temperaturunabhängigen Materialdaten und Randbedingungen ist (34) ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung unproblematisch ist. Im nichtlinearen Fall ist eine iterative Lösungsstrategie erforderlich. Im Programmsystem COSAR hat sich das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren bewährt [71], so wie es im instationären Fall zur Iteration innerhalb eines Zeitschrittes benutzt wird (siehe Abschnitt 3.1. und Bild 1).

### 3.6. Berücksichtigung der Strahlung

Die Berücksichtigung der Strahlungsrandbedingung nach dem Stephan-Boltzmannschen Gesetz liefert als Randbedingung

$$\left( \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)_{c_{in}} + \epsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4) = 0 \quad \text{auf } O_4 \quad (35)$$

Dabei ist  $\epsilon$  das Strahlungsaustauschverhältnis und  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$  die Strahlungskonstante; weiterhin ist zu beachten, daß in die Gleichung (35) die absoluten Temperaturen in Grad Kelvin gemessen eingehen. Neben dem Strahlungsaustausch mit der Umgebung ist ein gegenseitiger Strahlungsaustausch einzelner Teilflächen eines Bauteils vorhanden. Gegenwärtig

ist im Programmsystem COSAR nur der durch (35) gegebene Strahlungsaustausch mit der Umgebung realisiert; die Grundlagen für die Berücksichtigung des gegenseitigen Strahlungsaustausches sind in [71] zusammengestellt. Durch die Randbedingung (35) ergibt sich eine hochgradige Nichtlinearität, die zu erheblichen numerischen Problemen führen kann. Testrechnungen haben ergeben, daß es günstig ist, die Strahlungsrandbedingung (35) in Form des Wärmeübergangs (1c) unter Verwendung der temperaturabhängigen  $\alpha$ -Zahl

$$\alpha(T) = \epsilon \sigma (T^2 + T_\infty^2) (T + T_\infty) \quad (36)$$

zu erfassen (siehe auch [21], [54]). Damit ergibt sich ein wesentlich stabileres Lösungsverhalten (insbesondere auch bei stationären Problemen) als wenn der Strahlungsterm in der Form der Randbedingung (1b)

$$q_n(T) = \epsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4) \quad (37)$$

nur auf der rechten Seite des nichtlinearen Gleichungssystems berücksichtigt wird.

## 4. Finite-Elemente-Basis

Im Programmsystem COSAR stehen zunächst die in Bild 3 angegebenen finiten Elemente für Temperatur-

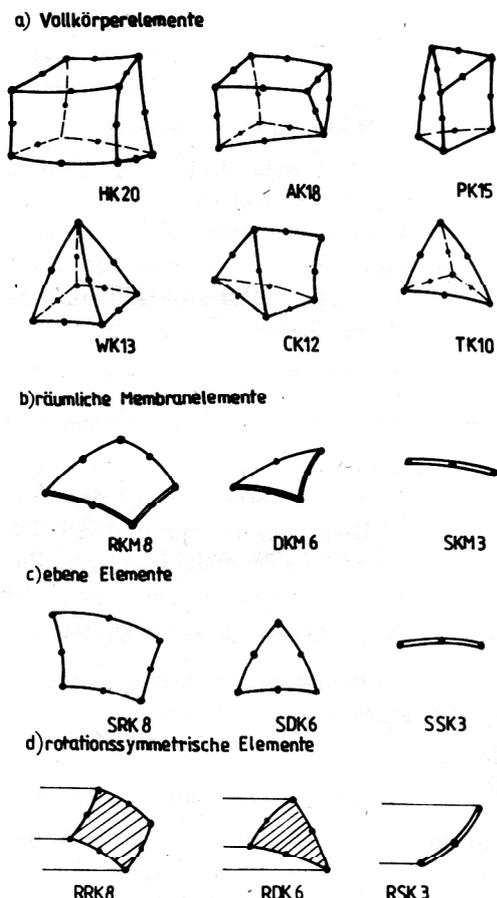


Bild 3  
Elementkatalog des Programmsystems COSAR/T86

feldberechnungen zur Verfügung. Es handelt sich dabei durchgängig um isoparametrische Elemente mit quadratischen Formfunktionen für die Interpolation der Temperaturverteilung im Element [62]. Die Elemente sind geometrisch und topologisch identisch mit entsprechenden Elementen des COSAR-Systems für statische und dynamische Berechnungen [14], [66]. Dadurch wird erreicht, daß mit identischen FE-Netzen Temperaturfeld- und Festigkeitsberechnungen durchgeführt werden können, wobei die ermittelten Temperaturverteilungen als thermische Lastfälle direkt übernommen werden können. Die so in COSAR realisierte Berechnung von Wärmespannungen und -verformungen stellt eine quasistationäre Lösung dar, bei der davon ausgegangen wird, daß die Differentialgleichungen, die das Wärmeleitungs- und Festigkeitsproblem beschreiben, entkoppelt sind. Für die im Rahmen der COSAR-Applikation vorgesehene Aufgabenstellung kann diese Voraussetzung aus folgenden Gründen als erfüllt angesehen werden:

- Die Temperaturänderungen verlaufen so langsam, daß in den Bewegungsgleichungen der Einfluß der Beschleunigung vernachlässigt werden kann. Der Ablauf der „Bewegung“ (infolge der thermischen Einflüsse) kann somit als Abfolge einzelner Gleichgewichtszustände angesehen werden.
- Die Verformungen durch äußere Lasten und durch ein veränderliches Temperaturfeld führen nur zu sehr geringen Temperaturänderungen, so daß dieser Einfluß ebenfalls vernachlässigt werden kann.

Weiterhin stehen für die im Bild 3 angegebenen Elemente die umfangreichen automatischen Datengenerierungsmöglichkeiten des COSAR-Systems zur Verfügung [14].

### 5. Substrukturtechnik

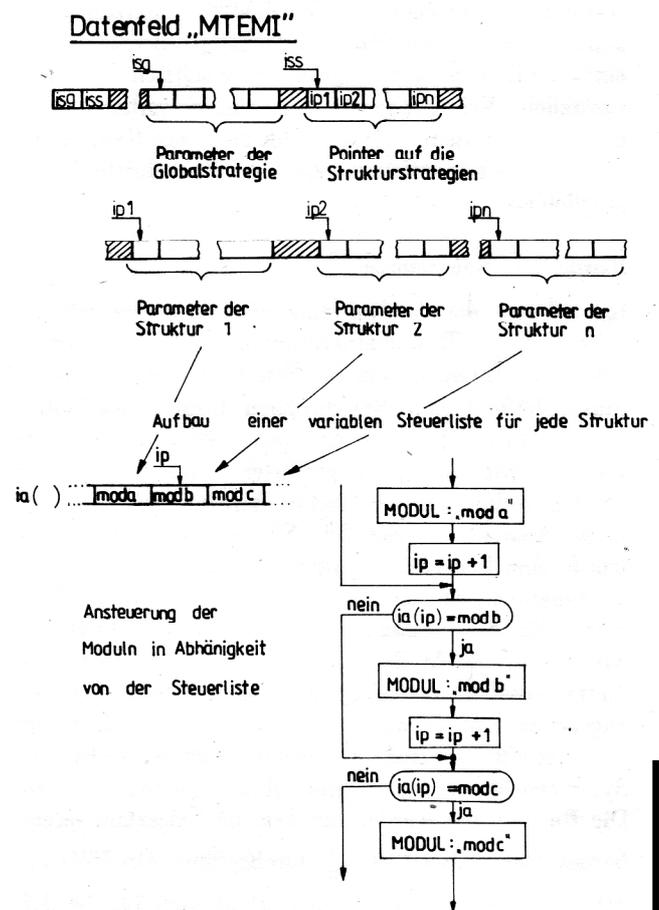
Die vollständige Kompatibilität mit dem COSAR-System zur statischen und dynamischen Bauteilberechnung macht die Nutzung der Substrukturtechnik auch für instationäre Temperaturfeldberechnungen erforderlich. Das bedeutet, daß in einem Zeitschritt eine Schleife über alle Substrukturen (analog beispielsweise zur Elastostatik [5]) abzuarbeiten ist, um strukturweise die lokalen Freiheitsgrade zu eliminieren. Da im nächsten Zeitschritt der vollständige Temperaturvektor des letzten Zeitschrittes (Temperaturen an den lokalen und den externen Knoten!) benötigt wird, ist in jedem Zeitschritt auch eine vollständige Rückrechnung erforderlich. Bei instationären Problemen ist die programmtechnische Realisierung der Substrukturtechnik mit einem erhöhten organisatorischen Aufwand verbunden.

Neben Vorteilen bei der Datengenerierung ergeben sich durch die Nutzung der Substrukturtechnik speziell bei nichtlinearen Problemen dann Vorteile, wenn die Nichtlinearitäten auf wenige Teilstrukturen beschränkt sind, so daß ein Neuaufbau der Systemmatrizen nur jeweils für diese Strukturen erforderlich ist. Das trifft insbesondere bei nichtlinearen Randbedingungen zu, wo es dann zweckmäßig ist, nur die betroffenen Randelemente in einer Struktur zusammenzufassen.

### 6. Programmtechnische Konzeption

Die programmtechnische Konzeption des Systems COSAR/T86 basiert auf dem Grundkonzept des COSAR-Systems (siehe [5], [14], [72]) und soll hier nicht im Detail dargestellt werden. Im Unterschied zu den bisher fertiggestellten Teilsystemen Elastostatik, Dynamik und stationäre Temperaturfelder [14] waren bei der instationären, nichtlinearen Temperaturfeldberechnung zusätzliche Maßnahmen zur Realisierung der vielfältigen Varianten der Ablaufsteuerung erforderlich. Etwa 50 globale Parameter definieren die Abarbeitungsstrategie und den Abarbeitungszustand einer instationären Temperaturfeldberechnung; dazu gehören unter anderem Parameter zur Beschreibung der

- Integrations- und Iterationsverfahren
- Zeit- und Iterationsschritte
- Fehlerschranken und Abbruchsteuergrößen
- Charakteristiken der Materialeigenschaften, Randbedingungen und Belastungen
- Abbruch- und Wiederanlaufstrategien
- Maßnahmen für nachfolgende Abarbeitungsschritte (Festigkeitsrechnungen, Gradientenbildung, grafische Auswertungen)
- Steuerung der Ergebnisausgabe
- Konditionen im aktuellen Berechnungsschritt (Konvergenz, Stabilität).



**Bild 4** Prinzipieller Aufbau des Datenfeldes MTEMI zur Aufnahme der für die Beschreibung einer instationären Temperaturfeldberechnung benötigten Parameter und Realisierung einer variablen Abarbeitungsstrategie

Typisch ist es, daß die während der Berechnung erreichten bzw. eingetretenen Bedingungen zu Änderungen in den Parametern führen. Mit Hilfe der Parameter wird eine Liste aufgebaut, die den Berechnungsablauf im jeweiligen Zeit- bzw. Iterationsschritt steuert (Bild 4). Um die Vorteile der Substrukturtechnik auszunutzen zu können, muß es möglich sein, für jede Substruktur einen individuellen Berechnungsablauf festzulegen. Das wird dadurch erreicht, daß für jede Substruktur zusätzliche Parameter definiert werden können, die globale Parameter überschreiben und zu einem anderen Aufbau der Steuerliste führen (siehe Bild 4).

Durch eine variable, erweiterbare Daten- und Programmstruktur (interne Schnittstellen) und eine allgemeine Strategie der Steuerung des Berechnungsablaufes wird in Verbindung mit dem COSAR-Datenverwaltungssystem (virtueller Speicher, Paging-System) eine hohe Flexibilität sowohl bei der Lösung komplizierter praktischer Problemstellungen als auch bei der Implementierung und Testung neuer Berechnungsstrategien und anderer Erweiterungen (z. B. Elemente) erreicht.

## 7. Beispiele

Mit der Fertigstellung der Programmversion COSAR/T86 wurden neben einer großen Zahl von Testrechnungen auch erste Anwendungsrechnungen durchgeführt. Die folgende Auswahl sowohl linearer als auch nichtlinearer Wärmeleitungsprobleme verdeutlicht die Einsatzmöglichkeiten dieses Teilsystems. Sie bestätigt aber auch, daß eine Zeitdiskretisierung gegenüber der statischen Analyse zusätzliche Erfahrungen des Anwenders verlangt, ohne die ein vertretbarer Kompromiß zwischen Genauigkeit und Berechnungsaufwand (Zahl der Zeitschritte) kaum möglich ist.

### Beispiel 1: Betonstütze

Im Rahmen der Analyse eines Brandschadens war die zeitabhängige Temperaturverteilung in einer Betonstütze von Interesse, um die Beanspruchung der in der Stütze befindlichen Bewehrungen infolge der hohen Randtemperaturen genauer einschätzen zu können. Da zunächst nur ein ungestörter Bereich untersucht werden sollte, war ein ebenes Berechnungsmodell für diese Analyse ausreichend. Für die erste Rechnung wurde eine konstante Randtemperatur von  $\bar{T} = 850^\circ\text{C}$  angenommen, für eine zweite Rechnung standen Meßwerte für den zeitabhängigen Randtemperaturverlauf zur Verfügung. In Bild 5 sind die wesentlichen Parameter zusammengestellt und das gewählte 2D-Netz angegeben. Auf Grund der doppelten Symmetrie genügt die Vernetzung eines Querschnittviertels, wobei die Symmetrielinien als wärmeisoliert (adiabat) gelten. Die Rechnungen wurden mit dem im Programm vereinbarten Standardwert  $\Theta = \frac{2}{3}$  durchgeführt. Mit Hilfe der Schrittweitenabschätzung (30) erhält man für die dargestellte Vernetzung einen Wert von  $\Delta t = 0,25$  s. Gleichung (31) liefert bei der vorgegebenen Elementgröße einen etwa fünfzigmal größeren Wert. In Abschnitt 3.3. wurde bereits darauf hingewiesen, daß Gleichung (30) im allgemeinen eine sehr pessimistische Abschätzung

darstellt. Das Ziel besteht darin, mit einem minimalen Kostenaufwand (d. h. mit einer möglichst geringen Anzahl von Zeitschritten) die Ergebnisse mit der gewünschten Genauigkeit zu erhalten. Man wird daher zunächst mit wesentlich größeren Schrittweiten arbei-

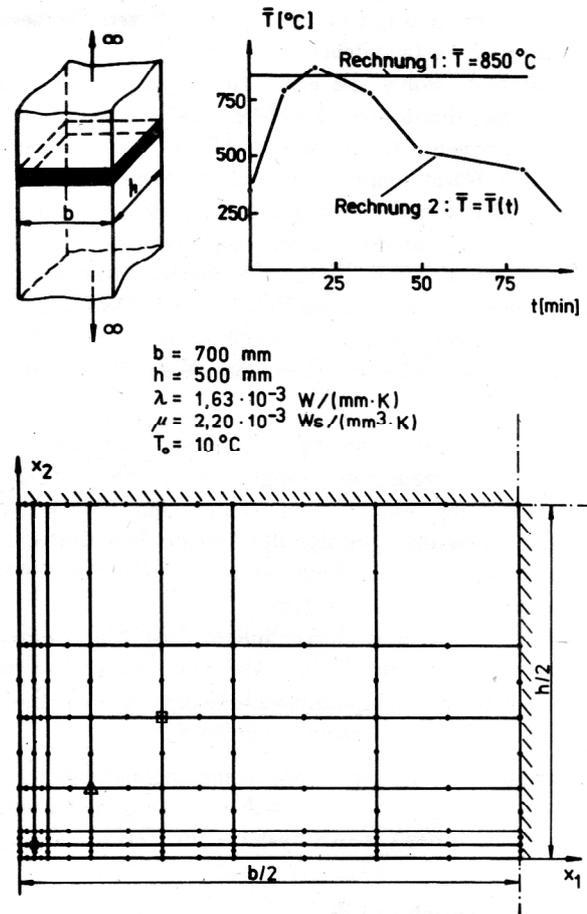


Bild 5  
Ebenes Berechnungsmodell für eine Betonstütze mit vorgeschriebenen Randtemperaturwerten

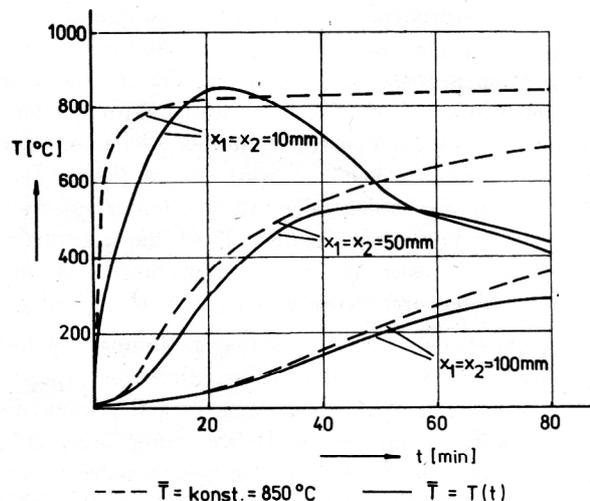


Bild 6  
Zeitabhängiger Temperaturverlauf in drei unterschiedlichen Tiefen des Stützenquerschnittes bei konstanter bzw. zeitlich veränderlicher Randtemperatur

ten, wobei es zweckmäßig ist, durch Rechnungen mit unterschiedlichen Schrittweiten die Richtigkeit der gewonnenen Ergebnisse abzusichern. Dazu reicht es aus, einen vergleichsweise kurzen Zeitbereich zu untersuchen, der es gestattet, eine effektive Schrittweite (bzw. Schrittweitenintervalle) für den gesamten Berechnungsprozeß festzulegen. Als Beispiel sind nachfolgend für die Rechnung 2 (zeitabhängige Randtemperatur) die Temperaturwerte der drei im Bild 5 markierten Punkte der Vernetzung nach  $t = 10$  min angegeben:

$x_1, x_2$ [mm]	$\Delta t = 20$ s	$\Delta t = 120$ s
10	678,34 °C	677,06 °C
50	95,20 °C	97,70 °C
100	12,77 °C	13,30 °C

Für die im Rahmen dieser Aufgabenstellung durchzuführenden Rechnungen mit vergleichsweise geringen Genauigkeitsanforderungen auf Grund der Unsicherheit der Meßwerte hat sich nach derartigen Tests eine Schrittweite von  $\Delta t = 120$  s als ausreichend erwiesen. In Bild 6 ist der Temperaturverlauf in drei unterschiedlichen Tiefen des Querschnittes bei konstanter Randtemperatur und bei zeitabhängiger Randtemperatur angegeben.

### Beispiel 2: Zylinderkopf

Umfangreiche Untersuchungen zum Festigkeitsverhalten von Zylinderköpfen waren der Anlaß, auch instationäre Wärmespannungen in die Bewertung einzubeziehen. Ein erster Schritt hierfür war die Berechnung des instationären Temperaturfeldes unter der Voraussetzung konstanter Materialwerte und zeitunabhängiger Belastungen. Auf diese Weise war es möglich, die Genauigkeit der Ergebnisse anhand einer bereits durchgeführten stationären Temperaturfeldberechnung zu überprüfen.

Das dreidimensionale Finite-Elemente-Modell ist mit den verwendeten Randbedingungen (ausschließlich Wärmeübergänge und adiabate Ränder) in Bild 7 dargestellt. Es besteht aus 9 Teilstrukturen mit insgesamt 139 Elementen und 1009 Knotenpunkten. Die Berechnung erfolgte mit  $\Theta = \frac{2}{3}$  und einer Schrittweite von  $\Delta t = 10$  s sowie einer konstanten Ausgangstemperatur im Bauteil von  $T_0 = 20$  °C. Als Materialwerte wurden

$$\lambda = 4,98 \cdot 10^{-2} \text{ W/(mm K)}$$

$$\mu = 3,64 \cdot 10^{-1} \text{ Ws/(mm}^3 \text{ K)}$$

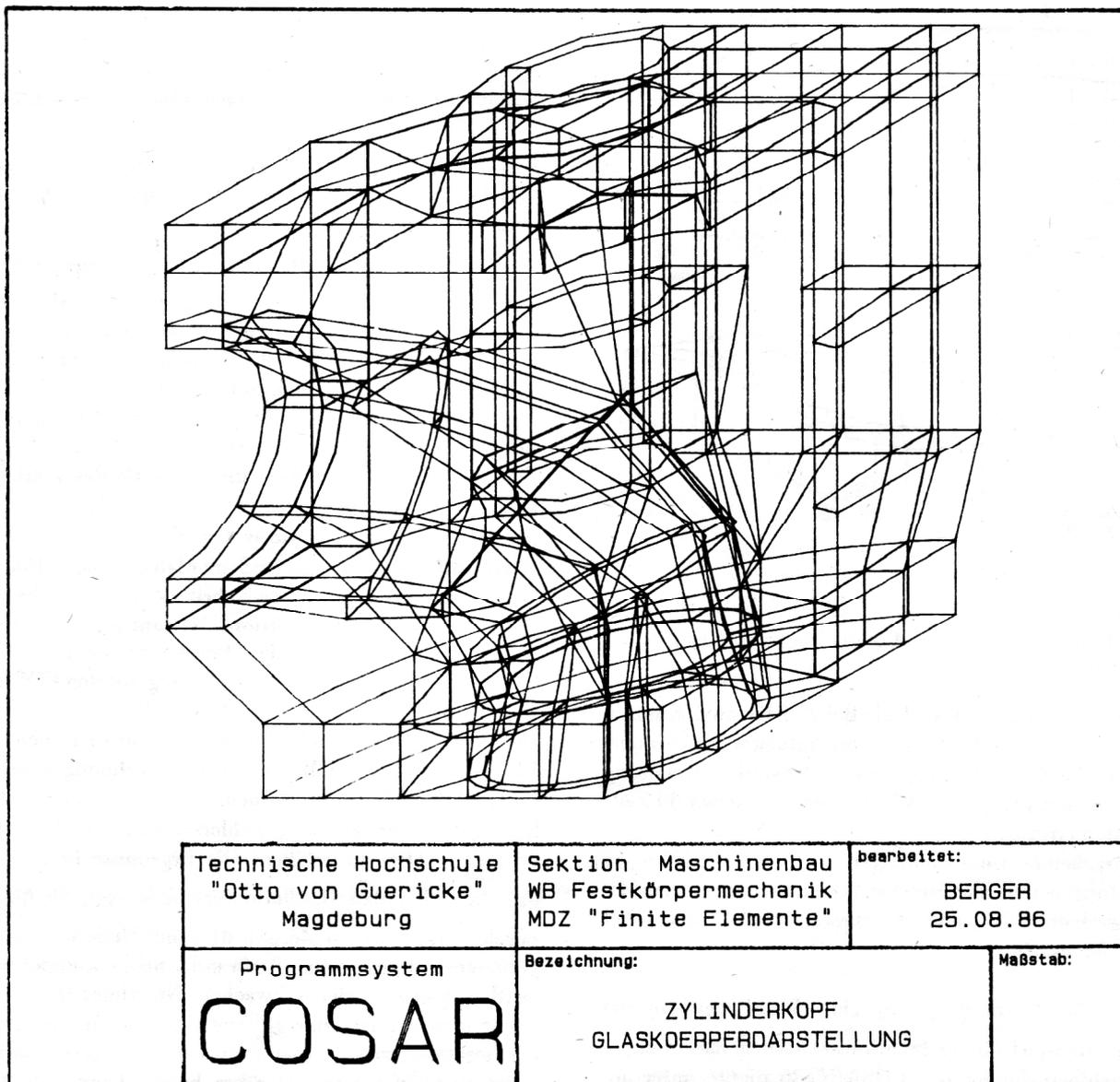
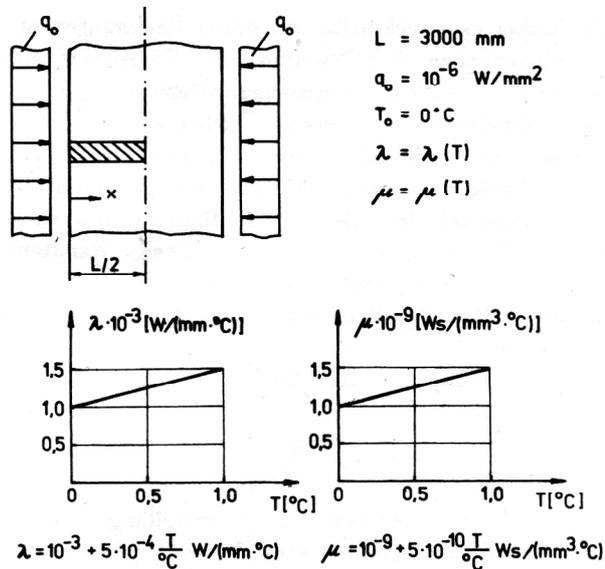
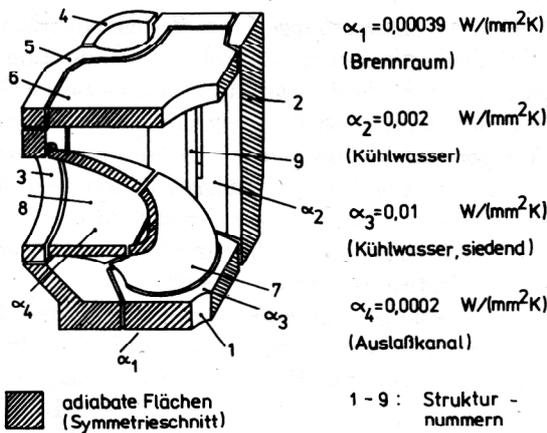
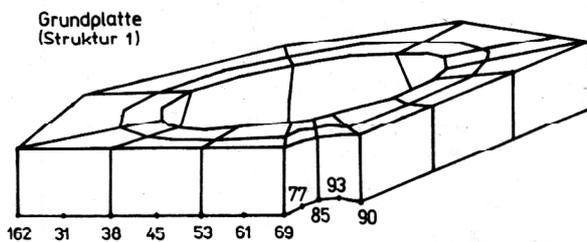
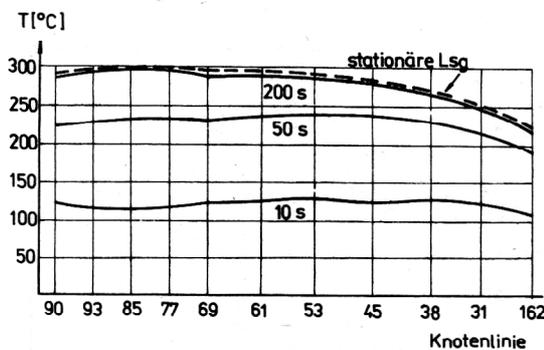


Bild 7a  
3D-Modell eines Zylinderkopfes (Glaskörperdarstellung)



**Bild 7b**  
Substrukturierung und Randbedingungen für die instationäre Temperaturfeldberechnung



**Bild 8**  
Zeitabhängiger Temperaturverlauf für eine Knotenlinie an der Unterseite der Grundplatte

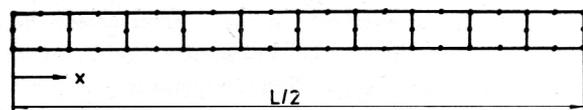
verwendet. In Bild 8 sind als Beispiel für zwei Knotenlinien der Grundplatte die Temperaturwerte für unterschiedliche Zeitpunkte angegeben. Die stationäre Lösung wird mit der genannten Schrittweite nach etwa 30 Zeitschritten erreicht.

Weitergehende Untersuchungen – z. B. zeitabhängige Belastungen und die Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens – sind für dieses Berechnungsmodell noch vorgesehen.

**Beispiel 3: Wärmestrom in eine Wand (nichtlinear)**

Als Testbeispiel für die nichtlineare instationäre Temperaturfeldberechnung mit COSAR/T86 diente unter anderem das in Bild 9 dargestellte Modell des Wärmestro-

**FE - Modell :**

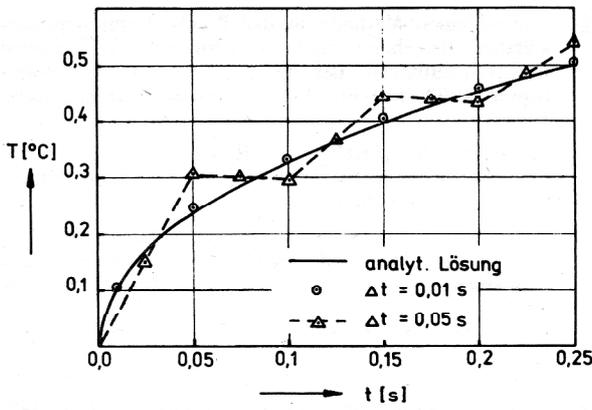


**Bild 9**  
Wärmestrom in eine Wand; Berechnungsmodell und Finite-Elemente-Netz

mes in eine Wand [38], wobei sowohl die Wärmeleitfähigkeit als auch die Wärmekapazität temperaturabhängig sind.

Alle Rechnungen wurden mit  $\Theta = \frac{1}{2}$  durchgeführt, so daß bei grober Schrittweite mit mehr oder weniger starken Anfangszustörungen gerechnet werden mußte. Die Abschätzung (30) liefert durch den sehr kleinen Wärmekapazitätswert eine Schrittweite von ca.  $70 \mu\text{s}$ . Es wurden Rechnungen mit  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ ,  $\Delta t = 0,025 \text{ s}$  und  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  durchgeführt, so daß im ungünstigsten Fall der abgeschätzte Wert um mehr als das 700fache überschritten wurde.

Als Iterationsstrategie wurde für alle Rechnungen festgelegt, die effektive „Linke-Seite-Matrix“ (siehe Bild 1) zu Beginn eines jeden Zeitschrittes neu aufzubauen, jedoch innerhalb der Iteration konstant zu lassen (einfache Strategie); die Fehlerschranke betrug  $\epsilon = 10^{-4}$ . In Bild 10 wird die analytische Lösung mit den COSAR-Lösungen für  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$  und  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  verglichen. Die Tabelle enthält neben diesen Ergebnissen auch die Lösungen für  $\Delta t = 0,025 \text{ s}$ . Bei allen Rechnungen waren durchschnittlich 3 Iterationen je Zeitschritt erforderlich, um für die genannte Fehlerschranke die Abbruchbedingung (18) zu erfüllen. Die Ergebnisse bestätigen, daß die bekannten Oszillationserscheinungen für  $\Theta = \frac{1}{2}$  durch Iterationen im Zeitschritt (und damit wesentlich größerem numerischen Aufwand) nicht kompensiert werden können. Bei schwachen Nichtlinearitäten erreicht man oftmals eine größere Genauigkeit, wenn auf die Iterationsstrategie zugunsten einer kleineren Schrittweite verzichtet wird. Darüber hinaus kann sich dies auch vorteilhaft auf die Rechenzeit auswirken.



t [s]	analyt. Lsg.	Δt [s]		
		0,01	0,025	0,05
0,010	0,1098	0,1394	—	—
0,020	0,1537	0,1418	—	—
0,025	0,1711	0,1723	0,2198	0,1535
0,030	0,1867	0,2027	—	—
0,040	0,2142	0,2101	—	—
0,050	0,2381	0,2496	0,2148	0,3069
0,060	0,2595	0,2593	—	—
0,070	0,2791	0,2885	—	—
0,075	0,2882	0,2938	0,3181	0,3008
0,080	0,2971	0,2991	—	—
0,090	0,3139	0,3222	—	—
0,100	0,3297	0,3332	0,3164	0,2947
0,125	0,3655	0,3715	0,3888	0,3678
0,150	0,3975	0,4048	0,3898	0,4408
0,175	0,4266	0,4333	0,4462	0,4358
0,200	0,4533	0,4599	0,4493	0,4308
0,225	0,4781	0,4852	0,4954	0,4835
0,250	0,5013	0,5089	0,5001	0,5362

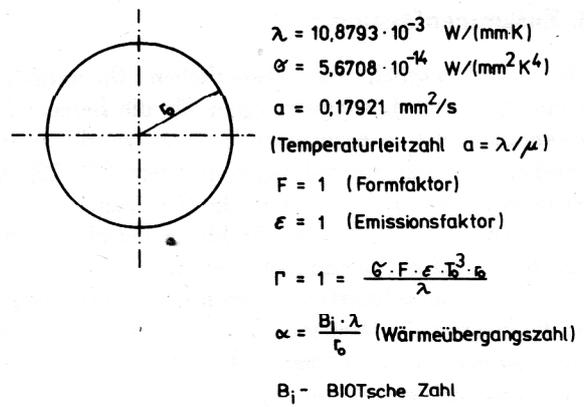
**Bild 10**

Wärmestrom in eine Wand; Vergleich einiger Berechnungsergebnisse mit der analytischen Lösung ([38])

**Beispiel 4:** Vollzylinder mit Wärmeübergang und Strahlungsrandbedingungen

Die Berücksichtigung von Strahlungsrandbedingungen führt zu starken Nichtlinearitäten und erfordert in jedem Fall eine iterative Strategie innerhalb des Zeitschrittes. In Abschnitt 3.1. wurde bereits darauf hingewiesen, daß eine Konvergenz sogar oftmals nur dann zu erreichen ist, wenn in jedem Iterationsschritt die Matrix  $A_{\Theta}$  an Stelle von  $A_t$ , siehe Bild 1).

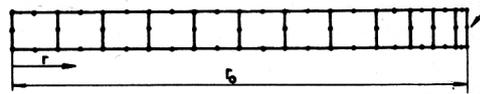
Als Berechnungsbeispiel dient hier ein unendlich langer Vollzylinder, an dessen Mantelflächen gleichzeitig Wärmeübergang und Strahlungsrandbedingungen vorgegeben sind [37]. In Bild 11 sind die Parameter der Rechnung zusammengestellt, wobei aus Vergleichsgründen mit [37] auch die in der Tabelle angegebenen Schrittweitenintervalle verwendet wurden. Die Berechnungen wurden für unterschiedliche Biotsche Kennzahlen sowohl mit  $\Theta = \frac{1}{2}$  als auch mit  $\Theta = 1$  durchgeführt. Die notwendigen Iterationen sind ebenfalls in der Tabelle aufgelistet. Bild 12 zeigt für  $B_i = 2$  und  $B_i = 10$  bei Verwendung von  $\Theta = 1$  die gute Übereinstimmung der COSAR-Rechnungen mit den ADINAT-Lösungen



FE-Modell

(8-Knoten-Ringelemente)

Wärmeübergang + Strahlung

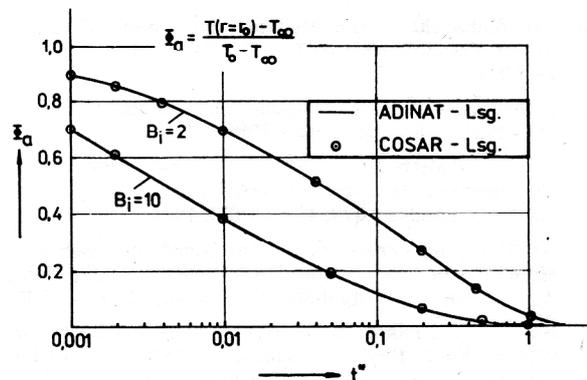


**Bild 11**

Modell eines unendlich langen Vollzylinders mit Wärmeübergang und Strahlungsrandbedingung

	$t^* = \frac{a \cdot t}{r^2}$	$\frac{\Delta t \cdot a}{l^2}$		Zeit-schritte		Iterationen <sup>1)</sup>	
		$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = 1$	$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = 1$	$\Theta = \frac{1}{2}$	$\Theta = 1$
		$B_i = 10$	$0 < t^* \leq 0,01$	0,001	0,0005	10	20
$\Gamma = 1$	$0,01 < t^* \leq 0,21$	0,01	0,005	20	40	2	2
	$0,21 < t^* \leq 1,21$	0,05	0,05	20	20	1	1
$T_{\infty}/T_0 = 0,55$	$0 < t^* \leq 0,04$	0,004	0,002	10	20	2	2
	$0,04 < t^* \leq 0,44$	0,02	0,02	20	20	1	1
	$0,44 < t^* \leq 1,44$	0,1	0,1	10	10	1	1

<sup>1)</sup> tol. =  $10^{-3}$



**Bild 12**

Wesentliche Parameter der durchgeführten Berechnungen und Vergleich von COSAR- und ADINAT-Lösungen für den Temperaturverlauf an der Oberfläche des Vollzylinders

## 8. Zusammenfassung

Die Arbeit enthält die wesentlichen theoretischen Grundlagen und Lösungsstrategien für die Berechnung instationärer Wärmeleitungsprobleme, so wie sie im universellen Finite-Elemente-Programmsystem COSAR realisiert sind. Es wird ein einheitlicher Berechnungsablauf für lineare und nichtlineare Probleme entwickelt, der auf den Einschnitt- $\Theta$ -Verfahren für die Zeitintegration und einem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren für die nichtlineare Iteration basiert. In Verbindung mit den Vorteilen der Substrukturtechnik ergibt sich damit ein leistungsfähiges Lösungsverfahren, das sich bei der Lösung praktischer Aufgabenstellungen bewährt hat. In der Arbeit werden weiterhin Fragen der Zeitschrittwahl und der Festlegung geeigneter Vernetzungen diskutiert und Formeln auf der Grundlage von Abschätzungen der Eigenwerte und Eindringtiefen angegeben. Praktische Berechnungen zeigen, daß diese Abschätzungen Richtwerte für die Wahl der Zeitschritte liefern, die Ergebnisse aber insbesondere bei der Nutzung unbedingt stabiler Integrationsverfahren zu pessimistisch ausfallen. Für einige Testbeispiele werden die mit COSAR berechneten Ergebnisse mit analytischen Lösungen und Lösungen aus der Literatur verglichen und Anwendungserfahrungen mitgeteilt.

Der beschriebene Leistungsumfang ist vollständig in dem Teilsystem COSAR/T86 des universellen Programmsystems COSAR implementiert. Das Teilsystem ist autonom nachnutzbar und bietet den gesamten, für das COSAR-System bekannten Nutzerservice (z. B. automatische Datengenerierung, Grafiksoftware, Substrukturtechnik, Standardstrukturen, Fehlerdiagnose usw.) [14].

## LITERATUR

- [1] Michlin, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin 1962.
- [2] Finlayson, B. A., Scriven, L. E.: On the Search for Variational Principles. *Int. J. for Heat and Mass Transfer* 10, 1967, 799 – 821.
- [3] Tautz, H.: Wärmeleitung und Temperaturausgleich. Akademie-Verlag, Berlin 1971.
- [4] Finlayson, B. A.: The method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press 1972.
- [5] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1982.
- [6] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1983.
- [7] Numerical Methods in Thermal Problems. Proc. of Int. Conferences held at the University of Swansea, J. Wiley and Sons, London 1979, 1981, 1983, 1985.
- [8] NUMETA 85, Proc. of the Int. Conf. on Numerical Methods in Engineering-Theory and Applications. A. A. Balkema Publishers, Rotterdam, Boston 1985.
- [9] Noor, A. K., Pilkey, W. D. (Eds.): State-of-the-Art Surveys on Finite Element Technology. ASME, United Engineering Center, 345 East 47th Street, New York 1983.
- [10] Brebbia, C. A. (Ed.): Finite Element Systems – A Handbook. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1985.
- [11] Whiteman, J. R.: The Mathematics of Finite Elements and Applications (Proc. of the MAFELAP Conferences I, . . . , V). Academic Press, London 1973, 1976, 1979, 1982, 1985.
- [12] Finite-Element-Methode in der Praxis, Computerunterstütztes Berechnen und Konstruieren. T-Programm GmbH, Reutlingen: Berichte der 7. Reutlinger Arbeitstagung 1983, Berichte der 8. Reutlinger Arbeitstagung 1985.
- [13] Belytschko, T., Hughes, T. J. R. (Eds.): Computational Methods for Transient Analysis. Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1983.
- [14] Nutzerhandbücher zum Programmsystem COSAR. – COSAR/84 (Elastostatik, Dynamik, stationäre Temperaturfelder): Teil I – Grundlagen, Teil II – Eingabevorschrift. – COSAR/T86 (stationäre und instationäre Temperaturfelder) TH Magdeburg, Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik, Methodisch Diagnostisches Zentrum „Finite Elemente“, 1985, 1986.
- [15] Wilson, E. L., Nickel, R. E.: Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis. *Nucl. Eng. and Design*, 4, 1966, 276 – 286.
- [16] Fried, I.: Bounds on the Extremal Eigenvalues of the Finite Element Stiffness and Mass Matrices and their Spectral Condition Number. *J. of Sound and Vibration*, 22, 1972, 407 – 418.
- [17] Fried, I.: Bounds on the Spectral and Maximum Norms of the Finite Element Stiffness, Flexibility and Mass Matrices. *Int. J. of Solids and Structures*, 9, 1973, 1013 – 1034.
- [18] Zienkiewicz, O. C., Parekh, C. J., Wills, A. J.: The Application of Finite Elements to Heat Conduction Problems Involving Latent Heat. *Rock Mech.*, 5, 1973, 65 – 76.
- [19] Donea, J.: On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat-Conduction Equation. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 8, 1974, 103 – 110.
- [20] Bruch, J. C., Zvoloski, G.: Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element Method. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 8, 1974, 481 – 494.
- [21] Wilson, E. L., Bathe, K. J., Peterson, F. E.: Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer. *Nucl. Eng. and Design*, 29, 1974, 110 – 124.
- [22] Köhler, W., Pittr, J.: Berechnung instationärer Temperaturfelder mit finiten Elementen in Raum- und Zeitdimension. *Wärme- und Stoffübertragung* 7, 1974, 195 – 199.
- [23] Comini, G., del Giudice, S., Lewis, R. W., Zienkiewicz, O. C.: Finite Element Solution of Non-Linear Heat Conduction Problems with Special Reference to Phase Change. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 8, 1974, 613 – 624.
- [24] Wood, W. L., Lewis, R. W.: A Comparison of Time Marching Schemes for the Transient Heat Conduction Equation. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 9, 1975, 679 – 689.
- [25] Wilson, E. L., Nickel, R. E.: Application of Finite Element Method to Heat Conduction Analysis. *Nucl. Eng. and Design*, 4, 1976, 276 – 286.
- [26] Lyness, J. F., Owens, D. R. J., Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Analysis of Engineering Systems Governed by a Non-Linear Quasi-Harmonic Equation. *Computers and Structures*, 5, 1975, 65 – 79.
- [27] Fullard, K.: Thermal Transient Analysis Involving Large Temperature Gradients, Solved by Means of FLHE. Central Electricity Generating Board, Berkeley Nuclear Laboratories, Report RD/BIN 3831, 1976.
- [28] Zlamal, M.: Finite Element Methods in Heat Conduction Problems. in [11], 1976, S. 85 – 105.
- [29] Zlamal, M.: Solution of Nonlinear Heat Conduction Problems by the Finite Element Method. *Staveb. Cas.*, 24, c. 5, VEDA Bratislava 1976, 428 – 435.
- [30] Gabbert, U., Strümke, M.: Die Berechnung von Feldproblemen mit der Methode der finiten Elemente. *Wiss. Z. TH Magdeburg*, 21, 1977, 509 – 514.

- [31] Williams, S. D., Curry, D. M.: An Implicit-Iterative Solution of the Heat Conduction Equation with a Radiation Boundary Conduction. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 11, 1977, 1605 – 1619.
- [32] Argyris, J. H., Warnke, E. P., William, K. J.: Berechnung von Temperatur- und Feuchtefeldern in Massivbauten nach der Methode der finiten Elemente. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 278. W. Ernst und Sohn, Berlin 1977.
- [33] Wood, W. L.: Control of CRANK-NICOLSON Noise in the Numerical Solution of the Heat Conduction Equation. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 11, 1977, 1059 – 1065.
- [34] Hughes, T. J. R.: Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Transfer. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 10, 1977, 135 – 139.
- [35] Morgan, K., Lewis, R. W., Zienkiewicz, O. C.: An Improved Algorithm for Heat Conduction Problems with Phase Change. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 12, 1978, 1191 – 1195.
- [36] Gabbert, U., Krämer, M.: Berechnung stationärer und instationärer Temperaturfelder mit der Finite-Elemente-Methode. *Zeitschrift Pumpen- und Verdichterinformatoren*, 1979, Heft 1, 29 – 36.
- [37] Bathe, K. J., Khoshgoftaar, R.: Finite Element Formulation and Solution of Nonlinear Heat Transfer. *Nucl. Eng. and Design*, 51, 1979, 389 – 401.
- [38] Orivuori, S.: Efficient Method for Solution of Nonlinear Heat Conduction Problems. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 14, 1979, 1461 – 1476.
- [39] Gabbert, U., Krämer, M.: Temperaturfeldberechnungen mit der Methode der finiten Elemente. *Zeitschrift für Luft- und Kältetechnik*, 1980, Heft 1, 29 – 34.
- [40] Haberland, C., Czomber, L.: Berechnung der instationären Temperaturen in zusammengesetzten Strukturen bei beliebigen inneren und äußeren Randbedingungen. *Inst. für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin*, ILR-Bericht 49, 1980.
- [41] Hogge, M. A.: Secant Versus Tangent Methods in Non-Linear Heat Transfer Analysis. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 16, 1980, 51 – 64.
- [42] Friedrich, P.: Zur Berechnung dreidimensionaler instationärer Temperatur- und Spannungsfelder mit der Methode der finiten Elemente. *Diss. Uni. Stuttgart* 1980.
- [43] Pammer, Z.: A Mesh Refinement Method for Transient Heat Conduction Problems Solved by Finite Elements. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 15, 1980, 495 – 505.
- [44] Jinoch, J.: Das Programmsystem PMD für Berechnungen im Maschinenbau. *IfL-Mitteilungen*, 20, 1981, Heft 6.
- [45] Rubinsky, B., Cravahlo, E.: A Finite Element Method for the Solution of One-Dimensional Phase Change Problems. *Int. J. for Heat and Mass Transfer*, 24, 1981, 1987 – 1989.
- [46] Vaz, L. E.: Nichtlineare instationäre Analyse mit der Methode der finiten Elemente. *Diss. Uni. Stuttgart* 1981.
- [47] Czomber, L.: Ein hybrides Rechenverfahren zur Bestimmung der instationären Temperaturen in verzweigten Strukturen. *Inst. für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin*. ILR-Bericht 54, 1982.
- [48] Damjanic, F., Owen, D. R. J.: Practical Considerations for Thermal Transient Finite Element Analysis Using Iso-parametric Elements. *Nucl. Eng. and Design*, 69, 1982, 102 – 126.
- [49] Tham, L. G., Cheung, Y. K.: Numerical Solution of Heat Conduction Problems by Parabolic Time-Space Elements. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 18, 1982, 467 – 474.
- [50] Trujillo, D. M., Busby, H. R.: Investigation of Highly Accurate Integration Formula for Transient Heat Conduction Analysis Using the Conjugate Gradient Method. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 18, 1982, 99 – 109.
- [51] Zienkiewicz, O. C.: Finite Elements in the Time Domain. in [9], 405 – 449.
- [52] Reffstrup, J., Houbak, N.: Finite Element Modelling of Heat and Mass Transfer in Porous Media. in [7], 1983.
- [53] Owen, D. R. J., Damjanic, F.: Reduced Numerical Integration in Thermal Transient Finite Element Analysis. *Computers and Structures*, 17, 1983, 261 – 276.
- [54] Osnes, J. D.: A Method for Efficiently Incorporating Radiative Boundaries in Finite Element Programs. in [7], 1983, 36 – 46.
- [55] Belytschko, T.: An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures. in [13], 1 – 65.
- [56] Hughes, J. R.: Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability Behavior. in [13], 67 – 155.
- [57] Geradin, M., Hogge, M.: Implicit Finite Element Methods. in [13], 418 – 471.
- [58] Liu, W. K., Zhang, Y. F.: Improvement of Mixed Time Implicit-Explicit Algorithms for Thermal Analysis of Structures. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 37, 1983, 207 – 223.
- [59] Liu, W. K.: Development of Mixed Time Partition Procedures for Thermal Analysis of Structures. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 19, 1983, 125 – 140.
- [60] Booz, O., Bosch, R.: Neues Zeitschrittverfahren für instationäre Potentialprobleme in TPS 10. in [12], 1983, IV. 1, 1 – 20.
- [61] Zienkiewicz, O. C., Wood, W. L., Hines, N. W., Taylor, R. L.: A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 1: General Formulation and Applications. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 20, 1984, 1529 – 1552.
- [62] Gabbert, U.: Instationäre Temperaturfeldberechnung im Programmsystem COSAR. TH Magdeburg, Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik, Methodisch Diagnostisches Zentrum „Finite Elemente“, 1984 (unveröffentlicht).
- [63] Liu, W. K., Belytschko, T.: Efficient Linear and Nonlinear Heat Conduction with a Quadrilateral Element. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 20, 1984, 931 – 948.
- [64] Schellenberg, C.: Zur Berechnung von Wärmeleitung, Korrosion und Diffusion im Apparatebau. *Diss. A, TH Magdeburg* 1984.
- [65] Prassas, A. G., Hitchings, D.: Non-Linear Transient Heat Transfer Calculations within a General Purpose Finite Element Code FINEL. in [8], 815 – 823.
- [66] Gabbert, U., Berger, H., Zehn, M., Fels, D.: Universelles FEM-Programmsystem COSAR – Übersicht über den nachnutzbaren Leistungsumfang. *Maschinenbautechnik*, 34, 1985, Heft 8, 352 – 356.
- [67] Fels, D.: Konzeptioneller Aufbau, Implementierung und Testung von Elementkatalogen für universelle Finite-Elemente-Programmsysteme. *Diss. A, TH Magdeburg* 1985.
- [68] Liu, W. K., Zhang, Y. F., Belytschko, T.: Implementation of Mixed Time Partition Algorithms for Nonlinear Thermal Analysis of Structures. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 48, 1985, 245 ff.
- [69] Hughes, T. J. R., Tezduyar, T. E.: Analysis of Some Fully-Discrete Algorithms for the One-Dimensional Heat Equation. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 21, 1985, 163 – 168.
- [70] Kujawski, J., Gallagher, R. H.: Stable Semi-Explicit Procedure for Time Integration of Nonlinear First Order Initial Value Problems. in [8], 35 – 37.
- [71] Münch, C.: Programmtechnische Realisierung und Testung einer Strategie zur nichtlinearen stationären Temperaturfeldberechnung im Programmsystem COSAR/T84. *Diplomarbeit TH Magdeburg*, Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik, 1985.
- [72] Gabbert, U.: Aspekte des Software Engineering bei der Entwicklung großer FEM-Programmsysteme. *Wiss. Z. TH Magdeburg*, 30, 1986, Heft 3, 60 – 67.