

Berechnungsmethoden für transiente, lokal nichtlineare dynamische Systeme

K. Kaltoven

1. Problematik

Ein Großteil der dynamisch zu untersuchenden Objekte kann durch lineare Modelle ausreichend genau beschrieben werden. Ihre Bewegungsgleichung ist das System von Differentialgleichungen (Dgl.) zweiter Ordnung

$$\underline{M} \cdot \ddot{\vec{q}} + \underline{B} \cdot \dot{\vec{q}} + \underline{C} \cdot \vec{q} = \vec{f}_{\text{dyn}}(t). \quad (1)$$

Gegenwärtig werden solche Modelle vor allem mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) erstellt, weil hiermit auch komplizierte Strukturen ausgezeichnet modelliert werden können. Durch Zuhilfenahme moderner Rechentechnik kann die Gl. (1), die oftmals von großer Dimension ist, effektiv gelöst werden.

Andererseits lassen sich wichtige Schwingungserscheinungen nur mit nichtlinearen Modellen erklären. Bisher wurden diese Modelle i. allgm. auf wenige Freiheitsgrade (FG) begrenzt [1], um den durch die Nichtlinearität hervorgerufenen Mehraufwand zu kompensieren. Der Rückschluß von diesen kleinen Modellen auf das Objekt ist für den Ingenieur oft schwierig und gewagt.

Praxisnahe nichtlineare Strukturen sind z. B. Modelle, die aus einem linearen Grundsystem und wenigen, lokal begrenzten Nichtlinearitäten bestehen. Für solche Systeme werden in diesem Aufsatz effektive Berechnungsmethoden vorgestellt.

Maschinendynamische Modelle mit lokal begrenzten Nichtlinearitäten sind in der Praxis des Maschinenbaus recht häufig anzutreffen. So wird z. B. das statische und dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinenstellen wesentlich von den Fugensteifigkeiten geprägt [2]. Während die Gestellbauteile für sich ein lineares Grundsystem bilden, welches z. B. mit Hilfe der FEM diskretisiert werden kann, bleiben Nichtlinearitäten auf die Fugenstellen lokal begrenzt.

Weitere Beispiele seien noch genannt:

- Einbeziehung des Schnittprozesses in ein WZM-Modell [1]
- Hochlaufverhalten torsions- und biegeelastischer Rotoren [3]
- Einfluß hydrodynamischer Gleitlager auf das Schwingungsverhalten von Rotoren [4]
- An- und Auslauf von Mechanismen auf elastischem oder elastisch gelagertem Fundament [5]

2. Bewegungsgleichung, Zeitintegration

Zur Erfassung der Nichtlinearitäten in den Bewegungsgleichungen werden zwei Vorgehensweisen unterschieden:

1. Die Methode der tangentialen Steifigkeit, wonach Nichtlinearitäten in den Verschiebungen durch eine, vom aktuellen Verschiebungszustand abhängige Steifigkeitsmatrix erfaßt werden.
2. Die Pseudoerregkraftmethode, bei der die nichtlinearen Reaktionskräfte in den Bewegungsgleichungen als Pseudoerregkräfte Berücksichtigung finden.

Die Pseudoerregkraftmethode besitzt gegenüber der Methode der tangentialen Steifigkeit zwei entscheidende Vorteile:

1. Da Grad und Art der Nichtlinearitäten keiner Beschränkung unterliegen soll, können mit ihr besser geschwindigkeits- und beschleunigungsabhängige nichtlineare Kräfte sowie gekoppelte Nichtlinearitäten (z. B. $\dot{q}^2 \cdot \sin(q)$) berücksichtigt werden.
2. Durch Vermeidung der ständigen Aktualisierung der Systemmatrizen sind Rechenvorteile zu erwarten.

Somit werden im weiteren Systeme betrachtet, die sich durch die Bewegungsgleichung

$$\underline{M} \cdot \ddot{\vec{q}} + \underline{B} \cdot \dot{\vec{q}} + \underline{C} \cdot \vec{q} = \vec{f}_{\text{sta}} + \vec{f}_{\text{dyn}}(t) + \vec{f}_{\text{nil}}(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}), \quad (2)$$

eine um die Vektoren \vec{f}_{sta} (evtl. auftretende statische Belastungen) und \vec{f}_{nil} (nichtlineare Pseudoerregkräfte) erweiterte Gl. (1), beschreiben lassen.

Als Lösungsmethode für Gl. (2) bietet sich die direkte numerische Integration im Zeitbereich an, zumal hier vor allem Systeme unter transienter Erregung (also Einschwing-, Anfahr- und Auslaufvorgänge), deren instationären Schwingungen oft kritische Zustände hervorrufen, behandelt werden sollen.

Die direkte Zeitintegration ist die numerische Lösung eines Anfangswertproblems (AWP), zu deren Problematik es eine weit ausgebaute Theorie gibt. Die Behandlung von FEM-diskretisierten Modellen mit dieser Methode ist jedoch mit einigen Schwierigkeiten verbunden, da durch die FEM-Diskretisierung sogenannte „steife Systeme“ generiert werden. Das sind hier solche Systeme, bei denen das Verhältnis von höchster, im System enthaltenen Eigenfrequenz zur Grundfrequenz sehr hoch ist. Für Probleme der Strukturodynamik sind i. allgm. nur die niedrigsten Eigenfrequenzen signifikant. Somit ist die Zeitintegration von FEM-diskretisierten Systemen mit solchen Verfahren, die sich bezüglich ihrer Schrittweitenwahl nach der höchsten Eigenfrequenz zu richten haben, unökonomisch bzw. unmöglich. Es scheidet deshalb z. B. die sonst so effektiven expliziten Runge-Kutta- und Runge-Kutta-ähnlichen Verfahren (z. B. [6]) aus, und es

müssen Verfahren mit unendlich großem Stabilitätsbereich verwendet werden. Das sind implizite Verfahren niedriger Ordnung, die dem Dahlquistischen Wurzelkriterium genügen (vgl. [7]). Durchgesetzt hat sich zur Behandlung von Struktur-dynamik-Aufgaben das Verfahren von Newmark, aber auch die Wilson-Methode wird angewendet, und in neuerer Zeit sind die BDF-Verfahren auf dem Vormarsch [8].

Es ist stets vorteilhaft, Programmpakete zu entwickeln, welche mehrere Integrationsverfahren enthalten, um eine möglichst große Anwendungsbreite zu sichern.

3. Reduktionsmethoden für lokal nichtlineare dynamische Systeme

Nachdem die Bewegungsgleichung (2) aufgebaut ist, (der Vektor \vec{f}_{nil} ist problemspezifisch zu formulieren) könnte man sofort ein geeignetes Integrationsverfahren anwenden und Gl. (2) integrieren. Das würde jedoch der Lokalität der nichtlinearen Pseudoerregkräfte in keiner Weise Rechnung tragen und somit zu uneffektiven Berechnungen führen. Darum müssen Wege gesucht werden, diese Lokalität auszunutzen.

3.1. Kondensationsmethode

Die Anwendung eines Integrationsverfahrens auf die Gl. (2) liefert zu jedem diskreten Zeitpunkt t_j ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem (Gls.) vom Typ

$$\hat{C} \cdot \vec{y}(t_j) = \vec{r}(t_j) + \vec{f}(\vec{y}(t_j)), \quad (3)$$

wobei $\vec{y}(t_j)$ bei Anwendung impliziter Verfahren $\vec{q}(t_j)$ und bei der Anwendung expliziter Verfahren $\vec{q}(t_j)$ entspricht. Die rechte Seite von Gl. (3) besteht aus einem linearen Anteil $\vec{r}(t_j)$, und $\vec{f}(\vec{y}(t_j))$ enthält lediglich eine faktorisierte Form von \vec{f}_{nil} aus Gl. (2). (Vgl. [5]) Bei der Anwendung eines expliziten Verfahrens ist das Gl. (3) nur dann nichtlinear, wenn Nichtlinearitäten in den Beschleunigungen auftreten. Die iterative Lösung von Gls. (3) ist i. allg. der aufwendigste Teil bei der Berechnung eines Zeitschrittes.

Bei lokal nichtlinearen Problemen ist jedoch $\vec{f}(\vec{y})$ dünn besetzt, und es bietet sich nach einem eventuell nötigen Umsortieren der Einzelgleichungen der folgende Algorithmus zur Lösung von (3) an:

Man partitioniert das Gls. (3) in ein „nichtlineares“ [N] und in ein „lineares“ [L] Teilsystem

$$\begin{array}{|c|} \hline \hat{C} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \vec{y} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \vec{r} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \vec{f}(\vec{y}) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \hat{C}_{NN} & \hat{C}_{NL} \\ \hline \hat{C}_{LN} & \hat{C}_{LL} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \vec{y}_N \\ \hline \vec{y}_L \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \vec{r}_N \\ \hline \vec{r}_L \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \vec{f}(\vec{y}_N) \\ \hline \vec{0} \\ \hline \end{array}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\hat{C}_{NN} \cdot \vec{y}_N + \hat{C}_{NL} \cdot \vec{y}_L = \vec{r}_N + \vec{f} \quad (3a)$$

$$\hat{C}_{LN} \cdot \vec{y}_N + \hat{C}_{LL} \cdot \vec{y}_L = \vec{r}_L \quad (3b)$$

Löst man Gl. (3b) nach \vec{y}_L auf

$$\vec{y}_L = \hat{C}_{LL}^{-1} \cdot (\vec{r}_L - \hat{C}_{LN} \cdot \vec{y}_N) \quad (3c)$$

und setzt \vec{y}_L in Gl. (3a) ein, folgt hieraus ein nichtlineares Gls. für \vec{y}_N , jedoch von nunmehr wesentlich reduzierter Dimension:

$$\left. \begin{array}{l} (\hat{C}_{NN} - \hat{C}_{NL} \cdot \hat{C}_{LL}^{-1} \cdot \hat{C}_{LN}) \cdot \vec{y}_N = \vec{r}_N - \hat{C}_{NL} \cdot \hat{C}_{LL}^{-1} \cdot \vec{r}_L + \vec{f} \\ \text{oder: } \hat{C}_{red} \cdot \vec{y}_N = \vec{r}_{red} + \vec{f} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Der Vorteil des Kondensationsalgorithmus ist darin zu sehen, daß die Lösung des großen nichtlinearen Gls. (3) umgangen wird durch die Lösung eines kleinen nichtlinearen Gls. (4) und eines weniger großen linearen Gls. (3c). Es wird hier direkt die Lokalität der Nichtlinearitäten bei der Lösung des algebraischen Gls. ausgenutzt. Da bei Anwendung der Pseudoerregkraftmethode die Koeffizientenmatrix \hat{C} konstant bleibt (dadurch kann die Reduktion von \hat{C} bereits vor der Integration bzw. bei Änderung der Schrittweite h (implizite Verfahren) erfolgen), sind erhebliche Rechenvorteile bei den meisten Anwendungsfällen zu erwarten, was auch in [5] gezeigt wird.

Die Kondensationsmethode stellt keine Reduktion von Freiheitsgraden dar, so daß große Modelle auch oft nur rechenzeitintensiv behandelt werden können.

Dieser Nachteil kann vermieden werden, wenn die Dimension des Systems (2) vor der Integration reduziert wird.

3.2. Modale Reduktion

Eine praktikable Methode hierzu ist die modale Reduktion. Man berechnet zunächst die ersten, für die Systemantwort signifikanten m Eigenschwingformen (ESF) \vec{v}_i des ungedämpften linearen Grundsystems (1) durch Lösung des Eigenwertproblems

$$(\underline{C} - \omega_{o_i}^2 \cdot \underline{M}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0} \quad (i = 1 \dots m) \quad (5)$$

und stellt hieraus die Modalmatrix \underline{V}

$$\underline{V} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \} \quad (6)$$

zusammen. Man kann davon ausgehen, daß diejenige ESF noch signifikant ist, die zu der Eigenfrequenz gehört, die ca. dreimal größer ist als die höchste Erregerfrequenz.

Anschließend transformiert man das Koordinatensystem der verallgemeinerten Koordinaten \vec{q} in das der modalen Koordinaten \vec{p} mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \underline{V} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

und erhält mit der Normierung

$$\underline{V}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{V} = \underline{E} \quad (8)$$

die Bewegungsgleichung (2) in \vec{p} -Koordinaten (und somit i. a. in wesentlich reduzierter Dimension):

$$\underline{E} \cdot \vec{p} + \underline{\Lambda} \cdot \dot{\vec{p}} + \underline{\Omega} \cdot \ddot{\vec{p}} = \vec{H}_{sta} + \vec{H}_{dyn}(t) + \underline{V}^T \cdot [\vec{f}_{nil}(t, \underline{V} \cdot \vec{p}, \underline{V} \cdot \dot{\vec{p}}, \underline{V} \cdot \ddot{\vec{p}})] \quad (9)$$

mit

$$\vec{H}_{sta} = \underline{V}^T \cdot \vec{f}_{sta}; \quad \vec{H}_{dyn}(t) = \underline{V}^T \cdot \vec{f}_{dyn}(t) \quad (10)$$

$$\underline{\Lambda} = \underline{V}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{V}, \quad (11)$$

$$\underline{\Omega} = \text{diag}(\omega_{oi}^2) = \underline{V}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{V}; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}(t = t_0) &= \vec{p}_0 = \underline{V}^T \cdot \underline{M} \cdot \vec{q}_0; \\ \dot{\vec{p}}(t = t_0) &= \dot{\vec{p}}_0 = \underline{V}^T \cdot \underline{M} \cdot \dot{\vec{q}}_0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Gl. (9) ist aufgrund ihrer kleineren Dimension oftmals mit weitaus weniger Aufwand zu integrieren als Gl. (2) selbst. Außerdem werden durch die modale Reduktion die „steifen“ Anteile in der Bewegungsgleichung ausgeschaltet, so daß hierdurch vorzugsweise explizite Integrationsverfahren hoher Ordnung angewendet werden können.

Diese Reduktion ist für nichtlineare Systeme eine Näherung, die von der „Qualität“ der Transformationsvektoren, welche man als Ritzsche Koordinaten auffassen kann, abhängig ist. In [9] wird deshalb davon ausgegangen, daß diese Methode lediglich für schwach nichtlineare Systeme brauchbar sei.

Die modale Reduktion hat noch zwei Nachteile:

1. Die Lokalität von \vec{f}_{nil} aus Gl. (2) geht in dem zu integrierenden System (Gl. (9)) verloren. Die Nichtlinearitäten werden auf das gesamte modale System „verschmiert“.
2. Der Vektor \vec{f}_{nil} muß während der Integration bei jeder Iteration von einem Koordinatensystem in das andere transformiert werden.

3.3. Substrukturreduktion

Die Nachteile der beiden oben aufgeführten Reduktionsmethoden können durch eine dritte, als Substrukturreduktion bezeichnete, Methode ausgeschaltet werden. Sie basiert auf folgenden Grundgedanken:

Man teilt das Gesamtsystem formal in ein Teilsystem [1], welches diejenigen Variablen enthält, an denen die dynamischen und die nichtlinearen Erregungen angreifen, und in ein zweites [2], welches die übrigen Freiheitsgrade beinhaltet:

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{M}_{11} & \underline{M}_{12} \\ \underline{M}_{21} & \underline{M}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vec{q}}_1 \\ \dot{\vec{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\vec{q}}_1 \\ \ddot{\vec{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_{1,sta} \\ \vec{f}_{2,sta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{f}_{1,dyn} \\ \vec{f}_{2,dyn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{f}_{1,nil} \\ \vec{f}_{2,nil} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Mit Hilfe der Koordinatentransformation,

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}^* \\ \vec{p}^* \end{bmatrix} \quad (15)$$

wobei die Untermatrix \underline{V}_{22} die nach m ESF abgebrochene Modalmatrix des Eigenwertproblems

$$(\underline{C}_{22} - \omega_0^2 \underline{M}_{22}) \cdot \vec{v}_{22} = \vec{0} \quad (16)$$

ist, kann Gl. (14), ähnlich wie bei der modalen Reduktion in

$$\begin{aligned} &\underline{M}^* \cdot \vec{q}^* + \underline{B}^* \cdot \dot{\vec{q}}^* + \underline{C}^* \cdot \ddot{\vec{q}}^* \\ &= \vec{f}_{sta}^* + \vec{f}_{dyn}^*(t) + \vec{f}_{nil}^*(t, \vec{q}_1^*, \dot{\vec{q}}_1^*, \ddot{\vec{q}}_1^*) \end{aligned} \quad (17)$$

überführt werden und somit das Ausgangssystem mit der Dimension $(n_1 + n_2)$ auf das System (17) mit $(n_1 + m)$ Freiheitsgraden vor Beginn der Integration reduziert werden. Die Transformationsmatrix \underline{T} aus Gl. (15) ist die bei den Substruktur-Modalsynthese-Verfahren (z. B. [10], [11]) verwendete. Sie ist geeignet, die Nachteile der in den Abschnitten 3.1. und 3.2. vorgestellten Methoden zu beseitigen. Sie stellt wiederum einen Satz Ritzscher Koordinaten dar, mit der das Ausgangssystem approximiert wird. Die Untermatrix $(-\underline{C}_{22}^{-1} \cdot \underline{C}_{21})$ repräsentiert hierbei die statische Lösung bei Einheitsverschiebung an Substruktur [1]. Die mit dieser Transformation (15) berechneten Matrizen \underline{M}^* , \underline{B}^* , \underline{C}^* , die Vektoren \vec{f}_{sta}^* , \vec{f}_{dyn}^* , \vec{f}_{nil}^* sowie die Anfangswerte \vec{q}_0^* und $\dot{\vec{q}}_0^*$ sind in [5] aufgeführt.

Der Vorteil der Substrukturreduktion liegt neben der i. a. wesentlichen Dimensionsreduktion vor allem darin, daß der Vektor \vec{f}_{nil}^* im \vec{q}^* -Koordinatensystem wiederum lokal begrenzt bleibt, so daß während der Integration die Kondensationsmethode angewendet werden kann.

4. Das Programm TANDYS

TANDYS ist ein FORTRAN-Programm zur Transienten Analyse dynamischer Systeme, speziell für Systeme mit lokalen Nichtlinearitäten [12]. Mit dem Programm können AWP nach Gl. (2) numerisch gelöst werden. Als Integrationsverfahren sind zur Zeit die impliziten Methoden von

- Newmark
 - Wilson
- bei beliebiger Wahl der verfahrenseigenen Parameter

und BDF-Verfahren der Ordnungen 1 (Euler-rückwärts),
2 (Gear-Zweischritt)
und 3 (Park-Dreischritt)

implementiert. Als Reduktionsmethoden für lokal nicht-lineare Systeme stehen die Kondensationsmethode und die modale Reduktion zur Verfügung.

Aufgrund der verwendeten Integrationsverfahren sowie einiger programmtechnischer Besonderheiten kann TANDYS Modelle mit analytisch aufgestellten Bewegungsgleichungen behandeln und als Postprozessor (z. B. für das FEM-Dynamikprogramm FEMROT [13]) für FEM-Systeme eingesetzt werden.

Eingangsgrößen sind neben den Informationen, welche Reduktion, Integration und Ausgabe steuern, die Systemmatrizen \underline{M} , \underline{B} , \underline{C} , die Modalmatrix \underline{V} , die Anfangswerte \vec{q}_0 , $\dot{\vec{q}}_0$ und die über FORTRAN-Unterprogramme vom Anwender zu formulierenden Vektoren \vec{f}_{dyn} und \vec{f}_{nil} (vgl. [12]).

Als Besonderheit des Programmes wäre noch zu erwähnen, daß in TANDYS das dynamische System (Gl. (2)) durch ein System von Dgln. erster Ordnung erweitert werden kann. Dies verfolgt den Zweck, daß z. B. dynamische Motorkennlinien mit in die Berechnung von Antriebssystemen einbezogen werden können, um somit aussagekräftigere Berechnungsmodelle zu erhalten.

5. Berechnungsbeispiel: Gleitlagereinfluß

Es wird anhand eines mit TANDYS berechneten Beispieles die Anwendbarkeit und die Effektivität der vorgestellten Kondensations- und modalen Reduktionsmethode demonstriert. Dabei soll der Schwerpunkt weniger auf die mechanischen Hintergründe als auf die Verwendbarkeit der aufgeführten Methoden gelegt werden. Ausführliche Untersuchungen hierzu findet man in [4].

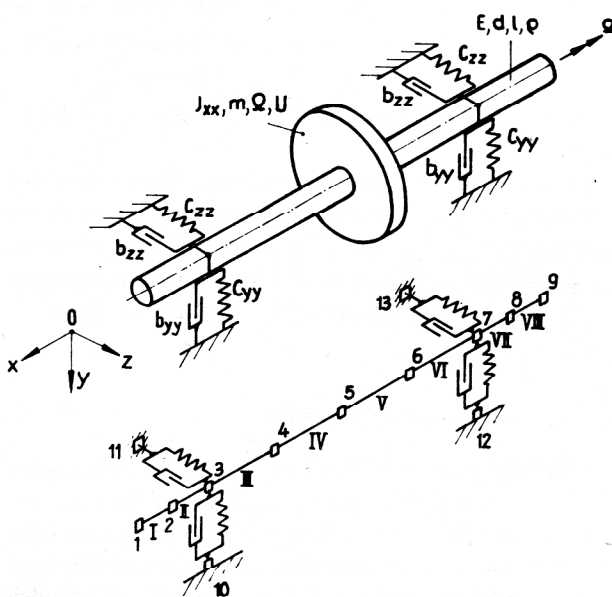


Bild 1
Lineares Grundsystem und FEM-Diskretisierung für das Berechnungsbeispiel

Der in Bild 1 dargestellte Lavalläufer bildet das lineare Grundsystem, das durch 8 Balkenelemente und einem rotierenden Starrkörper diskretisiert worden ist. Durch die diskreten Federn und Dämpfer an den Knoten 3 und 7 wird zunächst die tragende Funktion des Ölfilmes der hydrodynamischen Gleitlager modelliert; die Lager an sich seien starr. Ermittelt werden sollen die Auslenkungen des Rotors in den Lagern unter Unwuchterregung am Knoten 5:

$$\left. \begin{aligned} f_{y_5}(t) &= U \cdot \Omega^2 \cdot \sin \Omega t \\ f_{z_5}(t) &= U \cdot \Omega^2 \cdot \cos \Omega t \end{aligned} \right\} (18)$$

Den Berechnungen werden zwei konstante Rotorwinkelgeschwindigkeiten:

1. $\Omega = 471,2 \text{ s}^{-1}$ (Drehzahl : 4500 min^{-1})
2. $\Omega = 732,7 \text{ s}^{-1}$ (Drehzahl : 7000 min^{-1})

zugrundegelegt.

Die tragende Funktion des Ölfilmes eines Gleitlagers kann jedoch nicht allein durch zwei Feder- und zwei Dämpferkonstanten erfaßt werden. Der Zusammenhang zwischen den Lagerkräften $f_{y_{3/7}}$ und $f_{z_{3/7}}$ und den Rotorauslenkungen an den Lagerstellen, $y_{3/7}$ und $z_{3/7}$ sowie deren Ableitungen $\dot{y}_{3/7}$ und $\dot{z}_{3/7}$ ist von weit komplizierterer Natur. Für das kurze Kreiszyylinderlager ($B < 2 \cdot R$) gilt mit einigen, hier nicht näher betrachteten Vereinfachungen [4]

$$\begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix}_{3/7} = \int_0^{2\pi} \bar{p}(\varphi)_{3/7} \cdot \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot B \cdot r \cdot d\varphi, \quad (19)$$

wobei sich der über die Lagerbreite B gemittelte Öldruck \bar{p} nach

$$\begin{aligned} \bar{p}(\varphi)_{3/7} &= \frac{B^2 \cdot \eta}{2 \cdot h(\varphi)_{3/7}^3} \cdot [\Omega \cdot (y_{3/7} \cdot \cos \varphi - z_{3/7} \cdot \sin \varphi) \\ &+ 2 \cdot (\dot{y}_{3/7} \cdot \sin \varphi + \dot{z}_{3/7} \cdot \cos \varphi)] \end{aligned} \quad (20)$$

ergibt, mit $h(\varphi)$

$$h(\varphi) = R - r - y_{3/7} \cdot \sin \varphi - z_{3/7} \cdot \cos \varphi, \quad (21)$$

der Höhe des Ölpaltes (vgl. Bild 2).

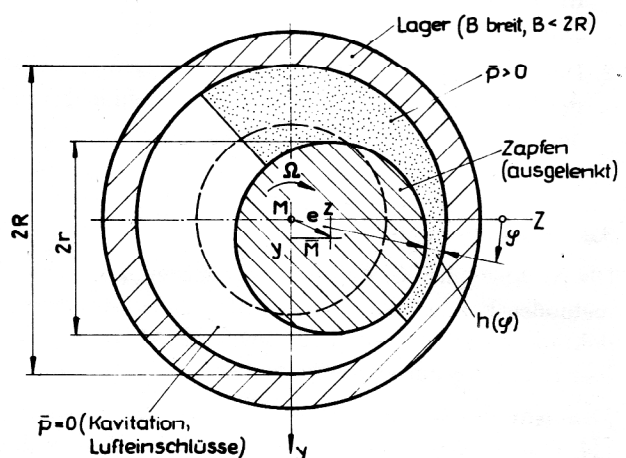


Bild 2
Verhältnisse am hydrodynamischen kurzen Kreiszyylinderlager

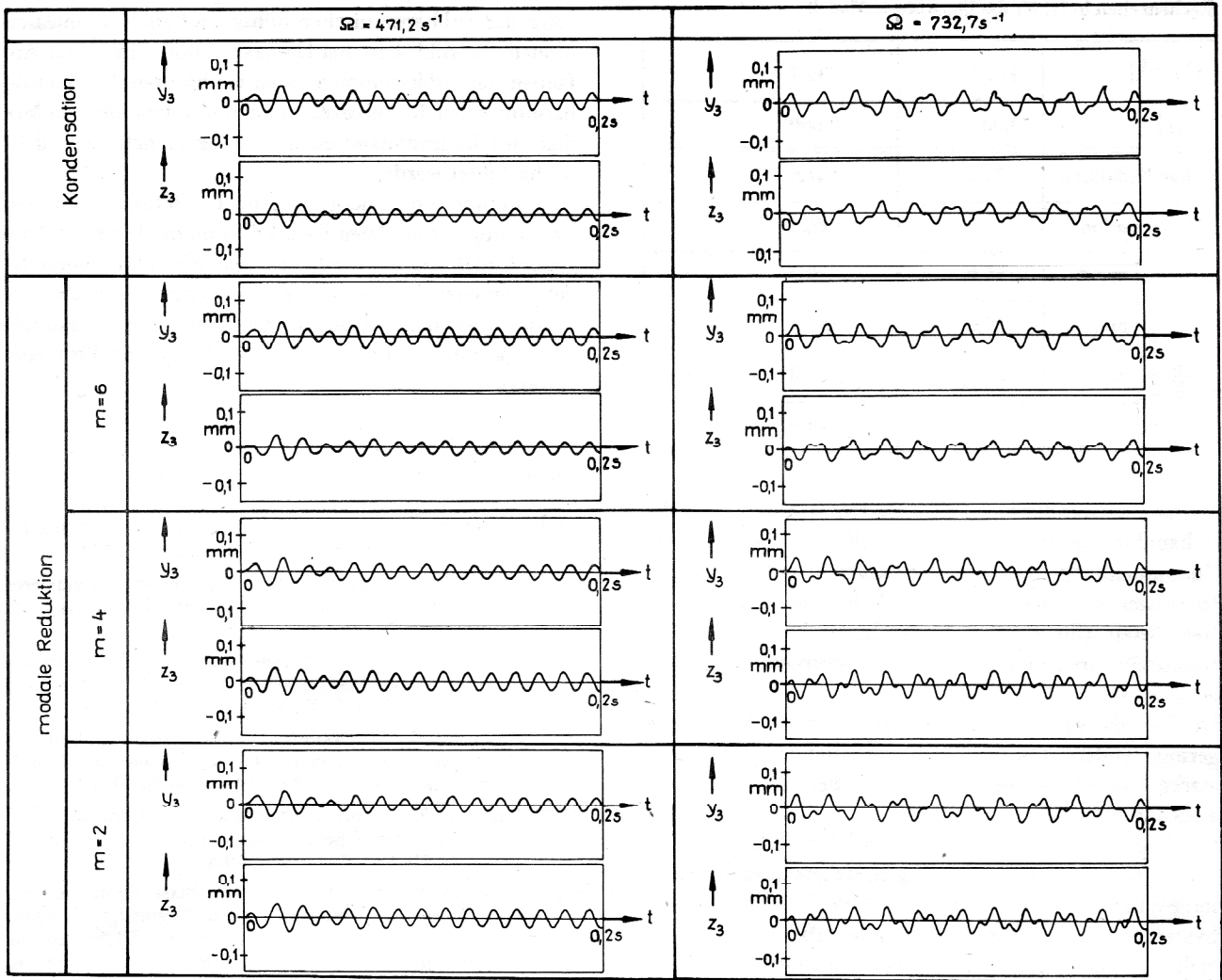


Bild 3
Auslenkungen von Knoten 3 in Abhängigkeit von der Reduktionsmethode

Dieser relativ komplizierte Zusammenhang ist für die numerische Behandlung sehr unbequem. In [14] wurde deshalb dieser Zusammenhang linearisiert

$$\begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix}_{3/7} = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}_{3/7} + \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{3/7} \quad (22)$$

und die Feder- und Dämpferzahlen der beiden gleichen Lager sind experimentell ermittelt worden.

Dabei gilt:

$$c_{yz} \neq c_{zy} \quad \text{und}$$

$$b_{yz} \neq b_{zy}$$

Die Unsymmetrien in der Steifigkeitsmatrix des Ölfilmes bedingen die Möglichkeit der Instabilität des Systems, welche mit steigender Drehzahl zunimmt (da $c_{yz} \rightarrow -c_{zy}$).

Mit TANDYS wurden Berechnungen mit dem linearisierten Modell (Gl. (22) für die Lagerkräfte) und mit dem

nichtlinearen Modell (Gln. (19), (20) und (21) für die Lagerkräfte) durchgeführt, wobei jeweils Kondensation und modale Reduktion verglichen wurden. (Das linearisierte Modell ist für die Rechnung mit TANDYS ebenfalls nichtlinear, da die unsymmetrischen Außerdiagonalelemente der Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen des Ölfilmes nicht im linearen Grundmodell berücksichtigt werden konnten. Diese Anteile wurden im Vektor des Pseudoerregkräfte \vec{f}_{nil} erfasst.)

In Bild 3 sind die berechneten Zeitverläufe der y- und z-Auslenkungen am Knoten 3 für das linearisierte Modell dargestellt. Es ist hieraus zu erkennen, daß zwischen den Ergebnissen, die mit der Kondensationsmethode, und denen, die mit Hilfe der modalen Reduktion unter Einbeziehung der niedrigsten 6 ESF des linearen Grundmodelles erzielt worden sind, praktisch kein Unterschied besteht.

Außerdem wird aus Bild 3 sichtbar, daß die Eigenschwingungen bei der Rotordrehzahl von 4500 min^{-1} rasch abklingen, während sie bei 7000 min^{-1} erhalten bleiben (Stabilitätsgrenze).

Als Integrationsmethode wurde das Newmark-Verfahren mit $\beta = 0,25$ und $\vartheta = 0,5$ benutzt bei Schrittweiten von $h = 0,001 \text{ s}$ (bei 4500 min^{-1}) bzw. $h = 0,0005 \text{ s}$ (bei 7000 min^{-1}). Eine Angabe der benötigten CPU-Zeiten auf einer ESER 1040 Anlage für die Integration von $0 < t < 0,2 \text{ s}$ erfolgt in Tabelle 1.

Tabelle 1
Rechenzeiten in [s] für das linearisierte Modell

Ω [s^{-1}]		471,3	732,7
h [s]		0,001	0,0005
ohne Reduktion		71,4	141,6
Kondensation		42,5	83,3
modale Reduktion	m = 6	55,2	80,2
	m = 4	35,0	49,8
	m = 2	22,7	34,8
	m = 1	11,2	19,8

Weitaus aufwendiger als die „lineare“ Rechnung ist die Behandlung des nichtlinearen Modelles. Der komplizierte Zusammenhang zwischen Lagerkräften und Zapfenauslenkungen erfordert einen erheblichen Mehraufwand an Rechenzeit. (So wurde z. B. das Integral (19) bei jedem Iterationsschritt mit Hilfe der Trapezregel numerisch ausgewertet.)

Die Nichtlinearität der Lagerkräfte ist stark, denn schon geringe Änderungen der Zapfenverschiebungen bedingen starke Druckänderungen, besonders bei großen Zapfenauslenkungen [4].

Die Ergebnisse der „nichtlinearen“ Simulation sind in Bild 4 zusammengefaßt. Im Gegensatz zur linearen Rechnung prägen hier Subharmonische zweiter Ordnung die Systemantwort. Die mit der Kondensationsmethode erzielten Verläufe stimmen wiederum gut mit denen überein, die mit der modalen Reduktion unter Einbeziehung der ersten 6 ESF des linearen Grundsystems berechnet wurden.

Es ist zu beobachten, daß die Zapfenauslenkungen infolge der Subharmonischen höher sind als beim linearen Modell. In Bild 4 ist bei Drehzahl 7000 min^{-1} ein Anfachen der Subharmonischen zu beobachten. Solche subharmonischen Resonanzen können mit dem linearen Modell des hydrodynamischen Gleitlagers natürlich nicht nachgebildet werden.

Aus methodischer Sicht ist es noch interessant, daß bei Benutzung der modalen Reduktionsmethode auch solche typisch nichtlineare Erscheinungen, wie subharmonische Schwingungen bei harmonischer Erregung nachgewiesen werden konnten, was darauf hindeutet, daß die modale Methode durchaus auch für stark nichtlineare Probleme einsetzbar ist.

LITERATUR

- [1] Gumpert, W.: Einsatz von Ad-hoc Modellen in der Maschinendynamik. Diss. (B), TH Karl-Marx-Stadt, 1984.
- [2] Krempel, R.: Ermittlung linearer Steifigkeitskennwerte von Verbindungsstellen an Werkzeugmaschinen. Diss. (A), TH Karl-Marx-Stadt, 1984.
- [3] Hollburg, U.: Das Verhalten von elektrisch angetriebenen dreh- und biegeelastischen Rotoren beim Hochlauf. Fortschr.-Ber. VDI-Z., Reihe 11, Nr. 42, 1981.
- [4] Feuchte, B.: Drehzahlfremde Biegeschwingungen an gleitgelagerten Rotoren von Kreiselpumpen und Kreiselpverdichtern. Diss. (A), TH Karl-Marx-Stadt, 1984.
- [5] Kaltoven, K.: Berechnungsmethoden für transiente, lokal nichtlineare dynamische Systeme und ihre Anwendung. Diss. (A), TH Karl-Marx-Stadt, 1986.
- [6] Gumpert, W.: Zum Verfahren von Blaes für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. IV. Int. Kongreß über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Berichte Bd. 2, Weimar 1967, S. 73 – 75.
- [7] Albrecht, P.: Die numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Hanser-Verlag München, 1979.

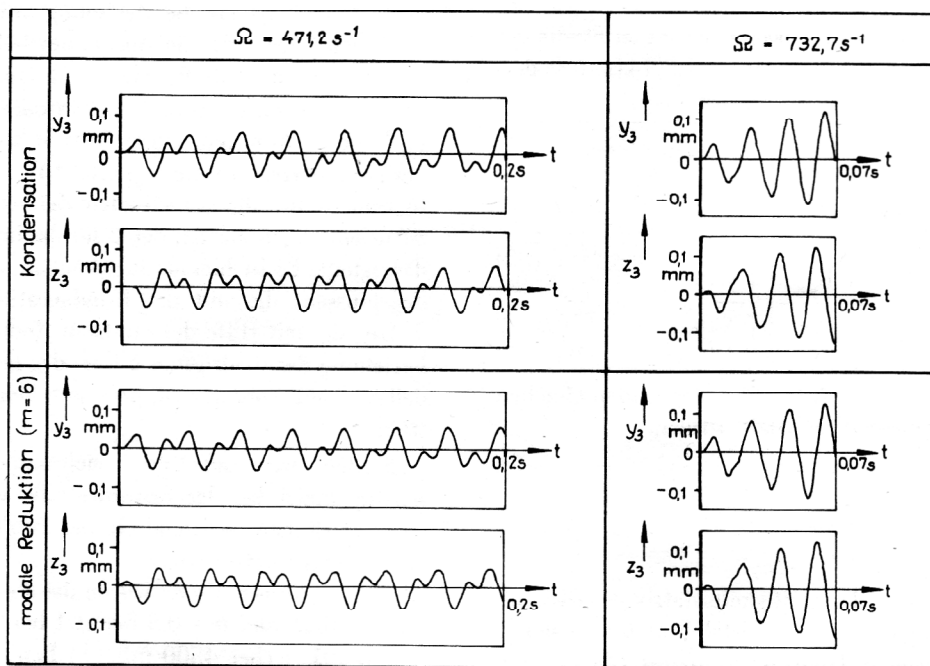


Bild 4
Auslenkungen von Knoten 3 (nichtlineares Modell)

- [8] Noor, A. K.: Survey of computer programs for solution of nonlinear structural and solid mechanics problems. *Comp. & Struct.* 13, 1981, S. 425 – 465.
- [9] Bathe, K. J., Gracewski, S.: On nonlinear dynamic analysis using substructuring and mode superposition. *Comp. & Struct.* 13, 1981, S. 699 – 707.
- [10] Craig, C. R., Bampton, C. C.: Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA-Journal* 7, 1968.
- [11] Burkhardt, R.: Einsatz der Substruktur-Modalsynthese zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens von Maschinengestellen. Diss. (A), TH Karl-Marx-Stadt, (in Vorbereitung).
- [12] Kaltfofen, K.: Anwendungsbeschreibung zum Programm TANDYS. TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinen-Bau-elemente, 1985.
- [13] Pausch, E., Waldeck, D.: Nutzeranleitung zum Programm FEMROT. TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Maschinen-Bau-elemente, 1982.
- [14] Glienicke, J.: Feder- und Dämpferkonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluß auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors. Diss., TH Karlsruhe, 1966.

Bezeichnungen

b	Dämpferkonstante
\underline{B}	Dämpfungsmatrix (konstant, reell, symmetrisch)
c	Federkonstante
\underline{C}	Steifigkeitsmatrix (konstant, reell, symmetrisch)
$\underline{\hat{C}}$	Koeffizientenmatrix (konstant, reell, symmetrisch)
d	Durchmesser
E	Elastizitätsmodul
\underline{E}	Einheitsmatrix
\vec{f}	Vektor der generalisierten Kräfte

G	Gleitmodul
h	Schrittweite
$h(\varphi)$	Höhe des Ölpaltes
J	Massenträgheitsmoment
l	Länge
m	Anzahl der Eigenschwingformen
\underline{M}	Massenmatrix (konstant, reell, symmetrisch)
n	Dimension
\vec{p}	Vektor der modalen Koordinaten
$\bar{p}(\varphi)$	Öldruck
\vec{q}	Vektor der generalisierten Koordinaten
t	Zeit
\underline{T}	Transformationsmatrix
U	Unwucht
\vec{v}	Eigenvektor
\underline{Y}	Modalmatrix
y	Variable
β	Konstante
η	Viskosität
ϑ	Konstante
$\underline{\Delta}$	modale Dämpfungsmatrix
ρ	Dichte
φ	Winkelkoordinate
ω	Eigenkreisfrequenz
Ω	Winkelgeschwindigkeit
$\underline{\Omega}$	modale Steifigkeitsmatrix