

Beispiele zur Spannungs- und Deformationsanalyse sowie zur Lösung des Kontaktproblems nach dem FEM-Programm FIDEFA

H. Gläser, K.-D. Drey, R. Dudek

1. Programm FIDEFA

Das Programm FIDEFA/(ESER) basiert auf einer totalen Lagrangeschen Beschreibung von Deformation und Spannungen. Als Deformationsmaß findet demzufolge der Greensche Verzerrungstensor E_{KL} Verwendung:

$$2E_{KL} = g_{KL} - G_{KL} = U_{K|L} + U_{L|K} + U_{N|K} U^N|_L \quad (1)$$

G_{KL} ist der Metriktensor in der Ausgangsgeometrie, g_{KL} derjenige der Momentankonfiguration, bezogen auf den Ausgangszustand, und U_K sind die Komponenten des Verschiebungsvektors. In Zuwachsform bzw. Geschwindigkeitsformulierung lautet das Formänderungsmaß

$$2\dot{E}_{KL} = \dot{U}_{K|L} + \dot{U}_{L|K} + \dot{U}_{N|K} U^N|_L + U_{N|K} \dot{U}^N|_L \quad (2)$$

Senkrechte Striche bedeuten kovariante Ableitungen. Durch das Deformationsgesetz erfolgt eine Verknüpfung von Greenschem Verzerrungs- und 2. Piola-Kirchhoff'schem Spannungstensor T^{*KL} . Dieses Gesetz läßt sich aus einer entsprechenden Geschwindigkeitsbeziehung zwischen wahrer Spannung und natürlicher Deformation für die Momentankonfiguration herleiten. Als objektives Maß für die Spannungsgeschwindigkeit wird die Jaumannsche Geschwindigkeit \dot{T}^{*KL} benutzt. Das Deformationsgesetz lautet dann

$$\dot{T}^{*KL} = \overline{DKLJ} \dot{E}_{IJ} \quad (3)$$

mit

$$\overline{DKLJ} = \frac{E}{1+\nu} (g^{KI} g^{LJ} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{KL} g^{IJ}) - \frac{\alpha}{\gamma} S^{KL} S^{IJ} \quad (4)$$

Mit der Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeit

$$\dot{T}^{*KL} = \dot{T}^{KL} + (T^{NL} g^{KM} + T^{KN} g^{ML}) \dot{E}_{MN} \quad (5)$$

und

$$\dot{T}^{KL} = \overline{DKLJ} \dot{E}_{IJ} \quad (6)$$

wird

$$\overline{DKLJ} = \frac{E}{1+\nu} [g^{KI} g^{LJ} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{KL} g^{IJ}] - \frac{1+\nu}{E} (g^{KI} T^{LJ} + g^{LI} T^{KJ}) - \frac{\alpha}{\gamma} S^{KL} S^{IJ} \quad (7)$$

Für den plastischen Teil des Deformationsgesetzes gilt

$$\alpha = 1, \text{ wenn } F = 0 \text{ und } \dot{J}_2 > 0 \\ \alpha = 0, \text{ wenn } F < 0 \text{ oder } \dot{J}_2 \leq 0 \quad (8)$$

F beschreibt die Fließfunktion, J_2 die 2. Invariante des Spannungsdeviators S^{KL} und γ lautet mit dem Tangentenmodul E_t

$$\gamma = \frac{2J_2 \left(\frac{E}{E_t} - \frac{1-2\nu}{3} \right)}{\frac{E}{E_t} - 1} \quad (9)$$

Der FEM-Algorithmus wurde auf der Grundlage der Variationsformulierung entwickelt [1], [2]. Um einen aufwendigen Iterationszyklus bei der Lösung des nicht-linearen Problems zu umgehen, bieten sich Methoden vom Runge-Kutta-Typ an [3]. Effektiv sind Zweischrittverfahren, wie die Prädiktor-Korrektor-Verfahren. In diesem Fall werden zwei Formeln gleicher Fehlerordnung so gekoppelt, daß mit der expliziten Prädiktorformel eine Näherung berechnet und in die rechte Seite der impliziten Korrektorformel eingesetzt wird, so daß sie einen verbesserten Wert liefert. Für die ESER-Version von FIDEFA I findet ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren Anwendung, das unterschiedliche Schrittweiten ermöglicht und eine rückwärtige Differenz benötigt. Wenn alle das zu behandelnde Problem bestimmenden Größen formal zu einem Zustandsvektor \underline{z} zusammengefaßt werden,

$$\underline{z} = \left\{ \underline{a} \quad \underline{E} \quad \underline{T} \quad \underline{h} \right\}^T$$

mit \underline{a} : Vektor der Knotenverschiebungen

\underline{E} : Formänderungstensor

\underline{T} : Spannungstensor

\underline{h} : Vektor interner Zustandsparameter,

kann allgemein für die Zuwächse von \underline{z}

$$\dot{\underline{z}} = f(\underline{z}, t) \quad (11)$$

geschrieben werden. Wie aus Bild 1 entnommen werden kann, sind im Lastschritt n \underline{z}_n und $\dot{\underline{z}}_n$ bekannt, aus dem vorhergehenden Schritt ist es \underline{z}_{n-1} . Mit dem

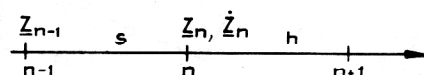


Bild 1
Veranschaulichung von Zustandsgrößen und Lastschritten für ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Verhältnis der Schrittweiten $\chi = h/s$ wird in einem Prädiktorschritt eine erste Näherung

$$\underline{z}_{n+1}^* = \underline{z}_n + (1+\chi)h \dot{\underline{z}}_n - \chi^2(\underline{z}_n - \underline{z}_{n-1}) \quad (12)$$

berechnet und im anschließenden Korrektorschritt entsprechend

$$\underline{z}_{n+1} = \underline{z}_n + \frac{h}{2}(\dot{\underline{z}}_n + \dot{\underline{z}}_{n+1}^*) \quad (13)$$

verbessert. $\dot{\underline{z}}_{n+1}^*$ wurde dabei aus (11) mit \underline{z}_{n+1}^* nach (12) gewonnen. Das Restglied bzw. der Fehler ist von der Größenordnung

$$R = \frac{h^3}{6} \left(1 + \frac{1}{\chi}\right) \ddot{\underline{z}}_n + O(h^4, h^4). \quad (14)$$

Diese Prädiktor-Korrektor-Methode hat sich bewährt. Ihre Anwendung führte zu wesentlichen Rechenzeitsparierungen gegenüber ursprünglichen Iterationsverfahren. Der Korrektorschritt kann beliebig oft wiederholt werden, falls die erzielte Genauigkeit nicht ausreicht. Oft ist jedoch schon der Prädiktorschritt genau genug. Als Abbruchkriterium kann eine Vektornorm, z. B. die Maximalnorm

$$\|\Delta \underline{z}_n^{i+1} - \Delta \underline{z}_n^i\|_1 < \epsilon \quad (15)$$

benutzt werden. Die Anlaufrechnung erfolgt mit $\chi=0$. Das Programm FIDEFA ist zur Berechnung der ebenen Verzerrungs- sowie des rotationssymmetrischen und ebenen Spannungszustands ausgelegt.

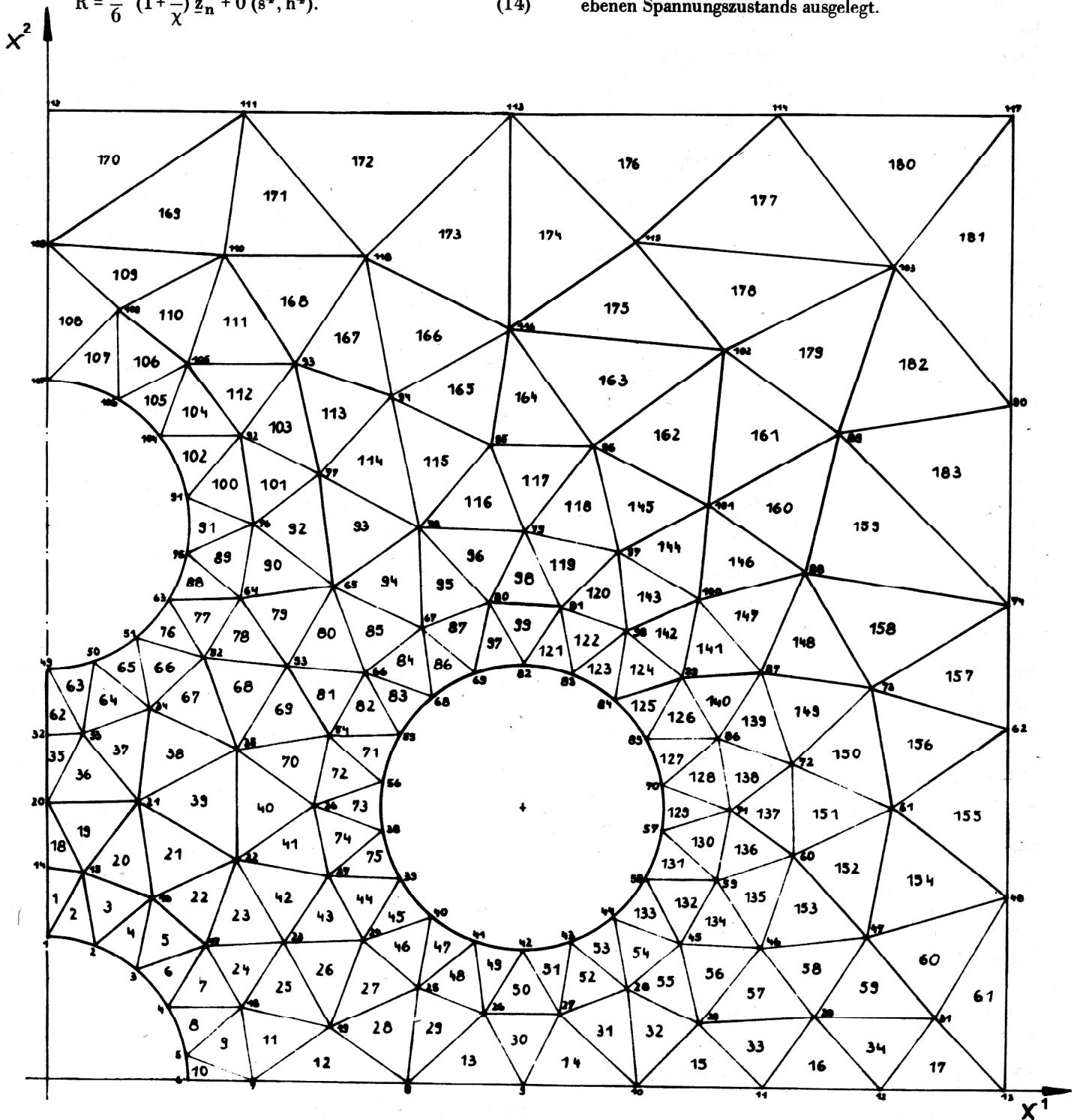


Bild 2
Vernetzung eines Rohrbodens

2. Anwendung

2.1. Berechnung eines Rohrbodens

Das Einpressen von Rohren in eine Bodenplatte wurde rechnerisch simuliert und im elastischen Bereich mit spannungsoptischen Ergebnissen verglichen [4]. Im Lastfall 1 erfolgt eine schrittweise radiale Verschiebungsvorgabe in der zentralen Bohrung (Vernetzung s. Bild 2), im Lastfall 2 zusätzlich die analoge Verschiebungsvorgabe in den benachbarten Bohrungen. Die Spannungsverläufe, die für den elastischen Grenzfall ermittelt wurden, stimmen sehr gut mit dem Experiment überein. Für die weitere Belastung nach Fall 1 bis zum Erreichen eines vollplastischen Zustandes im Steg A-A sind bei verschiedenen Laststufen die Spannungsverläufe aus dem Bild 3 ersichtlich. Die Analogie zur gelochten Scheibe bzw. zum Rohr unter Innendruck ist erkennbar.

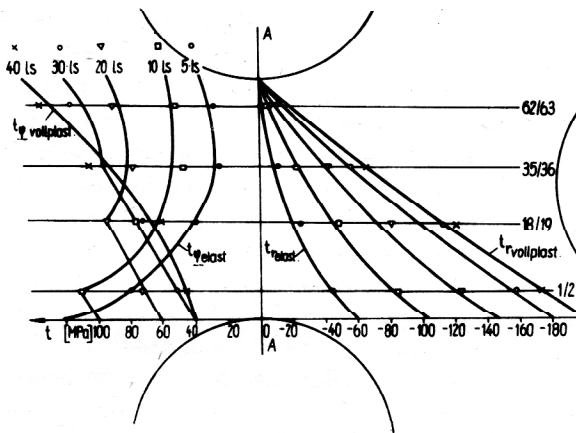


Bild 3
Spannungsverläufe im Rohrboden, $\Delta U = 5 \cdot 10^3$ mm

2.2. Deformationsanalyse an Dichtungen der Hochdrucktechnik

In der chemischen Hochdrucktechnik werden vorzugsweise metallische Dichtungen unterschiedlicher Querschnittsprofile eingesetzt. Unter der Voraussetzung einer möglichen laminaren Leckströmung ist der ertragbare Mediumsdruck bei Gasen proportional dem Kehrwert des Quadrates der Tiefe der Leckrille dreieckförmiger Querschnittsgestalt. Bei geforderter Gasdichtheit kommt es darauf an, derartige, durch die spannende Bearbeitung der Flansch- und Deckelkontaktflächen bedingten Leckrillen im Rauheitsbereich, insbesondere durch plastische Deformation der Dichtung im Vorspannungszustand soweit auszufüllen, daß die zulässige Leckmenge bei Prüfdruck mit Sicherheit nicht überschritten wird [5]. Dazu ist erforderlich, daß die Dichtung an ihrer Kontaktfläche zu plastischen Verformungen fähig ist. Dieses Vermögen ist bei metallischen Dichtungen in Abhängigkeit vom Querschnittsprofil und der Größe der übertragbaren Schubspannungen längs der Kontaktfläche unterschiedlich ausgeprägt. So können z. B. die Plastizierung des Querschnittes und die Verteilung des Dichtungsdruckes längs der Kontakt-

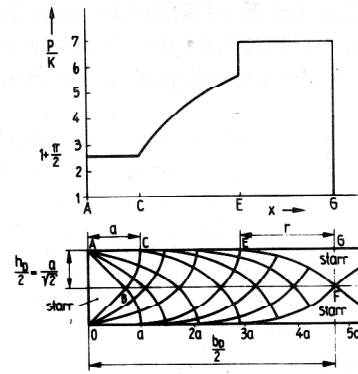


Bild 4
Kontaktdruckverteilung und Gleitlinienfeld im gestauchten Streifen; Lösung nach Hill

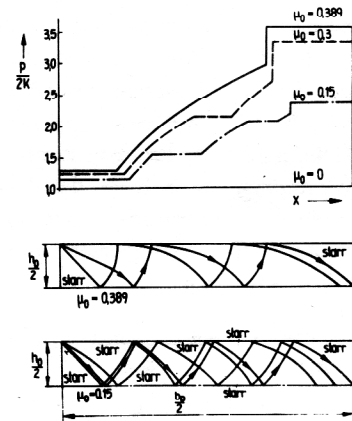


Bild 5
Kontaktdruckverteilung und Gleitlinienfelder im gestauchten Streifen; Lösung nach Alexander

fläche einer Flachdichtung aus dem Vergleich mit der Gleitlinienlösung eines gestauchten Metallstreifens zwischen rauhen, starren, parallelen Platten nach Hill [6] ermittelt werden. Wie die Ergebnisse nach Bild 4 für einen Plattenstreifen mit einem Breiten-Höhen-Verhältnis $b_D/h_D = 6,72$ zeigen, verbleibt in Streifenmitte ein plastisch nicht verformtes, sogenanntes starres Gebiet der Breite $2r$, innerhalb dessen ein Verfüllen der Leckrillen nicht stattfinden kann. Da die Spannungsverteilung in diesem Bereich nach der Gleitlinientheorie unbekannt bleibt, gibt man hier den mittleren Druck an, der durch Integration der Spannungen längs der Unstetigkeitslinie EF gewonnen wird.

Alexander [7] ermittelte den Verlauf der interessierenden Kontaktpressung, verteilt über endliche Streifenbreiten für den Fall Coulombscher Reibung zwischen den Berührungsflächen. Die hier mitgeteilten Lösungen nach Bild 5 beschränken sich auf das Breiten-Höhen-Verhältnis $b_D/h_D = 7$ und die Reibzahlen $\mu_0 = 0,15, 0,3$ und den Grenzwert $\mu_0 = 0,389$, bei dem die Fließschubspannung mit Ausnahme des starren Zentralgebietes in allen Punkten längs des Kontaktrandes erreicht wird (gleiche Randbedingungen wie die Lösung von Hill).

Hieraus folgt, daß die Anzahl der nicht plastischen Kontaktgebiete und deren Ausbreitung mit abnehmender

Reibung zwischen den Kontaktflächen anwächst. Damit verringert sich die Fähigkeit der Dichtung zur plastischen Ausfüllung der Leckrillen, z. B. bei Einfetten der Dichtfläche.

Die Flachdichtungen sind hiernach offensichtlich von ihrer geometrischen Form und der damit verbundenen örtlich eingeschränkten Ausbildung eines Fließspannungszustandes an der Berührungsfläche nur bedingt – mit Ausnahme besonders duktiler Dichtungswerkstoffe in Spezialfällen – in der chemischen Hochdrucktechnik ökonomisch einsetzbar.

Dichtungslinsen bzw. Ovaldichtungen zeigen auf Grund ihrer balligen Oberfläche diesbezüglich wesentlich günstigeres Verhalten. Ein Zugang zur Lösung des Kontaktproblems bei zugelassenen großen inelastischen Deformationen nach der Methode der Finiten Elemente gelingt gemäß [8] mit Hilfe einer entsprechenden Variationsgleichung in den Geschwindigkeitsgrößen, wobei die Ungleichungsnebenbedingungen des Kontaktes – analog zu denen der Plastizität – in den zeitintegralen Größen auftreten. Bei der Annahme des reibungsfreien Gleitens des plastisch deformierbaren Körpers längs einer starren Gegenfläche bleibt das Problem konservativ. Mit dem lokalen Krümmungstensor K_M^L des Hindernisses erhält das beschreibende Funktional einen zusätzlichen Term gegenüber der nicht restringierten, nichtlinearen, inelastischen Aufgabenstellung

$$\Pi(\dot{U}) = \int_V W dV - \int_{A_t} \dot{T}^L \dot{U}_L dA - \frac{1}{2} \int_{A_c} p K_M^L \dot{U}^M dA \quad (16)$$

der bei der Übertragung in einen FEM-Algorithmus – Realisierung der Minimierungsforderung einer finiten Struktur – zu einer sogenannten Laststeifigkeitsmatrix führt.

In der Beziehung (16) bedeuten

A_c den aktuellen Kontakttrand, der nur den Normaldruck p überträgt,

A_t den möglichen Lastrand für äußere Kräfte und

$$W = \frac{1}{2} D_{ijkl} \dot{E}_{ij} \dot{E}_{kl} + \frac{1}{2} T_{ij} \dot{U}^L [j \dot{U}_L]_i \quad (17)$$

das Potential der Verschiebungsgeschwindigkeiten, wie es dem Programm FIDEFA zugrunde liegt.

Im Bild 6 ist z. B. auszugsweise die Vernetzung (261 Dreieckselemente mit linearem Verschiebungsansatz, 154 Knoten) eines Quadranten einer metallischen Dichtlinse NW 230 im Kontakt mit einer geneigten, starren Flanschfläche dargestellt. Die stärker gezeichnete Kontur markiert die Grenze einer möglichen Auftragschweißung.

Die Verfestigung der Dichtung wird im eingesetzten FEM-Programm FIDEFA [2], [8] intern als isotrop angenommen und durch eine Ramberg-Osgood-Approximation genähert. Die Belastung im Vorspannungszustand der Dichtung erfolgt durch die Vorgabe der Verschiebungsgeschwindigkeit. Es werden die Ergebnisse für die beiden Extremfälle der Reibungsfreiheit und des vollständigen Haftens der Dichtung an der Kontaktfläche einander gegenübergestellt. Das Bild 7 zeigt die Kontaktdruckverteilung für die beiden Extremfälle. Der elastische Grenzdruck, ausgerückt durch seinen elliptischen Verlauf, liegt bei Annahme von Reibungsfreiheit wesentlich (um etwa 70 %) höher als im Falle vollkommener Haftung, was auf den sich unmittelbar unter der Kontaktfläche ausbildenden hydrostatischen Spannungszustand zurückzuführen ist, wie ihn die detaillierte Spannungsanalyse liefert.

Entsprechende Unterschiede zeigen der Beginn und die Ausbreitung der plastizierten Gebiete in der Gegenüberstellung für die beiden Extremfälle in den Bildern 8 und 9. Bei vollkommener Haftung, d. h. Verschiebungsbekämpfung längs der Kontaktlinie, setzt die Plastizierung „dichtwirkungsgünstig“ unmittelbar am Kontakttrand ein und breitet sich mit zunehmender Vorspannung infolge des im Inneren der Dichtung wirkenden Spannungszustandes verhältnismäßig konzentriert in das Dichtungsinnere zur Kontaktgegenfläche hin aus. Damit verbunden ist die nahezu konstante Druckverteilung im Zentrum der Kontaktzone.

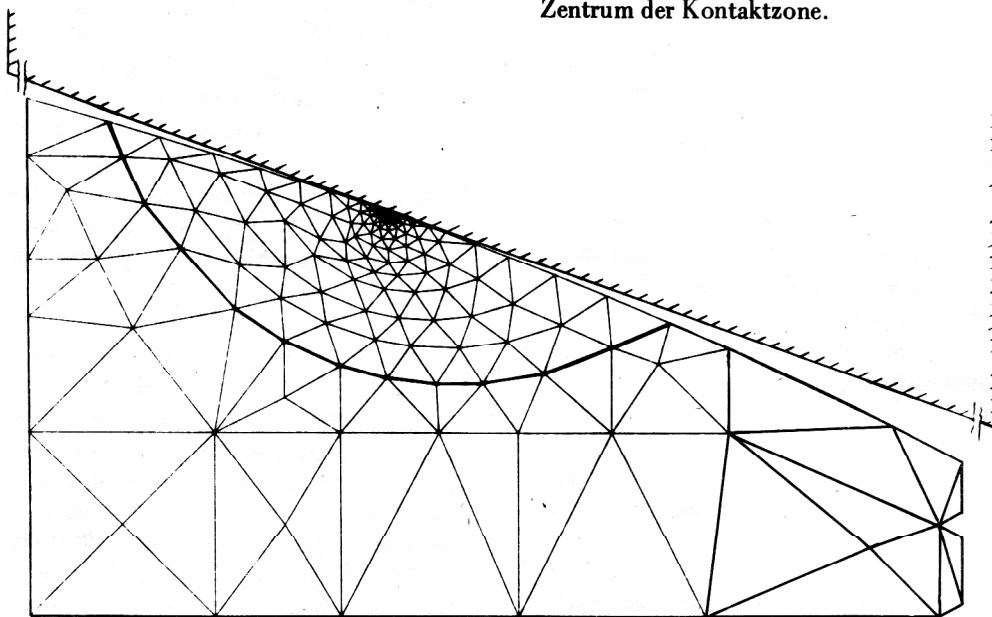


Bild 6
Vernetzung des Dichtungsquerschnittes

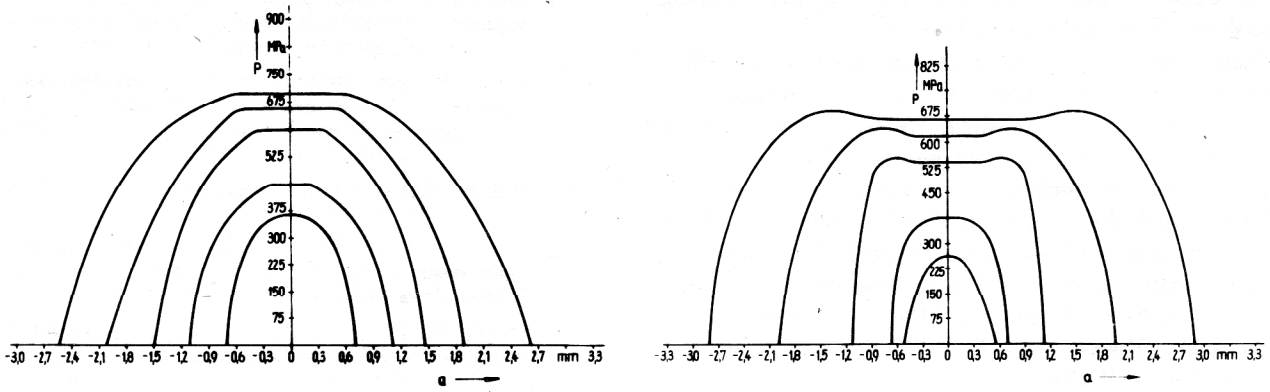


Bild 7
Verteilung des Kontaktdruckes bei gleitenden und haftenden Kontaktflächen

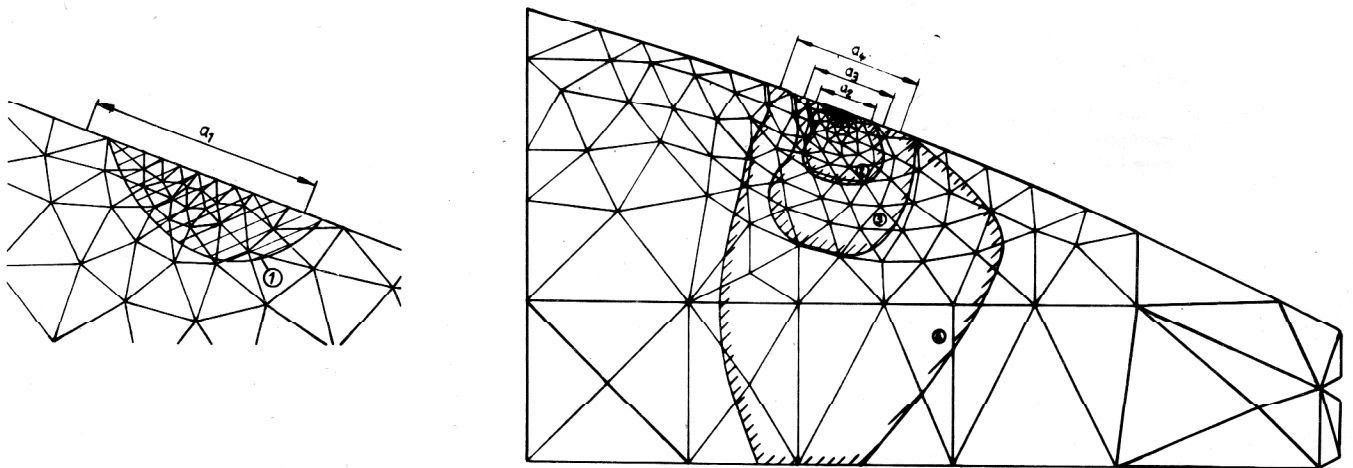


Bild 8
Beginn und Ausbreitung der plastizierten Gebiete bei haftenden Kontaktflächen

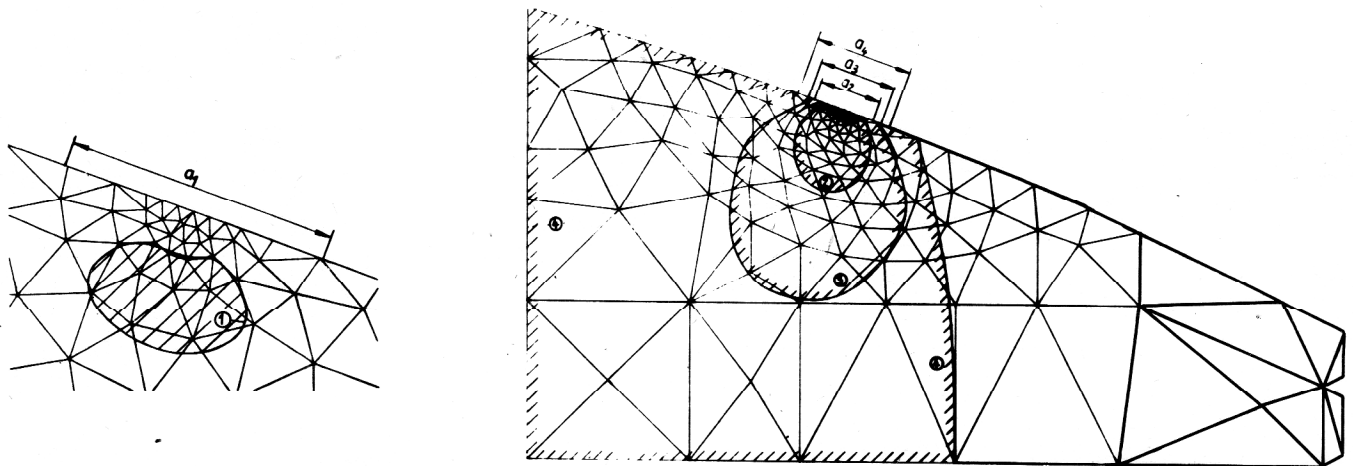


Bild 9
Beginn und Ausbreitung der plastizierten Gebiete bei gleitenden Kontaktflächen

Die in Umfangsrichtung verbliebenen geschlossenen elastischen Gebiete erhöhen die Stabilität der Dichtung im Vorspannungs- und Betriebszustand.

Im Gegensatz hierzu beginnt die Plastizierung bei Reibungsfreiheit wegen des herrschenden hydrostatischen Spannungszustandes nicht am Kontaktrand, sondern vielmehr im Dichtungshinterland ca. bei $0,3 \cdot a$ unterhalb der Kontaktzone, Bild 9. Die hierbei auftretenden

Umfangsspannungen führen zur verhältnismäßig schnellen Gesamtplastizierung des Querschnittes, und der „dichtwirkungungünstige“ elastische Streifen am Kontaktrand baut sich nur schwerfällig ab. In gewisser Analogie zur Flachdichtung verbleibt ein elastischer Randkern unterhalb des Zentrums der Kontaktfläche, so daß im gewünschten Maße erforderliche Ausfüllung der

Leckrillen im Flansch durch Plastizierung der Dichtung in diesem Falle nicht gewährleistet ist.

Diese Aussagen bleiben auch bei gewissen Modifikationen, die durch gezielte Auftragsschweißungen möglich sind, prinzipiell erhalten. Wegen der versteifenden Wirkung der Diskretisierung und der Nichtberücksichtigung einer elastischen Deformation von Flansch und Deckel sind die berechnete Kontaktbreite a zu klein und der Kontaktdruck etwas zu hoch. Vergleiche von theoretischen und numerischen Ergebnissen an einer Kugel im Kontakt mit einer Halbebene ergaben eine maximale Abweichung des Kontaktdruckes von 5 % im elastischen Bereich.

LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: Methoden der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1975.
- [2] Drey, K. D./Pausch, E.: Erarbeitung einer ESER-Version des Programms FIDEFA. Bericht, TH Karl-Marx-Stadt 1984.
- [3] Bronstein, I. N./Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1981.

- [4] Jaroniek, M./Niezgodzinski, T./Mlotkowski, A.: Rozkład naprezen i stref uplastycznienia w plytach perforowanych z rurkami wtloczonymi w otwory. PT Lodz 1984.
- [5] Gläser, H.: Eine Methode zur näherungsweise Berechnung der Dichtungskennwerte für Metaldichtungen der Hochdrucktechnik anhand mechanischer Ersatzmodelle, Habilitationsschrift, THK 1969.
- [6] Hill, R.: The mathematic theory of plasticity. Oxford at the Clarendon Press 1950.
- [7] Alexander, J. M.: The effect of coulombfriction in the plain strain compression of the plastic rigid material, J. Mech. Phys. Solids 3, 1955, p. 233/45.
- [8] Dudek, R.: Programm FIDEFA – Erweiterung des Programmes, FIDEFA zur Berechnung von Kontaktproblemen. TUK, Sektion MB, 1985.