

# FEM-Algorithmen für geometrisch und physikalisch nichtlineare Aufgaben der Statik und Stabilität räumlicher Konstruktionen

V. V. Kiričevskij, A. S. Sacharov, I. A. Solovej

Die Formierung und Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme machen den Hauptanteil des Aufwandes bei der Analyse räumlicher Konstruktionen aus und erfordern große Speicherkapazitäten der EDVA. Deshalb hat die Erarbeitung effektiver Methoden zur Lösung nichtlinearer Aufgaben große praktische Bedeutung. Die Analyse der existierenden Methoden zeigt, daß Kombinationen von Iterations- und inkrementellen Prozeduren am effektivsten sind.

Inkrementelle Algorithmen gestatten nach jedem Belastungsschritt, den Spannungs- und Formänderungszustand der Konstruktion zu beurteilen. Die Konvergenz kann durch das Regulieren der Größe der Belastungsinkremente erreicht werden. Bei Anwendung von Abstiegsalgorithmen nach einem Parameter kann dieser so gewählt werden, daß die Belastungs-Durchbiegungs-Kurve (weiter „p-u“-Kurve) erfolgreich durchlaufen wird. Die rationelle Auswahl der Parameter erlaubt, die Aufgabe mit maximalen Lastinkrementen und in kürzester Zeit zu lösen.

Iterationsmethoden beruhen auf vielfacher Lösung linearer oder linearisierter Gleichungssysteme. Sie sind am meisten verbreitet, insbesondere die Newton-Raphson-Methode [1] und die modifizierte Methode von Newton-Kantorovič [2], und gestatten hinreichend genaue Lösungen. Untersuchungen [3] bis [5] und andere zeigen, daß für die Newton-Raphson-Methode der Rechenaufwand hoch ist, da für jeden Iterationsschritt die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems gebildet und invertiert werden muß. Die modifizierte Methode von Newton-Kantorovič hat zwar geringere Konvergenzgeschwindigkeit, erfordert aber für schwach nichtlineare Aufgaben wesentlich weniger Rechenzeit, da die Koeffizientenmatrix nur beim ersten Iterationsschritt gebildet und invertiert wird. Im Vergleich zur Newton-Kantorovič-Methode besitzt die Newton-Raphson-Methode in stark nichtlinearen Bereichen, insbesondere in Umgebung von Bifurkationspunkten, eine große Instabilität wegen der schlechten Kondition der linearisierten Koeffizientenmatrix.

Für die FEM-Beziehungen [6] bis [8] ist der Rechenaufwand zur Triangularisierung der Koeffizientenmatrix des kanonischen Gleichungssystems etwa siebenmal höher als der Aufwand zur Berechnung der rechten Seite. Deshalb erweist sich ein kombinierter Algorithmus als zweckmäßig, wo der Abstiegsparameter mit den Schritten verändert wird, aber die linearisierte Koeffizientenmatrix nur zu Beginn eines jeden Schrittes berechnet wird und im Prozeß der Iteration konstant bleibt. So ist also die Anzahl der inneren Iterationen bei der modifi-

zierten Methode von Newton-Kantorovič sechs. Die Formel des Algorithmus besitzt die folgende Form:

$$\left[ K_n^1 \right] \cdot \left\{ u_n^{m+1} \right\} = \left[ K_n^1 \right] \left\{ u_n^m \right\} - \left\{ R \left( \left\{ u_n^m \right\}, \lambda_n \right) \right\} \Delta \lambda_n \quad (1)$$

$n$  = Nummer des Abstiegschrittes nach einem Parameter

$m$  = Nummer des Iterationsschrittes

$\{ u \}$  = Formänderungsvektor

$[ K ]$  = linearisierte Steifigkeitsmatrix

$\{ R \}$  = Vektor der Knotenungleichgewichtskräfte

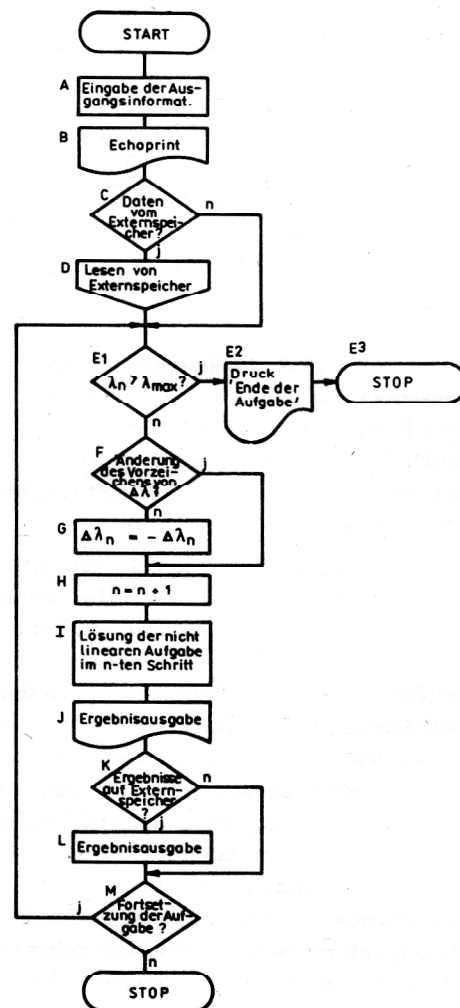
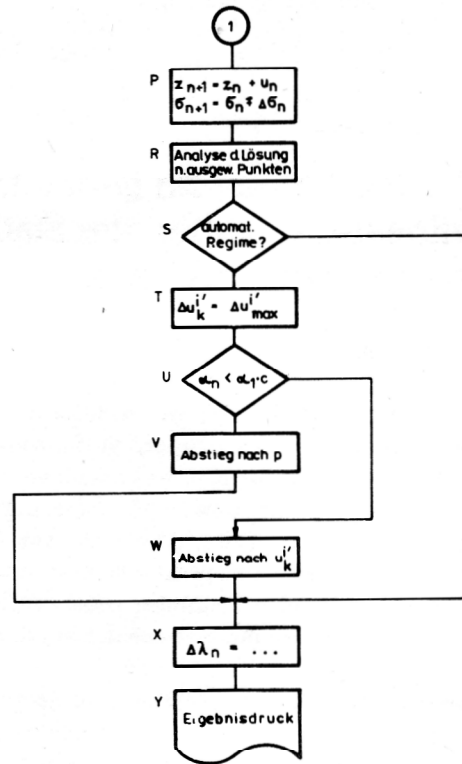
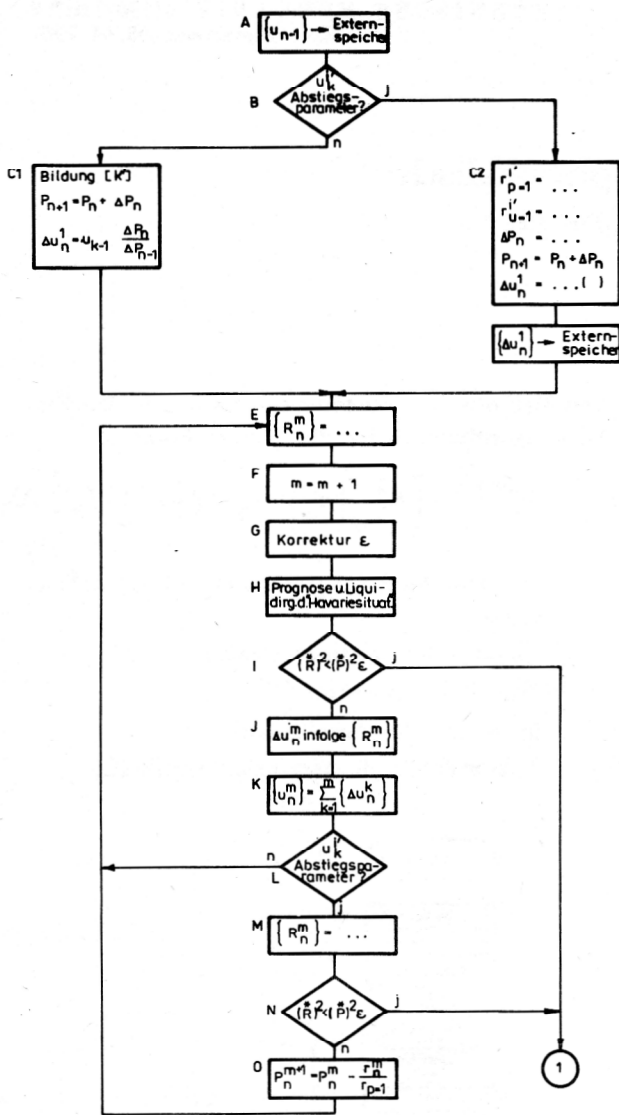


Bild 1  
Allgemeiner Algorithmus zur Lösung geometrisch nichtlinearer Aufgaben



**Bild 2**  
Algorithmus zur Lösung einer nichtlinearen Aufgabe für das  $n$ -te Belastungszinkrement

Auf Bild 1 und 2 sind die Programmablaufpläne zur Lösung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Aufgaben bei der Berechnung von Platten und Scheiben sowie hochelastischer Konstruktionen dargestellt. Die Beschreibung der Elemente der PAP erfolgt entsprechend ihrer Reihenfolge auf den Bildern 1 und 2.

1. In den ersten 2 Moduln A und B werden die Ausgangsdaten eingegeben und gedruckt. Hier werden die Parameter des Algorithmus angegeben und kontrolliert. Sie werden so bestimmt, daß ein reibungsloser und fast optimaler (im Verbrauch der Rechenzeit) Prozeß der Lösung gewährleistet ist. Die Werte der Parameter des Algorithmus werden auf der Grundlage der bei dem Nutzer vorhandenen Ressourcen (Speicherplatz und Rechenzeit der EDVA, Arbeitsregime u. a.) und Erfahrungen bei der Lösung der betrachteten Aufgaben ausgewählt.
2. Wenn sich die Lösung der Aufgabe mit einigen Belastungszinkrementen fortsetzt, werden im Modul D die erforderlichen Informationen von einem externen Speicher gelesen. Damit ist die Vorbereitung des Schrittalgorithmus abgeschlossen.
3. Zu Beginn eines jeden neuen Belastungszinkrementes wird im Modul E1 die Bedingung geprüft, ob der aktuelle Abstiegsparameter  $\lambda_n$  nicht seinen (angegebenen) maxi-

malen Wert  $\lambda_{\max}$  erreicht hat. Bei Erfüllung dieser Bedingung stellt der Algorithmus seine Arbeit ein, und die Aufgabe wird als beendet betrachtet.

4. In einer Reihe von EDVA erlauben die Operationssysteme (OS) ein Steuern der Lösungsalgorithmen im interaktiven Regime. Als Beispiel soll der Rechner BESM-6 dienen mit dem OS „Dubna“ [9]. Der Algorithmus sieht die Änderung einiger Parameter im interaktiven Regime vor. Dazu gehört die Vorzeichenänderung des Abstiegsparameters  $\lambda_n$  im Modul G. Diese Prozedur ist notwendig, z. B. für die Rückkehr auf die „ $p$ - $u$ “-Kurve, wenn die Lösungsgenauigkeit des nichtlinearen Gleichungssystems erhöht (oder gesenkt) werden muß.
5. Die Moduln E, F, G erfüllen vorbereitende Operationen für den Algorithmus zur Lösung nichtlinearer Aufgaben im aktuellen Belastungszinkrement  $n$ .
6. Der ausführliche PAP des Moduls I ist auf dem Bild 2 dargestellt und weiter unten beschrieben.
7. Zur Analyse des Verhaltens der Konstruktion sind Zwischenergebnisse auszudrucken, weiterhin müssen in Iterationsalgorithmen der Druck der Parameter und von Zwischenergebnissen für das Dechiffrieren von „Havarie-situationen“ und für statistische Analysen organisiert werden. Dadurch können ihre Werte effektiver gewählt werden.
8. Bei der Lösung jeder Aufgabe erarbeitet der Nutzer seine Resultatsspeicherung auf dem externen Speicher in Abhängigkeit von den Ressourcen, der Wichtigkeit der Aufgabe und anderer Bedingungen. Die Parameter, die den Speicherplatz auf dem externen Speicher im Modul K regulieren, können sein: Lösungszeit auf der EDVA, Zahl der Lastinkremente, besondere Punkte auf der „ $p$ - $u$ “-Kurve und andere.

9. Im Modul M wird geprüft, ob der Nutzer den Abbruch der nichtlinearen Rechnung im interaktiven Regime verfügt hat. Wenn während der Nutzung nicht im interaktiven Regime gearbeitet wird, dann führt der Algorithmus die Lösung im automatischen Regime nach Parametern aus, die selbständig in Abhängigkeit von der Konvergenzgeschwindigkeit beim Iterationsprozess und den Eigenschaften der „p-u“-Kurve korrigiert werden.

Im folgenden Abschnitt wird der Algorithmus zur Lösung nichtlinearer Aufgaben im aktuellen n-ten Abstiegschritt untersucht (Bild 2).

1. Im ersten Modul wird die Lösung des vorhergehenden Schrittes (n-1) auf den externen Speicher geschrieben. In diesem Fall ist die Lösung der Formänderungsvektor  $\{u_{n-1}\}$  infolge des Zuwuchses des Abstiegsparameters  $\Delta\lambda_{n-1}$ , welcher einem Zuwuchs des Belastungsvektors  $\{\Delta p_{n-1}\}$  entspricht. Die Notwendigkeit dieser Operation ergibt sich daraus, daß die Lösung  $\{u_{n-1}\}$  im Prozeß der Iteration wiederholt gebraucht werden kann (für die Wiederherstellung der Lösung bei „Havariesituationen“).

2. Als Abstiegsparameter kann man entweder den Parameter p, welcher die Belastung definiert (Druckintensität, Wert von Einzellasten, Parameter der kombinierten Belastung u. a.) oder die Verschiebung eines charakteristischen Punktes k der Konstruktion  $\{u_k^i\}$  nehmen. Numerische Experimente zeigten, daß die Effektivität des Algorithmus zunimmt, wenn als charakteristischer Knoten jener genommen wird, in welchem der Zuwuchs des Formänderungsvektors am größten war. Rationell ist die Auswahl des charakteristischen Knotens, wenn dieser aus einer vorher angegebenen Zahl von Knoten erfolgt. Gewöhnlich kann man bei Analyse des Berechnungsmodells der Konstruktion die Bereiche der größten Verformung angeben.

In Abhängigkeit von der Art des Abstiegsparameters (p oder  $u_k^i$ ) erfolgt die Lösung der Aufgabe auf zwei Wegen (entweder Modul C1 oder Modul C2.)

3. Der Abstiegsparameter ist die Größe p (Modul C1). Bei bekannten Werten der Komponenten des Spannungsvektors  $\{\sigma_{n-1}^{ij}\}$  und der Knotenkoordinaten der verformten Schale  $\{z_{n-1}^i\}$  kann man die Steifigkeitsmatrix des linearisierten Gleichungssystems  $[K_n^1]$  ausrechnen, wie in [6] oder [10] beschrieben. Der aktuelle Wert des Parameters p wird folgendermaßen bestimmt:

$$P_{n+1} = P_n + \Delta p_n \quad (2)$$

Durch Extrapolation werden die Anfangsbedingungen gestellt (1. Annäherung der gesuchten Lösung). Die Wahl der Extrapolationsformeln hat Einfluß auf die Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung und steht in Verbindung mit den verfügbaren Ressourcen des externen Speichers (für die Speicherung der Vektoren  $\{\Delta u_{n-1}\}$ ,  $\{\Delta u_{n-2}\}$ ,  $\{\Delta u_{n-3}\}$  usw.). In diesem Fall wird die Anfangslösung  $\{\Delta u_n^1\}$  in linearer Abhängigkeit von der Lösung des vorhergehenden Schrittes  $\{\Delta u_{n-1}\}$  und der Größe des Zuwuchses  $\Delta p_n$  nach der Formel

$$\left\{ \Delta u_n^1 \right\} = \left\{ \Delta u_{n-1} \right\} \frac{\Delta p_n}{\Delta p_{n-1}} \quad (3)$$

gebildet.

4. Der Abstiegsparameter ist die Verschiebung des charakteristischen Knotens  $u_k^i$ . In diesem Fall entsteht die Aufgabe, den Parameter des Belastungsincrementes  $\Delta p_n$  und des Formänderungsvektors der Schale  $\{\Delta u_n^1\}$  nach der gegebenen Verschiebung des charakteristischen Knotens zu bestimmen. Der Algorithmus zur Lösung dieser Aufgabe im Modul C2 ist der folgende:

a) Im charakteristischen Knoten k ist in der notwendigen Richtung  $i'$  eine Bindung auferlegt, welche die Änderung der vorgeschriebenen Verschiebung verhindert.

b) Es wird die Reaktion bei erzwungener Einheitsverschiebung des charakteristischen Knotens  $r_{u=1}^{i'}$  gebildet und damit die Reaktion infolge der vorgegebenen Formänderung des charakteristischen Knotens  $-r_{u=1}^{i'} u_k^i$ .

c) Aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems wird die Stützenreaktion infolge der auf die Schale wirkenden Belastung ermittelt, deren Parameter  $p = 1 - r_{p=1}^{i'}$  ist.

d) Für die Belastung  $\Delta p_n$ , die eine Verschiebung im charakteristischen Knoten von der Größe  $u_k^i$  hervorruft, ist die Stützenreaktion gleich  $\Delta p_n \cdot r_{p=1}^{i'}$ .

e) Aus der Gleichgewichtsbedingung im charakteristischen Knoten

$$u_k^i \cdot r_{u=1}^{i'} + p_n \cdot r_{p=1}^{i'} = 0 \quad (4)$$

wird die unbekannte Größe gebildet

$$\Delta p_n = -u_k^i \cdot \frac{r_{u=1}^{i'}}{r_{p=1}^{i'}} \quad (5)$$

f) Die Verschiebung der übrigen Knoten der Schale infolge Belastung wird nach der Formel

$$\left\{ \Delta u_n^1 \right\} = u_k^i \left\{ u_{u=1} \right\} + \Delta p \left\{ u_{p=1} \right\} \quad (6)$$

gebildet, wobei  $\{u_{u=1}\}$  und  $\{u_{p=1}\}$  die Vektoren der Knotenverformung der Schale sind, welche bei Ausführung der Punkte b) und c) erhalten werden.

Den aktuellen Wert des Parameters p bestimmt man nach der Formel (2).

5. Aus Überlegungen, die in der Beschreibung des Moduls A dargelegt wurden, wird im Modul D der Formänderungsvektor  $\{\Delta u_n^1\}$  auf den externen Speicher geschrieben.

6. Die vorhandene Lösung (nach der ersten Iteration  $\{\Delta u_n^1\}$  oder nach der m-ten  $\{\Delta u_n^m\}$ ) wird in die nichtlineare FEM-Gleichung eingesetzt. Im Modul E erhält man den Vektor der Ungleichgewichtskräfte  $\{R_n^m\}$ , mit Hilfe dessen die Konvergenz der erhaltenen Lösung beurteilt werden kann. Die Berechnung des Vektors der Ungleichgewichtskräfte kann auf der Basis der folgenden physikalischen Gleichungen verwirklicht werden.

– verallgemeinertes Hookesches Gesetz

$$\sigma_{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} C^{ijkl} \left( c_k^{p'} \frac{\partial u^p}{\partial x^l} + c_l^{p'} \frac{\partial u^p}{\partial x^k} + \frac{\partial u^p}{\partial x^k} \frac{\partial u^p}{\partial x^l} \right), \quad (7)$$

$$\text{wobei } c_k^{p'} = \frac{\partial z^p}{\partial x^k}, \quad (8)$$

$z^p, x^k$  die Koordinaten des kartesischen und des lokalen krummlinigen Koordinatensystems sind.

– Integrales Deformationsgesetz

$$\sigma_{ij} = \int_0^{\epsilon_{kl}} \overset{*}{C}{}^{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (9)$$

wobei  $\overset{*}{C}{}^{ijkl}$  die Komponenten des Tensors der elastischen Konstanten in der verformten Metrik sind.

– Deformationsgesetz nach Seth

$$\sigma_{ij} = \lambda j'_1 G^{ij} + 2\mu G^{mi} G^{nj} \epsilon_{mn} \quad (10)$$

Hier ist  $j'_1$  die erste Invariante des Almansi-Hamel-Verzerrungstensors. Er ist gleich:

$$j'_1 = \frac{1}{2} (3 - G^{ij} g_{ij}), \quad (11)$$

wobei  $G^{ij}, g_{ij}$  die Komponenten des Metrikensors in der verformten bzw. unverformten Metrik sind

– Deformationsgesetz nach Signorini

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & [\lambda j'_1 + c j'_2 + \frac{1}{2} (\lambda + \mu - \frac{c}{2}) j'^2_1] G^{ij} \\ & + 2 [\mu - (\lambda + \mu + \frac{c}{2}) j'_1] \epsilon_{mn} G^{mi} G^{nj} \\ & + 2c \epsilon_{km} G^{mi} \epsilon_{nt} G^{nk} G^{tj} \end{aligned} \quad (12)$$

wobei  $j'_2$  die zweite Invariante des Almansi-Hamel-Verzerrungstensors ist, die sich nach der folgenden Formel berechnet:

$$j'_2 = \frac{1}{4} (\frac{g}{G} g^{ij} G_{ij} - 2G^{ij} - 2G^{ij} g_{ij} + 3) \quad (13)$$

7. In der aktuellen Iteration wird die Berechnung beendet. Weiter wird die Lösung  $\{\Delta u_n^m\}$  analysiert.

8. Wenn notwendig, wird der Iterationsparameter  $\epsilon$  im Modul G im interaktiven oder automatischen Regime korrigiert. Dazu erhöht (oder vermindert) man den Parameter  $\epsilon$  in der Größenordnung seines Wertes. Der Iterationsprozeß wird beendet, wenn

$$(\overset{*}{R})^2 / (\overset{*}{p})^2 \leq \epsilon$$

ist. Eine ausreichende Genauigkeit der Ergebnisse ist im allgemeinen erreicht, wenn  $\epsilon = 10^{-2}$  bis  $10^{-4}$  ist.

9. Im Iterationsprozeß (1) ist ein starkes Anwachsen des Vektors der Ungleichgewichtskräfte  $\{R_n^m\}$  möglich. Numerischer Ausdruck für die Größe der Abweichung ist die Quadratsumme der Komponenten des Vektors der Ungleichgewichtskräfte  $(R)^2$ . Wenn  $(R)^2 / (\overset{*}{p})^2 > N$  ist, wird der Iterationsprozeß im Modul H abgebrochen und zum Anfang der Iteration zurückgesprungen. Zur Verminderung der Nichtlinearität der Aufgabe wird der Abstiegsparameter durch  $N_A$  geteilt. Diese Maßnahme wird auch angewendet, wenn die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsprozesses stark abnimmt (die Anzahl der Iterationen eine vernünftige Zahl  $K_A$  übersteigt). Für viele Aufgaben werden die folgenden Werte der Parameter empfohlen:

$$N = 4 \text{ bis } 9, \quad N_A = 4, \quad K_A = 20.$$

10. Wenn die Bedingung

$$(\overset{*}{R})^2 / (\overset{*}{p})^2 < \epsilon \quad (14)$$

erfüllt ist, nimmt man an, daß die Lösung  $\{u_n^m\}$  die nichtlineare Gleichung mit der geforderten Genauigkeit befriedigt und der Iterationsprozeß wird beendet. Andernfalls wird die Iteration fortgesetzt.

11. Der Vektor der Ungleichgewichtskräfte  $\{R_n^m\}$  infolge der Lösung  $\{\Delta u_n^m\}$  wird im Modul J in die rechte Seite des linearisierten Gleichungssystems als Belastungsanteil eingetragen.

12. Im Modul K wird der Formänderungsvektor  $\{u_n^m\}$  durch Addition des Zuwachses  $\{\Delta u_n^m\}$  aktualisiert.

$$\{u_n^m\} = \{u_n^{m-1}\} + \{\Delta u_n^m\} \quad (15)$$

13. Wenn der Abstiegsparameter  $p$  ist, erfolgt ein Rücksprung in den Modul E und der Iterationsprozeß wird fortgeführt.

14. Wenn der Abstiegsparameter  $u_k^i$  ist, wird im Modul M, wie auch im Modul E, der Vektor der Ungleichgewichtskräfte  $\{R_n^m\}$  infolge des aktuellen Formänderungsvektors  $\{u_n^m\}$  bestimmt (die Verformung im charakteristischen Knoten K wird nicht aktualisiert, sondern bleibt gleich der vorgeschriebenen Größe  $u_k^i$ ).

15. Im Modul N wird die Bedingung (14) geprüft.

16. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, wird im Modul O der Belastungsparameter  $p_m$  nach der Formel

$$p_n^{m+1} = p_n^m - \frac{r_n^m}{r_{p=1}^m} \quad (16)$$

aktualisiert, wobei  $r_n^m$  die Stützenreaktion im charakteristischen Knoten K ist, aufgrund der erzwungenen Verschiebung der Größe  $u_k^i$ . Nach Ermittlung des aktuellen Vektors  $\{u_n^m\}$  und des Parameters  $p_n^{m+1}$  wird der Lösungsprozeß im Modul E fortgesetzt.

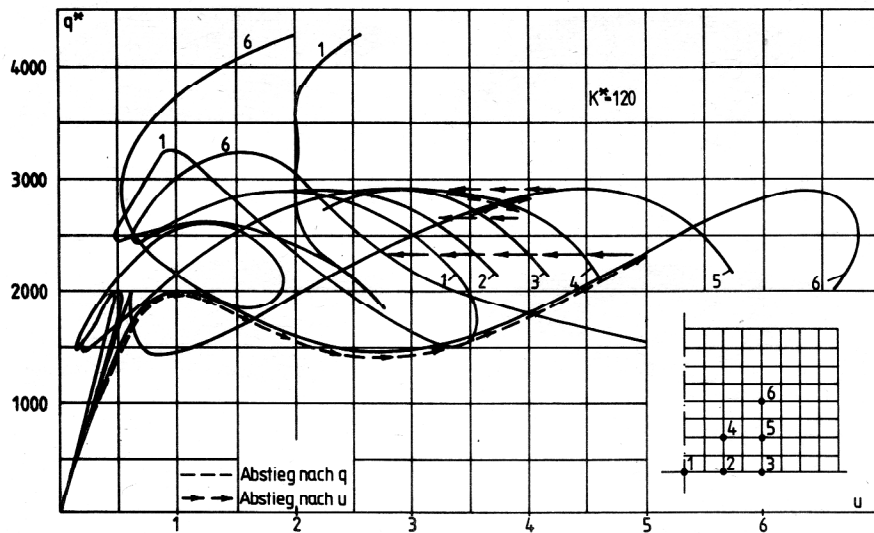
17. Wenn im Iterationsprozeß die Bedingung (14) erfüllt ist (in den Modulen I oder N), wird die Berechnung im Block P fortgeführt. In diesem Block wird die Änderung des Spannungs- und Formänderungszustandes der Schale im aktuellen Belastungszustand fixiert, und es erfolgt die Vorbereitung der Parameter des Algorithmus für den folgenden Schritt. Die Knotenkoordinaten des FEM-Modells der Schale verändern sich wie folgt:

$$\{z'_{n+1}\} = \{z'_n\} + \{u'_n\} \quad (17)$$

und das Spannungsfeld der Konstruktion:

$$\{\sigma'_{n+1}\} = \{\sigma'_n\} + \{\Delta \sigma'_n\} \quad (18)$$

18. Bei der Lösung nichtlinearer Aufgaben der Stabilität und des nachkritischen Verhaltens von Schalenkonstruktionen kann man auf der „p-u“-Kurve Punkten begegnen, in deren Umgebung die linearisierten Koeffizientenmatrizen des Gleichungssystems schlecht konditioniert sind, so daß bei kleinen Änderungen der rechten Seiten beliebig große Änderungen der Verschiebung auftreten. Das sind Bifurkationspunkte, Maxima und Minima der „p-u“-Kurve. In solchen Punkten erfolgt gewöhnlich der Übergang von stabilen Gleichgewichtszuständen zu instabilen und umgekehrt. Sie haben daher große Bedeutung für die Analyse der Lösung und des Stabilitätsverhaltens der Schale.



**Bild 3**  
Belastungs-Durchbiegungsdiagramm für hohe Kugelschalen über quadratischem Grundriß

Die Untersuchung des nachkritischen Verhaltens der Schale beruht auf dem stetigen Abstieg auf Gleichgewichtszweigen und ist sehr verbreitet [3], [11], [12]. Die Regularisierung im Bereich singulärer Punkte wird durch Wechsel des Abstiegsparameters verwirklicht. Der Belastungsparameter, mit dem man die Lösung der Aufgabe häufig beginnt, wird durch die Verschiebung eines charakteristischen Punktes ersetzt. Die Lage der singulären Punkte findet man mit Hilfe einer qualitativen Theorie, nach der die Eigenwerte der linearisierten Matrix ermittelt werden [13]. Wenn solche singulären Punkte innerhalb des Integrationsintervalls vorhanden sind, ändern die Eigenwerte das Vorzeichen, im singulären Punkt sind sie gleich Null. Folglich muß man die Zahl der Eigenwerte bestimmen, die innerhalb eines Abstiegsschrittes das Vorzeichen wechseln. Zu diesem Zweck wird die Koeffizientenmatrix in Dreiecksform überführt. Die Zahl der negativen Diagonalelemente stimmt mit der Zahl der negativen Eigenwerte überein. Bei der Analyse der Stabilität der nachkritischen Gleichgewichtsform weist bereits ein negativer Eigenwert auf instabile Schalenform hin.

Der beschriebene Algorithmus zur Ermittlung singulärer Punkte bei der Lösung nichtlinearer Stabilitätsaufgaben (Modul R) ist effektiver als die in den Arbeiten [11], [14] angeführten Verfahren. Dort wird aus der Vorzeichenänderung der Determinante der Koeffizientenmatrix auf das Vorhandensein singulärer Punkte geschlossen. Im Falle gerader Anzahl nicht von Null verschiedener Eigenwerte ändert die Determinante das Vorzeichen nicht, und daher werden singuläre Punkte nicht erkannt. Das Verhalten des Algorithmus bei der Ermittlung singulärer Punkte kann am Beispiel einer Kugelschale über quadratischem Grundriß [6] gezeigt werden. Im Bild 4 ist die „q-u“-Kurve dieser Schalen im Punkt 6 (beachte auch Bild 3) und die Abbildung der charakteristischen nachkritischen Gleichgewichtsformen dargestellt. Letztere entsprechen verschiedenen Punkten der „q-u“-Kurve. In Tabelle 1 sind für die einzelnen Bereiche der Kurve die Zahl der negativen Eigenwerte angegeben.

**Tabelle 1**

Kurvenabschnitt	0-a	a-1	1-b	b-2	2-3	3-d	d-4	4-e	e-f
Zahl der negativen Eigenwerte	0	1	0	2	3	2	1	2	2

Die Abschnitte 0-a und 1-b zeigen die stabilen Gleichgewichtsformen der Schale (Bild 4 a und b). Alle übrigen Bereiche der Kurve gehören zu instabilen Gleichgewichtsformen der Schale (Bild 4 c bis g).

Die Methode des stetigen Abstiegs auf Gleichgewichtszweigen, in Verbindung mit den Methoden der Verzweigungstheorie [15], ermöglicht, alle stetigen Lösungen zu finden. Die Wahl der Richtung der Fortsetzung des Abstiegs wird nach der numerischen Untersuchung der Lösung des Zweiges im singulären Punkt auf der Basis der „Schießmethode“ [16] verwirklicht.

19. Wenn im automatischen Regime gearbeitet wird, wählt der Modul S den Abstiegsparameter für den folgenden Schritt aus.

20. Im Modul T wird der Knoten k bestimmt, in welchem der Betrag der Verformungsgröße im vorhergehenden Schritt am größten war.

21. Mit diesen Verformungen wird die Bedingung

$$\alpha_n < c \alpha_1 \quad (19)$$

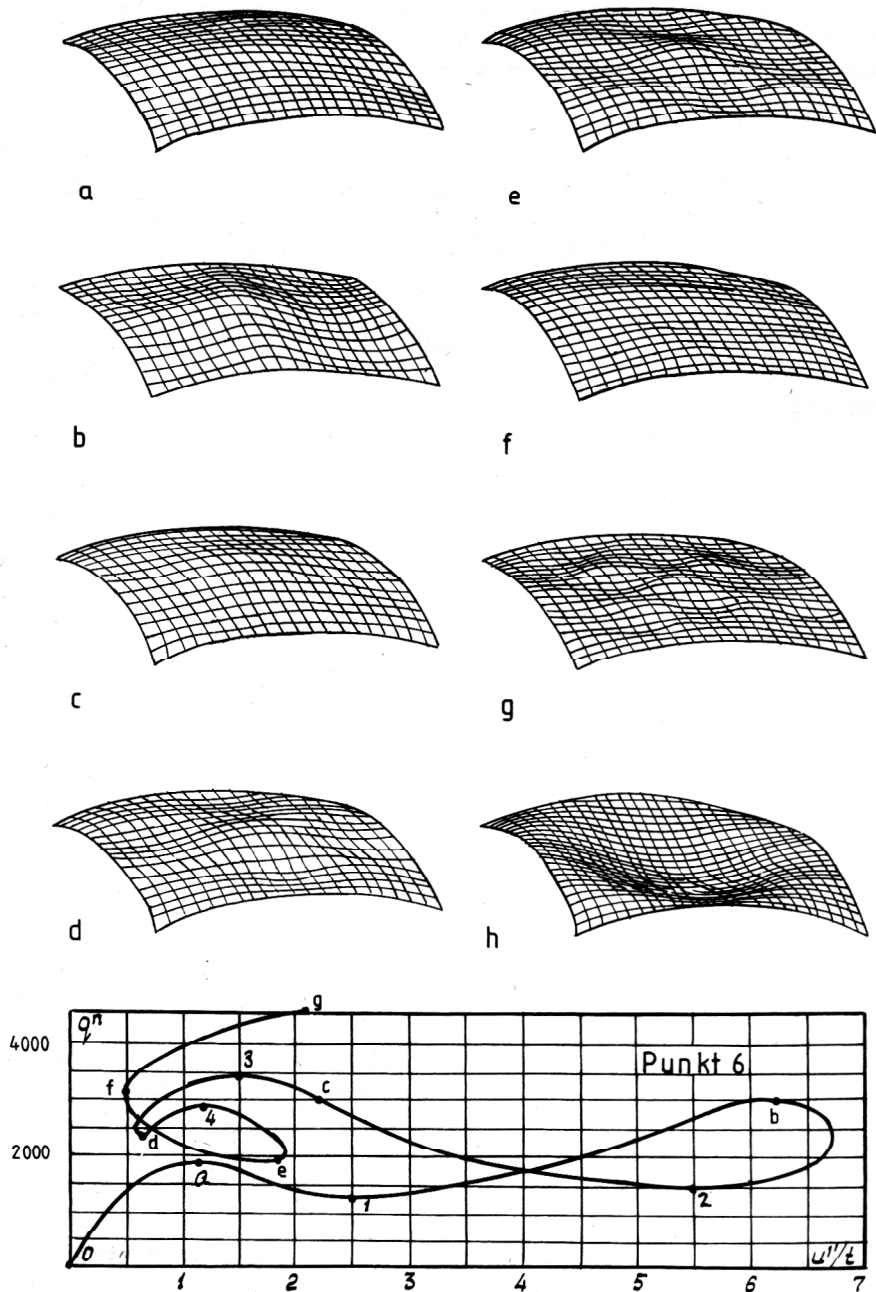
geprüft, wobei

$$\alpha_n = \frac{\Delta p_j}{u_k^i}; \quad C = 0 \text{ bis } 10^{10}$$

ist.

22. Wenn die Bedingung (19) erfüllt ist, dann wird als Abstiegsparameter die Belastung p verwendet.

23. Im anderen Fall wird die Verformung des charakteristischen Knotens k  $u_k^i$  der Abstiegsparameter. Der Koeffizient c erlaubt ein Steuern des Austauschprozesses des Abstiegsparameters, da von seiner Größe ab-



**Bild 4**  
Gleichgewichtsformen einer Kugelschale über rechteckigem Grundriß

hängt, wenn die Bedingung (19) verletzt wird. Wenn notwendig, kann man als Abstiegsparameter die Belastung durch  $c = 0$  fixieren. Für die Verformung wird dies erfüllt, wenn  $c$  einen sehr hohen Wert besitzt, z. B.  $c = 10^{10}$ .

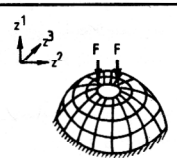
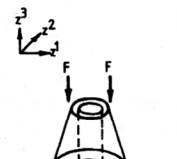
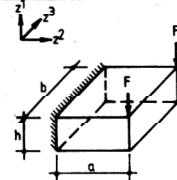
Durch die Ausnutzung des Algorithmus zur automatischen Leitung des Prozesses der Auswahl des Abstiegsparameters kann die gesamte „p-u“-Kurve, unabhängig von ihrer Art, erhalten werden. Charakteristisch in diesem Sinne sind die Kurven auf Bild 3 und 4, bei denen das Auswechseln der Parameter im Prozeß der Lösung dieser Aufgabe gezeigt wird. Bis zur ersten oberen kritischen Belastung ist der Abstiegsparameter die Intensität des gleichmäßig verteilten Drucks auf die Schale  $q$ . Als Abstiegsparameter für den Kurvenverlauf zwischen den ersten oberen und unteren Grenzpunkten  $a$  und  $b$  (Bild 4) wird die Verformung des sechsten Knotens ver-

wendet. Der weitere Abstieg erfolgt über die Verformung des dritten Knotens. Beim Verlauf über den zweiten oberen Grenzpunkt ist die Verformung des vierten Knotens der Abstiegsparameter und anschließend die des ersten und zweiten Knotens.

Man kann sehen, daß der Übergang immer auf Kurven mit geringster Neigung erfolgt. Das entspricht der größten Schrittweite des Abstiegsparameters  $u_k^1$ . Bei der Lösung verschiedener Aufgabenklassen kann man die Lastinkremente konstant oder veränderlich wählen. Die konstante Schrittweite ist im Falle einer schwach gekrümmten „p-u“-Kurve von Bedeutung.

Für verschiedene Aufgabenklassen sind optimale Belastungssinkremente auszuwählen. An den Beispielen einer stark gekrümmten Kuppel mit einer zylindrischen Aussparung, eines massiven, flachen Kegelstumpfes und

Tabelle 2

Nr.	Berechnungsschema	Ordnung N	Belastung F, kN	Anz. der Iteration n
1	 <p>E=3500MPa  <math>\nu=0,34</math>  <math>h=5\text{cm}</math>  <math>R=30\text{cm}</math>  <math>r=3,2\text{cm}</math></p> <p>Elementteilung <math>3 \times 6 \times 6</math></p>	324	10	15
2	 <p>E=5MPa  <math>\nu=0,49</math>  <math>h=10\text{cm}</math>  <math>R=50\text{cm}</math>  <math>r=22,5\text{cm}</math>  <math>l=50\text{cm}</math></p> <p>Elementteilung <math>5 \times 4 \times 6</math></p>	216	3	8
3	 <p>E=3500MPa  <math>\nu=0,34</math>  <math>a=100\text{cm}</math>  <math>b=120\text{cm}</math>  <math>h=20\text{cm}</math></p> <p>Elementteilung <math>3 \times 5 \times 5</math></p>	225	15	13

einer dünnen Kragplatte (Tabelle 2) wurde die Konvergenzgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Größe der Belastungssinkremente untersucht. Durch die Analyse der numerischen Resultate kann die Größe der Belastungssinkremente ausgewählt werden.

24. Im Prozeß der Lösung der Aufgabe wird die Schrittweite des Abstiegsparameters  $\Delta \lambda_n$  automatisch in Abhängigkeit von der Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsprozesses bestimmt.  $\Delta \lambda_n$  kann sich auf verschiedenen Abschnitten der „p-u“-Kurve wesentlich unterscheiden. In flachen Bereichen der „p-u“-Kurve sind relativ große Schritte  $u_k^i$  und in Bereichen mit stark geneigter Tangente kleine Schritte sinnvoll. Aus numerischen Untersuchungen geht hervor, daß bei Anwendung veränderlicher Schrittweite die Lösungszeit wesentlich verringert werden kann (bis auf ein Drittel), im Vergleich zur konstanten Schrittweite und Fehlersituationen vorgebeugt werden können (Hauptspeicherüberlauf u. a.). Auf Bild 5 ist die Abhängigkeit zwischen der Schrittanzahl und der Größe des Belastungsparameters gezeigt. Diese Angaben wurden bei der Untersuchung rechteckiger Platten erhalten und sind in [6] beschrieben. Die durchgehende Linie gilt für veränderliche Schrittweite (erster Schritt  $\Delta p_1 = 5$ ) und die gestrichelte Linie für konstante Schrittweite ( $\Delta p_1 = 10$ ).

Die Größe des Anfangsschrittes kann beliebig gewählt werden (1/3 bis 1/100 der Endbelastung). Bei der weiteren Lösung der Aufgabe wird die Schrittweite automatisch korrigiert.

Nach den Erfahrungen bei der Lösung nichtlinearer Aufgaben beeinflusst die Größe des ersten Schrittes die Lösungszeit der Aufgaben nicht wesentlich, da sich in den folgenden Schritten der Zuwachs des Abstiegsparameters  $\Delta \lambda_n$  in Abhängigkeit von den angegebenen Parametern des Algorithmus schnell stabilisiert.

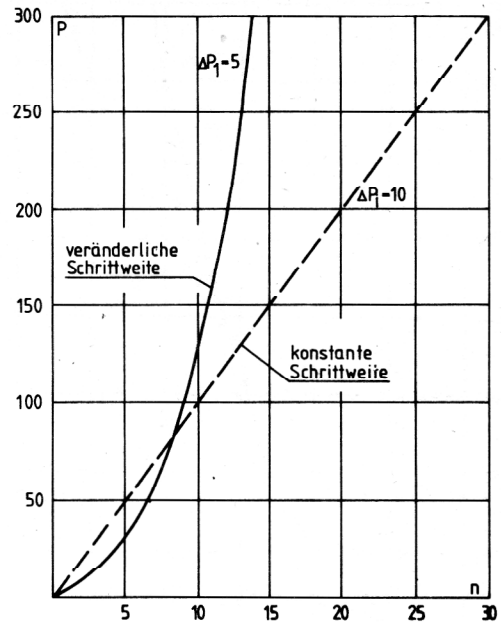


Bild 5  
 Belastungsparameter p in Abhängigkeit von der Anzahl der Belastungssinkremente n für eine Rechteckplatte

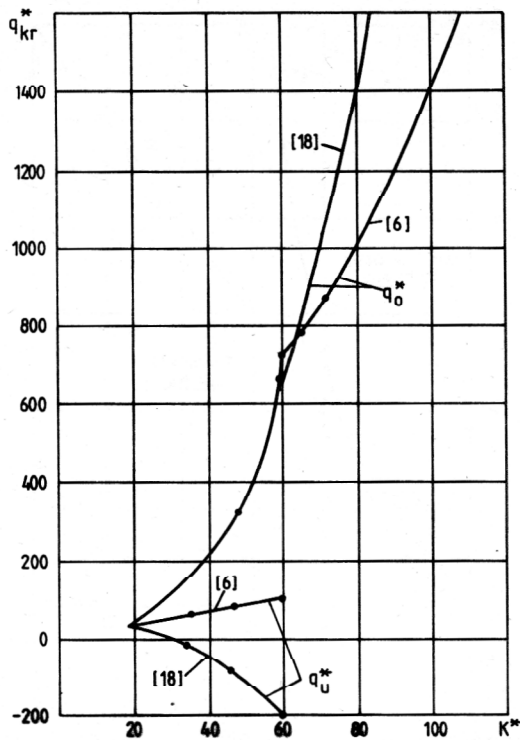
Wenn im vorhergehenden Schritt die Anzahl der Iterationen  $m$  größer als  $K_n$  war, dann wird im Modul X  $m$  durch  $N_n$  dividiert. Bei großer Konvergenzgeschwindigkeit, wenn die Anzahl der Iterationen im vorhergehenden Fall kleiner als die Zahl  $K_y$  ist, wird  $m$  mit  $N_y$  multipliziert. Für eine effektive Arbeit des Algorithmus können die folgenden Größen der Parameter empfohlen werden:

$$K_n = 15; N_n = 1,5; K_y = 7; N_y = 1,5.$$

Die Auswahl der Größe des Schrittes des Abstiegsparameters im Falle einer „Havarie-situation“ wird bei der Beschreibung des Moduls H erklärt. Bei solchen Parameterwerten des Algorithmus schwankt die mittlere Zahl der Iterationen im ersten Belastungssinkrement für eine große Anzahl von Lösungen zwischen 9 und 11. Die angeführten Parameterwerte erweisen sich effektiver, als in [3] vorgeschlagen.

25. Die Lösung der Aufgabe im aktuellen Belastungssinkrement wird mit dem Drucken der Resultate (möglich nach jedem Inkrement) und dem unbedingten Druck der charakteristischen Parameter (zum Aufstellen einer Statistik) abgeschlossen.

Die Stabilität und das nachkritische Verhalten wird am Beispiel einer flachen und hohen Kugelschale mit quadratischem Grundriß unter gleichverteiltem Normaldruck untersucht. Die Schale ist normal zur Mittelfläche gestützt und frei drehbar (beweglich tangential zur Mittelfläche). Entlang des Randes sind keine Verschiebungen möglich. In der Monographie [18] sind für die erste Näherung eine analytische und für höhere Näherungen numerische Lösungen angeführt. Weiterhin wird eine Abschätzung der Genauigkeit und Anwendungsgrenzen einer für die Ingenieurpraxis geeigneten analytischen Lösung



**Bild 6**  
Oberer und unterer kritischer Druck für eine Kugelschale über quadratischem Grundriß in Abhängigkeit von dem Krümmungsparameter

$$\bar{q}^* = 8,77 \xi^2 - 2,46 K \xi^2 + (0,154 K^2 + 22) \xi \quad (20)$$

gegeben, wobei

$\bar{q}^*$  und  $\xi$  die dimensionslosen Parameter der Belastung und der Durchbiegung des zentralen Punktes der Schale und

$K$  der Krümmungsparameter der Schale sind.

Ein Vergleich (nach der FEM und nach der Beziehung (20)) der Werte des größten  $\bar{q}^*$  und niedrigsten  $\bar{q}_u^*$  Druckes ist im Bild 6 dargestellt. Bei dem Parameter der flachen Schale  $K \leq 66$  übersteigt die Abweichung des größten kritischen Druckes nicht 6%. Der Wert  $K = 66$  kann als Grenze der Anwendbarkeit der Lösung der Theorie der flachen Schale [18] im vorkritischen Bereich angesehen werden. Ein Vergleich der „p-u“-Kurven [6] zeigt, daß man das genaue Bild des nachkritischen Verhaltens der Schale (gemäß (20)) nur bei  $K \leq 24$  erhalten kann. Die Anwendung der Beziehung (20) für die Bestimmung des unteren kritischen Druckes (Bild 6) ist nicht möglich.

Die Analyse des nachkritischen Verhaltens flacher und hoher Schalen zeigt, daß ihr Stabilitätsverlust in verschiedenen Formen eintritt. Für flache Schalen ( $K \leq 66$ ) ist diese Form im Bild 4 a, für hohe Schalen im Bild 4 b dargestellt. Dieser Unterschied ist auch Ursache für die Beschränkung des Anwendungsbereichs der Formel (20).

Bei Erörterung der oben angeführten Ergebnisse wird in [19] hervorgehoben, daß sich nach der exakteren Methode [6] bedeutend größere Werte für die untere kritische Belastung ergeben als nach dem vereinfachten Verfahren [18]. In einer Reihe von Fällen kann die untere kritische Belastung, die nach der genaueren Methode ermittelt wurde, der Projektierungspraxis zur Bestimmung der Traglast von Schalenkonstruktionen im nachkritischen Bereich empfohlen werden.

## ЛИТЕРАТУРА

- [ 1 ] Стриклин, Хейслер, Макдуголл, Стеббинс: Расчет оболочек вращения матричным методом перемещений в нелинейной постановке. — Ракетная техника и космонавтика. 1968, № 12.
- [ 2 ] Канторович, Л. В.: Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона. Вестник Ленинград ун-та, 1957, т. 2, № 7.
- [ 3 ] Валишвили, Н. В.: Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. — Москва; Машиностроение, 1976.
- [ 4 ] Зенкевич, О. К.: Метод конечных элементов в технике. — Москва: Мир, 1975.
- [ 5 ] Постнов, В. А.: Численные методы расчета судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1977.
- [ 6 ] Кислокий, В. Н., Сахаров, А. С., Соловей, Н. А.: Моментная схема МКЭ в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек. — Проблема прочности, 1977, № 7.
- [ 7 ] Киричевский, В. В.: Нелинейные уравнения метода конечных элементов в криволинейных координатах. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1973, вып. 20, с. 43 — 51.
- [ 8 ] Киричевский, В. В., Сахаров, А. С.: Метод конечного элемента в исследованиях больших деформаций нелинейно-эластичных тел. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений, Киев: Будівельник, 1974, вып. 24, с. 132 — 141.
- [ 9 ] Мазный, Г. Л.: Программирование на БЭСМ-6 в системе „Дубна“. (под ред. Н. Н. Говоруна) — Москва: Наука, 1978.
- [ 10 ] Киричевский, В. В., Сахаров, А. С.: Исследование больших деформаций высокоэластичных массивных конструкций на основе МКЭ. — Проблемы прочности. Киев: Наукова думка, 1978. № 4, с. 63 — 68.
- [ 11 ] Гуляев, В. И., Мельниченко, Г. И.: Закритические состояния прямоугольных цилиндрических панелей. — В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1974, вып. 27.
- [ 12 ] Кантор, Б. Я.: Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. — Киев: Наукова думка, 1974.
- [ 13 ] Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. (Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана) — Москва: Мир, 1974.
- [ 14 ] Андреев, Л. В., Ободан, Н. И., Лебедев, А. Г.: Нелинейное деформирование и устойчивость цилиндрических панелей при поперечном нагружении. — В кн.: Устойчивость пространственных конструкций. Киев: изд. КИСИ, 1978.
- [ 15 ] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А.: Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — Москва: Наука, 1969.
- [ 16 ] Бахвалов, Н. С.: Численные методы. — Москва: Наука, 1975.
- [ 17 ] Сахаров, А. С., Кислокий, В. Н., Киричевский, В. В. и др.: Метод конечных элементов в механике твердых тел. — Киев: Вища школа, 1982, 480 с.
- [ 18 ] Вольмир, А. С.: Гибкие пластинки и оболочки. — Москва: Гостехиздат, 1956 г.
- [ 19 ] Вольмир, А. С.: Современные проблемы теории пластинок и оболочек в летательных аппаратах. — В кн.: Актуальные проблемы авиационной науки и техники. Москва: Машиностроение, 1984.