Manuskripteingang: 15. 07. 1986

Vergleich der Grundgleichungen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik fester Körper in verschiedenen Bezugssystemen

Helge Bergander

1. Einleitung

Festkörper- und Fluidmechanik unterscheiden sich traditionell vor allem dadurch, daß im ersten Fall der Weg der materiellen Teilchen während der gesamten Deformation verfolgt wird, im zweiten nicht. Zunehmend wird dieser Unterschied durch die Betrachtung komplizierter Stoffe verwischt. In der Festkörpermechanik sind es weiche und rheologische Materialien, in der Fluidmechanik elastische und viskoelastische Effekte der Fluide, die ähnliches Herangehen erfordern.
Ein sehr wichtiges Phänomen des Verhaltens fester Körper ist die sofortige Reaktion auf Beanspruchungen. Zeitabhängiges Verhalten bringt – mathematisch gesehen – nur unwesentliche Korrekturen an der sofortigen Reaktion. Der dominierende Teil des Deformationsgesetzes eines Festkörpers ist somit die Reaktion zwischen den Geschwindigkeiten der jeweiligen kinematischen und kinetischen Grundvariablen. Das erfordert dann auch von den wesentlichen Gleichungsgruppen, denen der Kinematik und des Gleichgewichts sowie der Randbedingungen, eine Formulierung in den Geschwindigkeiten. In der Literatur wird häufig der Begriff des Inkrements an Stelle der Geschwindigkeit verwendet. Er wird hier vermieden, da das Inkrement den endlichen Zuwuchs und damit bereits irgendein Verfahren der Integration über die Zeit impliziert. Aus physikalischer Sicht wird jedoch das Verhalten der Stoffe stets durch Differentialgleichungen (oder kompliziertere Operatoren), nicht aber durch endliche Inkremente beschrieben. Diese Arbeit soll sich daher konsequent mit den Geschwindigkeiten aller Tensoren und der Formulierung der Grundgleichungen für diese beschäftigen. Darin soll der Bezug auf das Deformationsgesetz des festen Körpers bestehen.

Die allgemeine nichtlineare Theorie kann auf unterschiedlichen Bezugssystemen aufgebaut werden. In jedem Bezugssystem sind die unabhängigen Koordinaten zu wählen und Vereinbarungen über die abhängigen kinematischen und kinetischen Variablen zu treffen. Das führt dazu, daß jedes Bezugssystem über einen umfangreichen Definitions-, Gleichungs- und Manipulationsapparat verfügt. Der Wechsel des Bezugssystems ist daher oft nicht trivial.
Anliegen dieser Arbeit ist, die wesentlichsten Definitionen und Gleichungen in den drei wichtigsten Bezugssystemen, dem Lagrangeschen, dem Eulerschen und dem konvektiven tabellarisch zusammenzustellen und bis zum Variationsprinzip für die Geschwindigkeiten zu führen. Unter dieser Zielstellung ist es lediglich eine straffe Auswahl aus dem bekannten Formelapparat der nichtlinearen Kontinuumsmechanik, deren Wert im schnellen Überblick über wechselseitige Zusammenhänge bestehen soll. Zwei Aspekte fordern den Bezugssystemwechsel immer wieder heraus:

- Einerseits entwickelt sich weltweit die konstitutive Theorie bei großen Deformationen in einem bisher ungekannten Maße in die Breite. In verschiedenen Bezugssystemen formulierte Erkenntnisse müssen schnell wechselseitig genutzt werden.
- Andererseits erfordert die Anwendung standardisierter Programmbausteine für Deformationsgesetze in der konvektiven Metrik die Anpassung in fertige Programme über Adapter, die den Bezugssystemwechsel an definierten Schnittstellen automatisch vollziehen.

Die Arbeit ist so aufgebaut, daß alle wesentlichen Definitionen und Gleichungen in Tabellen mit Formelnummern zusammengestellt sind. Die Formeln im Text sind nur zur Kommentierung gedacht. Bis auf wenige Gleichungen, bei denen die Herleitung unverhältnismäßig umfangreich bezogen auf die Aussage ist, werden alle Zusammenhänge nachvollziehbar dargelegt.
Der verwendete mathematische Apparat der Tensorrechnung in krummlinigen Koordinaten geht nicht über die kurze Einführung in [1] hinaus. Hinsichtlich der Grundbegriffe in kartesischen Koordinaten wird auf [2] verwiesen. Eine vollständige Beschreibung des Lagrangeschen Bezugssystems ist in [3] auch für krummlinige Koordinaten gegeben, diese Arbeit wird weitgehend zum Vorbild für die Schreibweise in diesem System genommen. In [4] sind viele der angegebenen Gleichungen für alle drei Bezugssysteme hergeleitet und interpretiert, allerdings ist der Formelapparat wesentlich umfangreicher.

2. Bezugssysteme

In der Tensorrechnung mit krummlinigen Koordinaten existieren in jedem Punkt zwei veränderliche duale Basisvektorsysteme, die schiefwinklig und nicht normiert sind. Das kovariante Bezugssystem wird aus den Tangenten an die Koordinatenlinien, das kontravariante aus den Normalen auf den Koordinatenflächen gebildet. Jeder Tensor wird auf diese Basissysteme bezogen und durch seine Tensorkoordinaten gekennzeichnet. Er kann als physikalische Größe durch seine Koordinaten allein nicht identifiziert werden. Das Nichtbeachten dieser Tatsache führt immer wieder zu Mißverständnissen. Daher soll die Einheit von Basis und Tensorkoordinate (nicht zu verwechseln mit den Werten der unabhängigen Variablen) in dieser Arbeit besonders beachtet werden.

Im Lagrangeschen Bezugssystem sind die raumfesten Koordinaten der materiellen Teilchen im Ausgangszustand die unabhängigen Ortsvariablen. Die Tensorbasis ist ortsveränderlich, aber bezüglich der Zeit konstant. Dieses Bezugssystem ist hinsichtlich der Geometrie anschaulich und hat in der Festkörpermechanik große Traditionen. Es liegt der Mehrheit von Arbeiten und Programmen für entsprechende Probleme zugrunde, in der DDR [3], [5].

Im Eulerschen Bezugssystem werden raumfeste unabhängige Variable verwendet, die materiellen Teilchen werden in der aktuellen Konfiguration beschrieben. In den Punkten des Koordinatensystems befinden sich zu verschiedenen Zeiten verschiedene Teilchen. Auch hier ist die Tensorbasis für verschiedene Raumpunkte im allgemeinen verschieden, für verschiedene Zeiten am gleichen Punkt aber gleich. Dieses System wird von der Fluidmechanik verwendet. In der Festkörpermechanik wird es häufig zum Aufbau konstitutiver Beziehungen verwendet und meist dual zum Lagrangeschen System eingeführt, aber nach der Einarbeitung konstitutiver Gleichungen wieder eliminiert [3].

Im konvektiven Bezugssystem sind die unabhängigen Ortsvariablen mit dem materiellen Teilchen verbunden. Da ihre Metrik belastungsabhängig ist, müssen sie krummlinig sein. Dieser Zwang ist bei den ersten beiden Systemen nicht vorhanden. Die beiden dualen Tensorbasissysteme sind orts- und zeitveränderlich. Dieses System bietet große Vorteile in der konstitutiven Theorie, da die Problematik der Objektivität von selbst erfüllt wird [6], [7]. Seine Nutzung für Feldprobleme ist gleichfalls unkompliziert, aber selten tatsächlich realisiert. Verdienste um die Umsetzung in Rechenprogramme liegen in der DDR an der TU Dresden [8] bis [10].

3. Definition der Koordinatensysteme (Tabelle 1)

Im weiteren beziehen sich Angaben von Tripel stets auf die Reihenfolge Lagrangesches, Eulersches und konvektives Bezugssystem. Die unabhängigen krummlinigen Ortskoordinaten werden mit X^M, x^m und Θ^μ (M, m, μ jeweils von 1 bis 3) bezeichnet. Jeder Punkt des Raumes wird durch einen zugeordneten Ortsvektor $\vec{R}(X^M)$, $\vec{r}(x^m)$, $\vec{r}(\Theta^\mu, t)$ beschrieben, die zunächst unabhängig voneinander eingeführt werden. Die Ortsvektoren werden sinnvollerweise in kartesischen raumfesten Koordinaten definiert, allerdings ist die Angabe der Zerlegung für das Anliegen dieser Arbeit unwesentlich. Die Variable t ist die Zeit.

Die kovarianten Basisvektoren zur Beschreibung von Tensoren sind $\vec{G}_M$, $\vec{g}_m$ und $\vec{g}_\mu$. Sie sind durch (T1–1) definiert. Skalarprodukte dieser Vektoren bilden die kovarianten Koordinaten des Metriktensors (T1–3). Zu den kovarianten Basen gehören duale kontravariante Basen $\vec{G}^N$, $\vec{g}^n$, $\vec{g}^\nu$, die durch

$$\vec{G}_M \cdot \vec{G}^N = \delta^N_M, \quad \vec{g}_m \cdot \vec{g}^n = \delta^n_m, \quad \vec{g}_\mu \cdot \vec{g}^\nu = \delta^\nu_\mu \tag{1}$$

eindeutig bestimmt sind. Ihre Skalarprodukte ergeben die kontravarianten Koordinaten des Metriktensors. Die (symmetrische) Matrix dieser Koordinaten ist die Kehrmatrix zu der der kovarianten Koordinaten.

Jeder Tensor wird über seine Koordinaten auf die Basissysteme bezogen. Die Stellung des jeweiligen Index gibt an, welche der beiden dualen Basisvektorensysteme für ihn gilt. Dabei wird die Summationskonvention auf gleiche Indizes unterschiedlicher Zuordnung (ko- und kontravariant) angewendet.

Der gleiche Tensor kann auf Basisvektorsysteme unterschiedlicher Koordinatensysteme bezogen werden. Die hieraus folgenden Transformationen der Tensorkoordinaten sind mit Festlegung der Basisvektortransformaten (T1–5) bestimmt. Die Elemente der Transformationsmatrizen sind Skalarprodukte von Basisvektoren

$$c_{M\cdot}^{\;m} = \vec{G}_M \cdot \vec{g}^m \qquad c_{m\cdot}^{\;\mu} = \vec{g}_m \cdot \vec{g}^\mu \tag{2.1}$$

Dabei bilden die

$$c_{m\cdot}^{\;M} = \vec{g}_m \cdot \vec{G}^M \qquad c_{\mu\cdot}^{\;m} = \vec{g}_\mu \cdot \vec{g}^m \tag{2.2}$$

die Elemente der inversen Matrix, wie mittels (1) leicht feststellbar ist. Die Transformation der kontravarianten Koordinaten eines Tensors 2. Stufe (T1–6) sowie dessen Zeitableitungen (T1–7) sind in Tabelle 1 stellvertretend für beliebige Koordinaten beliebiger Stufe zu-

	LAGRANGE	EULER	KONVEKTIV
unabhängige Variable	X^M	x^m	θ^μ
(T1-1) kovariante Basisvektoren	$\vec{G}_M = \vec{R}_{,M}$	$\vec{g}_m = \vec{r}_{,m}$	$\vec{g}_\mu = \vec{r}_{,\mu}$
(T1-2) Zeitableitung der kovarianten Basisvektoren	$\dot{\vec{G}}_M = \vec{0}$	$\dot{\vec{g}}_m = \vec{0}$	$\dot{\vec{g}}_\mu = v^\nu\|_\mu \vec{g}_\nu$
(T1-3) kovariante Koordinaten des Metriktensors	$G_{MN} = \vec{G}_M \cdot \vec{G}_N$	$g_{mn} = \vec{g}_m \cdot \vec{g}_n$	$g_{\mu\nu} = \vec{g}_\mu \cdot \vec{g}_\nu$
(T1-4) Zeitableitung des Metriktensors	$\dot{G}_{MN} = 0$	$\dot{g}_{mn} = 0$	$\dot{g}_{\mu\nu} = v_\mu\|_\nu + v_\nu\|_\mu$
(T1-5.1) Transformation der Basisvektoren	$\Longleftarrow \quad \vec{G}_M = c_{M\cdot}^{\;m}\, \vec{g}_m$		$\Longleftarrow \quad \vec{g}_m = c_{m\cdot}^{\;\mu}\, \vec{g}_\mu$
(T1-5.2)	$\vec{g}_m = c_{m\cdot}^{\;M} \cdot \vec{G}_M \quad \Longrightarrow$		$\vec{g}_\mu = c_{\mu\cdot}^{\;m} \cdot \vec{g}_m \quad \Longrightarrow$
(T1-6.1) Transformation von Tensoren zweiter Stufe	$T^{MN} \vec{G}_M \vec{G}_N = t^{mn} \vec{g}_m \vec{g}_n$		$t^{mn} \vec{g}_m \vec{g}_n = t^{\mu\nu} \vec{g}_\mu \vec{g}_\nu$
(T1-6.2)	$\Longleftarrow \quad T^{MN} = c_{m\cdot}^{\;M}\, c_{n\cdot}^{\;N}\, t^{mn}$		$\Longleftarrow \quad t^{mn} = c_{\mu\cdot}^{\;m}\, c_{\nu\cdot}^{\;n}\, t^{\mu\nu}$
(T1-6.3)	$t^{mn} = c_{M\cdot}^{\;m}\, c_{N\cdot}^{\;n}\, T^{MN} \quad \Longrightarrow$		$t^{\mu\nu} = c_{m\cdot}^{\;\mu}\, c_{n\cdot}^{\;\nu}\, t^{mn} \quad \Longrightarrow$
(T1-7.1) Transformation der Zeitableitung von Tensoren zweiter Stufe	$(T^{MN} \vec{G}_M \vec{G}_N)^{\cdot} = (t^{mn} \vec{g}_m \vec{g}_n)^{\cdot}$		$(t^{mn} \vec{g}_m \vec{g}_n)^{\cdot} = (t^{\mu\nu} \vec{g}_\mu \vec{g}_\nu)^{\cdot}$
(T1-7.2)	$\Longleftarrow \quad \dot{T}^{MN} = c_{m\cdot}^{\;M}\, c_{n\cdot}^{\;N}\, \dot{t}^{mn}$		$\Longleftarrow \dot{t}^{mn} = c_{\mu\cdot}^{\;m}\, c_{\nu\cdot}^{\;n}\, (\dot{t}^{\mu\nu} + t^{\lambda\nu} v^\mu\|_\lambda + t^{\mu\lambda} v^\nu\|_\lambda)$
(T1-7.3)	$\dot{t}^{mn} = c_{M\cdot}^{\;m}\, c_{N\cdot}^{\;n}\, \dot{T}^{MN} \quad \longrightarrow$		$\dot{t}^{\mu\nu} = c_{m\cdot}^{\;\mu}\, c_{n\cdot}^{\;\nu} (\dot{t}^{mn} - t^{ln} v^m\|_l - t^{ml} v^n\|_l) \Longrightarrow$

Tabelle 1
Unabhängige Variable, Basisvektoren und Transformationsregeln

sammengestellt. Das Symbol ($\dot{}$) stellt die Ableitung nach t dar und wird nach der Einführung der Bewegung materieller Teilchen im Abschnitt 4 noch genauer spezifiziert. Erfolgt die Transformation für einen Tensor im gleichen Punkt des Raumes, gilt

$$\overset{*}{c}{}^{m}_{M\cdot} = \frac{\partial x^m}{\partial X^M} = x^m{}_{,M} \qquad \overset{*}{c}{}^{\mu}_{m\cdot} = \frac{\partial \Theta^\mu}{\partial x^m} = \Theta^\mu{}_{,m} \tag{3.1}$$

bzw.

$$\overset{*}{c}{}^{M}_{m\cdot} = \frac{\partial X^M}{\partial x^m} = X^M{}_{,m} \qquad \overset{*}{c}{}^{m}_{\mu\cdot} = \frac{\partial x^m}{\partial \Theta^\mu} = x^m{}_{,\mu}\,. \tag{3.2}$$

4. Kinematik (Tabelle 2)

Die Lage eines Teilchens im Raum soll durch

$$\vec{r}\,(t) = \vec{R} + \vec{u}\,(t) \tag{4}$$

beschrieben werden. Dabei ist $\vec{R}$ (der im allgemeinen Fall willkürliche) Ausgangszustand zur Zeit $t = t_o$, so daß der Verschiebungsvektor $\vec{u}\,(t)$ für $t = t_o$ verschwindet. Die Geschwindigkeit des materiellen Teilchens ist

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{u}}\,. \tag{5}$$

Der Anschluß zu den Koordinatensystemen des Abschnittes 3 wird durch

$$\vec{R} = \vec{R}\,(X^M)\,;\ \vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(x^m)\,;\ \vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(\Theta^\mu, t) \tag{6}$$

vollzogen. Dazu ist zu vermerken, daß der Anschluß des Lagrangeschen und des konvektiven Bezugssystems für alle Zeiten t gilt, während die Lage des Teilchens $\vec{r}$ mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ des Raumpunktes im Eulerschen System nur im Augenblick t übereinstimmen. Da sowohl X^M als auch die Θ^μ den „Namen" eines Teilchens charakterisieren, stimmen jeweils materielle und partielle Differentiation nach der Zeit für diese Systeme überein. Dagegen gilt bekanntermaßen im Eulerschen System eine etwas kompliziertere materielle Ableitung (z. B. [2])

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi|_m\ v^m\,. \tag{7}$$

Hierbei darf φ jede Koordinate eines beliebigen Tensors sein. Hier und im weiteren, also auch in der Tabelle 2, stellt das Symbol $(\ )|_m$ die kovariante Ableitung [1] dar. Auf eine Unterscheidung des Symbols in den 3 Koordinatensystemen wird verzichtet, da der zugeordnete Index eindeutig die verwendete Metrik und deren zugeordnete Hilfsgrößen (Christoffelsymbole) kennzeichnet.

Tabelle 2 enthält die wichtigsten kinematischen Grundbeziehungen. Absolute kinematische Variable beziehen sich auf ein materielles Teilchen, relative auf den Zusammenhang differentiell benachbarter Teilchen.

Dabei gilt für ein materielles Teilchen gemäß (6) und (4)

$$\vec{r}_{,m} = X^M{}_{,m}\,\vec{r}_{,M} = X^M{}_{,m}\,(\vec{R}_{,M} + \vec{u}_{,M}) \tag{8.1}$$

$$\vec{r}_{,\mu} = x^m{}_{,\mu}\,\vec{r}_{,m} \tag{8.2}$$

Unter Beachtung von (T1–1) und der Definition der kovarianten Ableitung [1] folgen

$$\vec{g}_m = X^N{}_{,m}\,(\delta^M_N + U^M|_N)\,\vec{G}_M \tag{9.1}$$

$$\vec{g}_\mu = x^m{}_{,\mu}\,\vec{g}_m \tag{9.2}$$

und nach (2), (3)

$$c^{M}_{m\cdot} = \overset{*}{c}{}^{N}_{m\cdot}\,(\delta^M_N + U^M|_N) \tag{10.1}$$

$$c^{m}_{\mu\cdot} = \overset{*}{c}{}^{m}_{\mu\cdot}\,. \tag{10.2}$$

Auf die Angabe der Elemente der inversen Transformationsmatrix (2) sei verzichtet.

Hinzuweisen ist noch auf die aufwendige Vorschrift (T2–3) für das konvektive System. Dazu sind jedoch zwei Bemerkungen erforderlich. Einerseits ist (T2–3) auch im Eulerschen System wegen (7) ähnlich umständlich. Andererseits läßt sich das Randwertproblem des Festkörpers stets in den Geschwindigkeiten formulieren. Die Integration von $\vec{v}$ erfolgt dann zum Schluß im raumfesten Bezug, so daß die auf die konvektive Basis bezogenen Verschiebungskoordinaten nicht benötigt werden.

Die Transformationsgleichungen (T2–4) gelten für die Koordinaten aller Vektoren, die auf ein Teilchen bezogen sind, also im besonderen auch für die von $\vec{v}$.

	LAGRANGE	EULER	KONVEKTIV
absolute kinematische Variable			
(T2-1) Verschiebung eines Teilchens	$\vec{u} = U^N(X^M,t)\,\vec{G}_N(X^M)$	$\vec{u} = u^n(x^m,t)\,\vec{g}_n(x^m)$	$\vec{u} = u^\nu(\theta^\mu,t)\,\vec{g}_\nu(\theta^\mu,t)$
(T2-2) Geschwindigkeit eines Teilchens	$\vec{v} = V^N(X^M,t)\,\vec{G}_N(X^M)$	$\vec{v} = v^n(x^m,t)\,\vec{g}_n(x^m)$	$\vec{v} = v^\nu(\theta^\mu,t)\,\vec{g}_\nu(\theta^\mu,t)$
(T2-3) Zeitl. Änderung der Verschiebungskoordinate	$\dot{U}^N = V^N$	$\dot{u}^n = v^n$	$\dot{u}^\nu = v^\nu - u^\mu v^\nu\vert_\mu$
(T2-4) Transformation	$U^N = c^{N}_{n\cdot}\,u^n \Longleftrightarrow c^{n}_{N\cdot}\,U^N = u^n$		$u^n = c^{n}_{\nu\cdot}\,u^\nu \Longleftrightarrow c^{\nu}_{n\cdot}\,u^n = u^\nu$
relative kinematische Variable			
(T2-5) Verzerrung	$E_{MN} = \frac{1}{2}(g_{MN} - G_{MN})$	$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(g_{mn} - G_{mn})$	$\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - G_{\mu\nu})$
(T2-6) Deformationsgeschwindigkeit	$D_{MN} = \overset{*}{c}{}^{m}_{M\cdot}\,\overset{*}{c}{}^{n}_{N\cdot}\,d_{mn}$	$d_{mn} = \frac{1}{2}(v_m\vert_n + v_n\vert_m)$	$d_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(v_\mu\vert_\nu + v_\nu\vert_\mu)$
(T2-7) Kinematische Grundgleichung	$E_{MN} = \frac{1}{2}(U_M\vert_N + U_N\vert_M + U^R\vert_M U_R\vert_N)$	$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(u_m\vert_n + u_n\vert_m - u^r\vert_m u_r\vert_n)$	$\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(u_\mu\vert_\nu + u_\nu\vert_\mu - u^\varrho\vert_\mu u_\varrho\vert_\mu)$
(T2-8) Kinematische Grundgleichung in den Geschwindigkeiten	$\dot{E}_{MN} = \frac{1}{2}(\delta^R_M + U^R\vert_M)\,V_R\vert_N + \frac{1}{2}(\delta^R_N + U^R\vert_N)\,V_R\vert_M = D_{MN}$	$\dot{\varepsilon}_{mn} = \frac{1}{2}(\delta^r_m - 2\varepsilon^r_m)\,v_r\vert_n + \frac{1}{2}(\delta^r_n - 2\varepsilon^r_n)\,v_r\vert_m$	$\dot{\varepsilon}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(v_\mu\vert_\nu + v_\nu\vert_\mu) = d_{\mu\nu}$
(T2-9) Beziehungen zwischen Tensorkoordinaten	$\overset{+}{E}_{MN} = \overset{*}{c}{}^{m}_{M\cdot}\,\overset{*}{c}{}^{n}_{N\cdot}\,\overset{+}{\varepsilon}_{mn} \Longleftrightarrow \overset{*}{c}{}^{M}_{m\cdot}\,\overset{*}{c}{}^{N}_{n\cdot}\,\overset{+}{E}_{MN} = \overset{+}{\varepsilon}_{mn}$		$\overset{+}{\varepsilon}_{mn} = c^{\mu}_{m\cdot}\,c^{\nu}_{n\cdot}\,\overset{+}{\varepsilon}_{\mu\nu} \Longleftrightarrow c^{m}_{\mu\cdot}\,c^{n}_{\nu\cdot}\,\overset{+}{\varepsilon}_{mn} = \overset{+}{\varepsilon}_{\mu\nu}$
für	$\overset{+}{E}_{MN} = E_{MN}, D_{MN}$	$\overset{+}{\varepsilon}_{mn} = \varepsilon_{mn}, d_{mn}$	$\overset{+}{\varepsilon}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$

Tabelle 2
Kinematische Grundbeziehungen

Ausgangspunkt für die Einführung der relativen kinematischen Variablen ist das Verzerrungsmaß. Es wird auf der Grundlage der Änderung des Skalarpunktes der Abstände benachbarter Punkte gegenüber dem Ausgangszustand

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} - d\vec{R} \cdot d\vec{R} \tag{11}$$

gewonnen:

$$ds^2 - dS^2 = 2 E_{MN}\, dX^M dX^N = 2\epsilon_{mn}\, dx^m dx^n$$
$$= 2\epsilon_{\mu\nu}\, d\Theta^\mu d\Theta^\nu . \tag{12}$$

Die Zuordnung der Verzerrungsmaße zu den entsprechenden kovarianten Basisvektoren führt auf die Tensoren $E_{MN} \vec{G}^M \vec{G}^N$, $\epsilon_{mn} \vec{g}^m \vec{g}^n$ und $\epsilon_{\mu\nu} \vec{g}^\mu \vec{g}^\nu$. Gemäß (12) sowie unter Beachtung von (3) und der Inversen zu (10) bestehen zwischen den Koordinaten dieser Tensoren die Beziehungen

$$E_{MN} = x^m{}_{,M}\, x^n{}_{,N}\, \epsilon_{mn} = \overset{*}{c}{}_{M\cdot}^{m}\, \overset{*}{c}{}_{N\cdot}^{n}\, \epsilon_{mn} \tag{13.1}$$

$$\epsilon_{mn} = \Theta^\mu{}_{,m}\, \Theta^\nu{}_{,n}\, \epsilon_{\mu\nu} = c_{m\cdot}^{\mu}\, c_{n\cdot}^{\nu}\, \epsilon_{\mu\nu} . \tag{13.2}$$

Diese Vorschriften zeigen, daß die eingeführten Verzerrungen des Eulerschen (ϵ_{mn}) und des konvektiven Systems ($\epsilon_{\mu\nu}$) Koordinaten des gleichen Tensors sind, da sie nach der Tensortransformation (T1–6) umgerechnet werden. Dieser Tensor heißt in der Literatur Almansischer, Eulerscher oder Hamelscher Verzerrungstensor. Von diesem unterscheidet sich der Tensor im Lagrangeschen System mit den Koordinaten E_{MN} (Greenscher oder Lagrangescher Verzerrungstensor) gemäß (10.1) und (5) durch den Verschiebungsgradienten. Der Zusammenhang zwischen Verzerrungstensor und Metrik ist in (T2–5) ausgewiesen, wobei die noch nicht in (T1–3) definierten Metriktensoren durch

$$g_{MN} = \vec{g}_M \cdot \vec{g}_N \qquad \vec{g}_M = \vec{r}_{,M} = (\delta^R_M + U^R|_M)\,\vec{G}_R \tag{14.1}$$

$$G_{mn} = \vec{G}_m \cdot \vec{G}_n$$
$$\text{mit } \vec{G}_m = \vec{R}_{,m} = (\delta^r_m - u^r|_m)\,\vec{g}_r \tag{14.2}$$

$$G_{\mu\nu} = \vec{G}_\mu \cdot \vec{G}_\nu \qquad \vec{G}_\mu = \vec{R}_{,\mu} = \vec{g}_\mu(\Theta^\nu, t_o) \tag{14.3}$$

festgelegt sind.

Die zweite wichtige relative kinematische Variable ist die Deformationsgeschwindigkeit (T2–6). Sie wird in der momentanen Konfiguration (bei $\vec{r}$) definiert. Sie ist ein Maß für die differentielle Änderung der Geschwindigkeit relativ zu einem Teilchen, bezogen auf die Differentiale des Abstandes und nach Elimination der momentanen Starrkörperdrehung [2]. Sie ergibt sich danach als symmetrischer Teil des Geschwindigkeitsgradienten. In der Eulerschen und der konvektiven Darstellung ist sie einfach in Koordinatenschreibweise zu formulieren (T2–6), während die Definition im Lagrangeschen System mit der gleichen Umrechnung (T2–9) erfolgt, die für den Verzerrungstensor gilt.

Die Beziehungen zwischen Verzerrungstensor und Verschiebungsvektor bilden traditionell die kinematischen Grundgleichungen (T2–7). Zu diesen gleichwertig sind die materiell nach der Zeit differenzierten Grundgleichungen (T2–8). Infolge der zeitunabhängigen Koordinatensysteme ist die Differentiation nach der Zeit für das Lagrangesche und das Eulersche System trivial. Im konvektiven System ist (T2–8) einfach zu verifizieren, wenn von (T2–5) ausgegangen und (T1–3) und (T1–4) beachtet werden. Wird (T2–7) direkt differenziert, ist zu beachten, daß das in den kovarianten Ableitungen enthaltene Christoffel-Symbol [1]

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \vec{g}^\mu \cdot \vec{g}_{\nu,\rho} \tag{15}$$

natürlich selbst zeitabhängig ist

$$\dot{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = v^\mu|_{\nu\rho} . \tag{16}$$

Nach einer etwas umständlicheren, aber unkomplizierten Rechnung folgt wiederum (T2–8).

Bemerkenswert ist die Übereinstimmung von materieller Zeitableitung der Koordinaten des Verzerrungstensors mit denen der Deformationsgeschwindigkeit sowohl im Lagrangeschen als auch im konvektiven System. Im letzteren weist das der Vergleich von (T2–8) und (T2–6) sofort aus, während im Lagrangeschen System aus

$$\vec{v}_{,M} = \vec{v}_{,m}\, x^m{}_{,M} = \overset{*}{c}{}_{M\cdot}^{m}\, \vec{v}_{,m}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$V_N|_M\, \vec{G}^N = \overset{*}{c}{}_{M\cdot}^{m}\, v_n|_m\, \vec{g}^n$$

und mit (1), (3) nach skalarer Multiplikation mit $\vec{G}_N$

$$V_N|_M = \overset{*}{c}{}_{M\cdot}^{m}\, c_{N\cdot}^{n}\, v_n|_m \tag{17}$$

folgt. Unter Beachtung von (10.1) wird die Übereinstimmung von (T2–6) und (T2–8) offensichtlich.

5. Spannungen und Spannungsgeschwindigkeiten (Tabelle 3)

Über ein Element der Schnittfläche dA wird der Schnittkraftanteil $d\vec{S}$ nach (T3–1) übertragen. Mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ auf der Schnittfläche wird das Element dA in einen Vektor

$$d\vec{A} = \vec{n}\, dA \tag{18}$$

überführt. Dieser Vektor ist im Ausgangszustand und im Momentanzustand gemäß (T3–2) zu formulieren. Der Spannungstensor verbindet beide Vektoren nach (T3-3). Da zwischen den Flächenelementen im Ausgangs- und im Momentanzustand die Beziehung von Nanson [3]

$$dA_k = \frac{\rho}{\rho_o}\, X^K{}_{,k}\, d\overset{\circ}{A}_K \tag{19}$$

existiert, folgt aus (T3–3) sofort die Transformationsbeziehung (T3–8). In (19) sind ρ und ρ_o die Massendichten im Momentan- und im Ausgangszustand, deren Verhältnis infolge des Erhaltungssatzes der Masse in lokaler Form

$$\rho_o\, dV_o = \rho\, dV \tag{20}$$

das Verhältnis der Volumenelemente repräsentiert. Im konvektiven System geht (19) in

	LAGRANGE	EULER	KONVEKTIV
(T3-1) Schnittkraftanteil	$d\vec{S} = dS^L \vec{G}_L = ds^M \vec{g}_M = ds^M(\delta^L_M + U^L\|_M)\vec{G}_L$	$d\vec{S} = ds^l \vec{g}_l$	$d\vec{S} = ds^\lambda \vec{g}_\lambda$
(T3-2) Flächenelement	$d\vec{A} = d\mathring{A}_K \vec{G}^K = d\mathring{A} N_K \vec{G}^K$	$d\vec{A} = dA_k \vec{g}^k = dA\, n_k \vec{g}^k$	$d\vec{A} = dA_\kappa \vec{g}^\kappa = dA\, n_\kappa \vec{g}^\kappa$
(T3-3) Spannungstensor	$ds^L = T^{KL} d\mathring{A}_K$	$ds^l = \sigma^{kl} dA_k$	$ds^\lambda = \sigma^{\kappa\lambda} dA_\kappa$
(T3-4) spezifische Leistung	$P_0^* = \frac{dP}{dV_0} = T^{KL} D_{KL}$	$P^* = \frac{dP}{dV} = \sigma^{kl} d_{kl}$	$P^* = \frac{dP}{dV} = \sigma^{\kappa\lambda} d_{\kappa\lambda}$
(T3-5) TRUESDELL'sche Spannungsgeschwindigkeit	$\overset{\circ}{T}{}^{KL} = \dot{T}^{KL}$	$\overset{\circ}{\sigma}{}^{kl} = \dot{\sigma}^{kl} - \sigma^{ml} v^k\|_m - \sigma^{km} v^l\|_m + \sigma^{kl} v^m\|_m$	$\overset{\circ}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} = \dot{\sigma}^{\kappa\lambda} + \sigma^{\kappa\lambda} v^\mu\|_\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,\sigma^{\kappa\lambda})^{\cdot}$
(T3-6) OLDROYD'sche Spannungsgeschwindigkeit	$\overset{*}{T}{}^{KL} = \dot{T}^{KL} + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} T^{KL} = \frac{1}{\varrho}(\varrho T^{KL})^{\cdot}$	$\overset{*}{\sigma}{}^{kl} = \dot{\sigma}^{kl} - \sigma^{ml} v^k\|_m - \sigma^{km} v^l\|_m$	$\overset{*}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} = \dot{\sigma}^{\kappa\lambda}$
(T3-7) JAUMANN'sche Spannungsgeschwindigkeit	$\overset{\triangledown}{T}{}^{KL} = \frac{1}{\varrho}(\varrho T^{KL})^{\cdot} + (T^{KM} g^{LN} + T^{KN} g^{LM}) D_{MN}$	$\overset{\triangledown}{\sigma}{}^{kl} = \dot{\sigma}^{kl} - \sigma^{ml} \omega^k_{\cdot m} - \sigma^{km} \omega^l_{\cdot m}$	$\overset{\triangledown}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} = \dot{\sigma}^{\kappa\lambda} + \sigma^{\kappa\mu} d^\lambda_\mu + \sigma^{\mu\lambda} d^\kappa_\mu$
(T3-8) Beziehungen zwischen Tensorkoordinaten	$\overset{+}{T}{}^{KL} = \frac{\varrho_0}{\varrho} \overset{*}{C}{}^K_{k\cdot} \overset{*}{C}{}^L_{l\cdot} \overset{+}{\sigma}{}^{kl} \Longleftrightarrow \frac{\varrho}{\varrho_0} \overset{*}{C}{}^k_{K\cdot} \overset{*}{C}{}^l_{L\cdot} \overset{+}{T}{}^{KL} = \overset{+}{\sigma}{}^{kl}$	$\overset{+}{\sigma}{}^{kl} = C^k_{\kappa\cdot} C^l_{\lambda\cdot} \overset{+}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} \Longleftrightarrow C^\kappa_{k\cdot} C^\lambda_{l\cdot} \overset{+}{\sigma}{}^{kl} = \overset{+}{\sigma}{}^{\kappa\lambda}$	
für	$\overset{+}{T}{}^{KL} = T^{KL}, \overset{\circ}{T}{}^{KL}, \overset{*}{T}{}^{KL}, \overset{\triangledown}{T}{}^{KL}$	$\overset{+}{\sigma}{}^{kl} = \sigma^{kl}, \overset{\circ}{\sigma}{}^{kl}, \overset{*}{\sigma}{}^{kl}, \overset{\triangledown}{\sigma}{}^{kl}$	$\overset{+}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} = \sigma^{\kappa\lambda}, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\kappa\lambda}, \overset{*}{\sigma}{}^{\kappa\lambda}, \overset{\triangledown}{\sigma}{}^{\kappa\lambda}$

Tabelle 3
Spannungen und Spannungsgeschwindigkeiten

$$dA_\kappa = \frac{\rho}{\rho_0}\, d\mathring{A}_\kappa \tag{21}$$

über [11].

Die spezifische Leistung P^* (Leistung pro Volumeneinheit) wird aus der Leistung P an einem endlichen Teilvolumen V_T mit der Oberfläche A_T

$$P = \int_{V_T} \vec{f} \cdot \vec{v}\, dV + \int_{A_T} \frac{d\vec{S}}{dA} \cdot \vec{v}\, dA = \int_{V_T} P^*\, dV \tag{22.1}$$

bzw. für die unabhängigen Variablen in der Ausgangsgeometrie

$$P = \int_{V_{T_0}} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dV_0 + \int_{A_{T_0}} \frac{d\vec{S}}{dA_0} \cdot \vec{v}\, dA_0$$

$$= \int_{V_{T_0}} P_0^*\, dV_0 \tag{22.2}$$

berechnet. $\vec{f} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{F}$ ist die am Volumenelement angreifende Kraft pro Volumeneinheit. Dabei erfolgt die Umformung des Oberflächenintegrals in das Volumenintegral mit dem Gaußschen Satz[1]. Das Ergebnis ist in (T3–4) zusammengestellt. Es zeigt, daß die gewählten Definitionen der Deformationsgeschwindigkeit und der Spannung über die spezifische Leistung konjugiert sind.

Die Koordinaten T^{KL} gehören zum 2. Piola-Kirchhoffschen oder auch Kirchhoffschen Spannungstensor $T^{KL} \vec{G}_K \vec{G}_L$, dagegen bildet $\sigma^{kl} \vec{g}_k \vec{g}_l = \sigma^{\kappa\lambda} \vec{g}_\kappa \vec{g}_\lambda$ den wahren oder Cauchyschen Spannungstensor.

Die Spannungsgeschwindigkeit muß objektiv sein [3]. Diese Forderung läßt die Definition verschiedener Spannungsgeschwindigkeiten zu. Drei Grundtypen sind in der Tabelle 3 angeführt. Am bekanntesten ist wohl deren Darstellung im raumfesten Bezug [2], [3], also im Eulerschen System. Die Forderung, daß analog zu den relativen kinematischen Variablen für Grundgröße und zeitliche Ableitung gleiche Beziehungen zwischen den Tensorkoordinaten bestehen soll, reduziert die Bezeichnungsvielfalt[2].

1) Dabei werden auch die Gleichgewichtsbeziehungen (T4–1) benötigt, die im Abschnitt 6 und in Tabelle 4 zusammengestellt sind.

2) So wird beispielsweise die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit (T3–5) im Lagrangeschen System auch Kirchhoffsche Spannungsgeschwindigkeit genannt [2].

In (T3–5) bis (T3–7) treten noch einige bislang nicht definierte Hilfsgrößen auf. So ist

$$g = \det(g_{\mu\nu})\,. \tag{23}$$

Diese Größe kennzeichnet das Volumenelement

$$dV = \sqrt{g}\, d\Theta^1\, d\Theta^2\, d\Theta^3\,, \tag{24}$$

so daß im konvektiven System aus (20) mit

$$g_0 = g(t_0) = \det(G_{\mu\nu})$$

die Beziehung

$$\rho_0 \sqrt{g_0} = \rho \sqrt{g} \tag{25}$$

folgt. Die Koordinaten

$$\omega^k_{\cdot m} = \frac{1}{2}(v^k\|_m - v_m\|^k) \tag{26}$$

sind die des Tensors der Starrkörperrotationsgeschwindigkeit im raumfesten Bezug.

In der Literatur existiert eine deutliche Bevorzugung der Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeit, offensichtlich ihrer einfachen geometrischen Interpretierbarkeit wegen. Aus physikalischer Sicht ist jedoch die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit eindeutig exponiert, da sie zusätzlich zur Eigenschaft der Objektivität eine zweite bedeutsame aufweist: sie ist zu den relativen kinematischen Variablen im Falle von Potentialen konjugiert [11].

6. Statische Grundbeziehungen und Variationsprinzip (Tabelle 4)

In einem Kontinuum muß sich jedes endliche Teilvolumen V_T, das durch die Schnittfläche A_T begrenzt wird, im Gleichgewicht befinden:

$$\vec{F}_{Res} = \int_{V_T} \vec{f}\, dV + \int_{A_T} \frac{d\vec{S}}{dA}\, dA = \vec{0} \tag{27}$$

$$\vec{M}_{Res} = \int_{V_T} (\vec{r} \times \vec{f})\, dV + \int_{A_T} (\vec{r} \times \frac{d\vec{S}}{dA})\, dA = \vec{0}\,. \tag{28}$$

Die Vektoren $d\vec{S}$ (Schnittkraftelement nach (T3–1)) und $\vec{r}$ (Ortsvektor nach (4)) sind bereits definiert, $\vec{f}$ ist der Volumenkraftvektor pro Volumeneinheit, der gegebenenfalls die Trägheitskraft nach dem Prinzip von

Tabelle 4
Statische Grundbeziehungen und Variationsprinzip

	LAGRANGE	EULER	KONVEKTIV
(T4–1) Gleichgewicht	$\left[(\delta^L_M + U^L\|_M T^{KM}\right]\|_K + F^L = 0$	$\sigma^{kl}\|_k + f^l = 0$	$\sigma^{\kappa\lambda}\|_\kappa + f^\lambda = 0$
(T4–2) Momentengleichgewicht	$T^{KL} = T^{LK}$	$\sigma^{kl} = \sigma^{lk}$	$\sigma^{\kappa\lambda} = \sigma^{\lambda\kappa}$
(T4–3) Randbedingungen	$(\delta^L_M + U^L\|_M) T^{KM} N_K = P^L$	$\sigma^{kl} n_k = p^l$	$\sigma^{\kappa\lambda} n_\kappa = p^\lambda$
(T4–4) Zeitableitung des Gleichgewichtes	$\left[(\delta^L_M + U^L\|_M)\dot{T}^{KM} + T^{KM} V^L\|_M\right]\|_K + \dot{F}^L = 0$	$\dot{\sigma}^{kl}\|_k - \sigma^{kl}\|_m v^m\|_k + \dot{f}^l = 0$	$\dot{\sigma}^{\kappa\lambda}\|_\kappa + \sigma^{\mu\lambda} v^\kappa\|_{\mu\kappa} + \sigma^{\kappa\mu} v^\lambda\|_{\mu\kappa} + \dot{f}^\lambda = 0$
(T4–5) Zeitableitung der Randbedingungen	$\left[(\delta^L_M + U^L\|_M)\dot{T}^{KM} + T^{KM} V^L\|_M\right] N_K = \dot{P}^L$	$(\dot{\sigma}^{kl} - \sigma^{ml} v^k\|_m) n_k = \dot{p}^l + p^l\left(\frac{d\dot{A}}{dA} - v^m\|_m\right)$	$\dot{\sigma}^{\kappa\lambda} n_\kappa = \dot{p}^\lambda + p^\lambda\left(\frac{d\dot{A}}{dA} - v^\mu\|_\mu\right)$
(T4–6) Variationsprinzip in den Geschwindigkeiten	$\int_{V_0} (\overset{\circ}{T}{}^{KL} \delta D_{KL} + T^{KL} V^M\|_K \delta V_M\|_L)\, dV_0 = \int_{A_0} \dot{P}^L \delta V_L\, dA_0 + \int_{V_0} \dot{F}^L \delta V_L\, dV$	$\int_V (\overset{\circ}{\sigma}{}^{kl} \delta d_{kl} + \sigma^{kl} v^m\|_k \delta v_m\|_l)\, dV = \int_A \delta v_l (p^l dA)^{\cdot} + \int_V \delta v_l (f^l dV)^{\cdot}$	$\int_V (\overset{\circ}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} \delta d_{\kappa\lambda} + \sigma^{\kappa\lambda} v^\mu\|_\kappa \delta v_\mu\|_\lambda)\, dV = \int_A \delta\vec{v} (\vec{p}\, dA)^{\cdot} + \int_V \delta\vec{v} (\vec{f}\, dV)^{\cdot}$

d'Alembert einschließen kann. Analoge Gleichungen entstehen für den Ausgangszustand. Aus den Gleichungen (27) und (28) folgen nach der Anwendung des Gaußschen Satzes auf das Integral über die Schnittfläche A_T bzw. A_{T_0} die lokalen Gleichgewichtsbeziehungen (T4–1) und (T4–2).
Auf der Oberfläche A des Kontinuums gelten die Randbedingungen

$$\vec{u} = \vec{c} \quad \text{auf} \quad A_u \tag{29}$$

$$\frac{d\vec{S}}{dA} = \vec{p} \quad \text{auf} \quad A_p\,. \tag{30}$$

(30) führt auf die Koordinatenbeziehungen (T3–4).
Infolge des Materialverhaltens – es betrifft im allgemeinen Fall den inelastischen Festkörper – ist es zweckmäßig, die Zeitableitungen der Gleichgewichtsbedingungen (T4–1) und der Randbedingungen (T4–3) einzuführen. Sie entstehen durch materielle Differentiation von (T4–1) und (T4–3) und führen auf (T4–4) und (T4–5). Dieser Prozeß zeigt eine stärkere Divergenz der formalen Darstellung in den drei Bezugssystemen, als dies bisher der Fall war. Einige Bemerkungen sollen zu dem Differentiationsprozeß daher getrennt für die Bezugssysteme erfolgen.
Im Lagrangeschen Bezug ist die Differentiation am einfachsten. Da die Metrik zeitlich konstant ist, gilt

$$(U^L|_M)^{\cdot} = \dot{U}^L|_M = V^L|_M \tag{31}$$

und für die Koordinaten des Normalenvektors auf dem Ausgangsschnittflächenelement ergibt sich

$$\dot{N}_K = 0\,. \tag{32}$$

Im Eulerschen Bezug ist zu beachten, daß wegen (T1–4) partielle Ableitung nach der Zeit und kovariante Ableitung vertauschbar sind. Daher gilt mit (7)

$$\begin{aligned}(\sigma^{kl}|_k)^{\cdot} &= \frac{\partial}{\partial t}\sigma^{kl}\Big|_k + \sigma^{kl}\Big|_{km} v^m \\ &= [\dot{\sigma}^{kl} - \sigma^{kl}|_m v^m]\Big|_k + \sigma^{kl}\Big|_{km} v^m \\ &= \dot{\sigma}^{kl}\Big|_k - \sigma^{kl}\Big|_m v^m\Big|_k\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Aus (19) und der Zeitableitung von (10.1) läßt sich

$$\dot{X}^K{}_{,k} = -X^K{}_{,n}\, v^n|_k \tag{34}$$

herleiten und für die Volumenänderung gilt [2], [3]

$$\frac{d\dot{V}}{dV} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = v^m|_m\,. \tag{35}$$

Mit diesen beiden Beziehungen folgt aus (18) und (19) nach einigen wenigen Umformungen

$$\dot{n}_k = \left(v^m|_m - \frac{d\dot{A}}{dA}\right) n_k - v^m|_k\, n_m\,. \tag{36}$$

Mit (33) und (36) sind die wesentlichen Hilfsformeln zur Bestimmung von (T4–4) und (T4–5) im Euler-System gegeben.
Im konvektiven Bezug ist bei der Ausführung der Zeitableitung (16) zu beachten. Außerdem gibt die Zeitableitung von (18) unter Berücksichtigung von (21) und (35)

$$\dot{n}_\kappa = \left(v^\mu|_\mu - \frac{d\dot{A}}{dA}\right) n_\kappa\,. \tag{37}$$

Das Variationsprinzip in den Geschwindigkeiten entsteht aus den Gleichungen (T4–4) und (T4–5), wenn (T4–4) mit

$$\delta\vec{v} = \delta V_L \vec{G}^L = \delta v_l \vec{g}^l = \delta v_\lambda \vec{g}^\lambda \tag{38}$$

multipliziert und über den Körper integriert wird. Dabei muß auf dem Rand mit gegebenen Verschiebungen (und damit Geschwindigkeiten) die Variation verschwinden:

$$\delta\vec{v} = \vec{0} \quad \text{auf} \quad A_u\,. \tag{39}$$

Die Anwendung des Gaußschen Satzes und die Erfüllung der Randbedingungen (T4–5) auf A_p ergibt unter Beachtung der Definition (T3–5) schließlich (T4–6). Das Bemerkenswerte an diesen Variationsprinzipien ist ihre hohe formale Äquivalenz in allen 3 Bezugssystemen.
Es soll nochmals explizit erwähnt werden, daß diese Herleitung an keinerlei Materialeigenschaften gebunden ist und ebenfalls nicht durch Zeitableitung aus irgendeinem Variationsprinzip für die Grundgrößen Verschiebung, Verzerrung, Spannung und Kraft entsteht. Solche Variationsprinzipe sind auf gleichem Wege aus (T4–1) und (T4–2) herleitbar, wenn die Gleichung (T4–1) mit

$$\delta\vec{u} = \delta U_L \vec{G}^L = \delta u_l \vec{g}^l = \delta u_\lambda \vec{g}^\lambda \tag{40}$$

multipliziert wird und

$$\delta\vec{u} = \vec{0} \quad \text{auf} \quad A_u \tag{41}$$

gilt. Diese Variationsprinzipe sind aber für inelastische Probleme nutzlos, da sie nur dann weiter verwertet werden können, wenn das Material elastisch ist. Im Gegensatz zur eng begrenzten Anwendbarkeit von solchen lassen sich die 3 Gleichungen (T4–6) natürlich auch für elastische Stoffe nutzen.
Die Herleitung von (T4–6) betont die besondere Stellung der Truesdellschen Spannungsgeschwindigkeit in der Kontinuumsmechanik.

7. Deformationsgesetz und Potential in den Geschwindigkeiten (Tabelle 5)

Für den Festkörper läßt sich ein in den Geschwindigkeiten lineares Deformationsgesetz standardisieren [7]. Werden interne Zustandsvariable zugelassen, beschreibt dieses Gesetz alle Grundtypen des inelastischen und nichtlinearen Deformationsverhaltens der Festkörper. Der Einfluß der Temperatur

$$\vartheta = \vartheta(X^M, t) = \vartheta(x^m, t) = \vartheta(\Theta^\mu, t) \tag{42}$$

kann dabei Berücksichtigung finden, allerdings soll die Kopplung des Temperaturfeldes ϑ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ vernachlässigt und ϑ als gegebene „Belastung" vorausgesetzt werden. Das Deformationsgesetz ist durch (T5–1) beschrieben. Die internen Variablen h_i $(1 \leq i \leq N)$ sind dem materiellen Teilchen zugeordnet und beeinflussen nur über die Materialsteifigkeitsmatrizen ($C^{\kappa\lambda\mu\nu}$, $s_\vartheta^{\kappa\lambda}$, $s^{\kappa\lambda}$) das Feldproblem. Sind sie über eine konstitutive Theorie in einem Bezugssystem bestimmt worden, brauchen sie nicht transformiert zu werden. Das gilt auch für solche internen Parameter, die innerhalb der Herleitung von (T5–1.1) die Bedeutung von Tensoren hatten, wie z. B. die Verschiebung des Mittelpunktes einer Fließfläche bei kinematischer Verfestigung. Hinsichtlich der Randwertaufgabe (T4–4), (T4–5) oder (T4–6) ist diese Bedeutung der Elemente von h_i gegenstandslos.

Die Beziehungen zwischen den Tensorkoordinaten (T5–2) sind nur in einer Richtung ausgewiesen. Sie folgen sofort aus (T2–9) und (T3–8) und sind leicht durch die inverse Transformation zu ergänzen.

Dem Material kann genau dann ein lokales Formänderungspotential in den Geschwindigkeiten (T5–3) zugeordnet werden, wenn die Tensoren $C^{\kappa\lambda\mu\nu}$ in den Indexpaaren symmetrisch sind. Die Frage nach dieser Symmetrie ist daher eine wesentliche in der konstitutiven Theorie. Sie trennt die Materialien in die Klassen mit und ohne Formänderungspotential. Werden die Summanden der Variationsgleichung (T4–6) einer inneren und äußeren „virtuellen Arbeit" (Anführungsstriche deshalb, weil dabei physikalisch keine Arbeit mehr gemeint ist, sondern eine formale Übertragung des Zustands auf den Geschwindigkeitsraum erfolgt) zugeordnet, dann ist die innere „virtuelle Arbeit" die Variation des globalen Formänderungspotentials (T5–4), das durch Integration des lokalen Potentials, ergänzt um eine geometrische „Steifigkeit", über das Volumen entsteht. Die Variationsgleichung hat nun die Form (T5–6) mit der Abkürzung (T5–5). Daß die Existenz des Potentials eine Materialeigenschaft und unabhängig von der Beschreibung ist, zeigt die Gleichung (T5–2.1). Es ist klar, daß Deformationsgesetze mit anderen Spannungsgeschwindigkeiten die Prüfung des Potentials nur mit erhöhtem mathematischen und Definitionsaufwand zulassen. Symmetriefragen erhalten daher erst nach der Umrechnung in die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit physikalische Bedeutung. Das klärt auch die in [12] angedeuteten Widersprüche.

8. Anwendungsbeispiel

Im Rahmen der Forschung wurde an der TU Karl-Marx-Stadt ein Programm geschaffen, das die Erstellung und Testung der Materialmatrizen nach (T5–1) in der konvektiven Metrik unterstützt [7]. Kern dieses Programmes sind Unterprogramme, die die Materialmatrizen $C^{\kappa\lambda\mu\nu}$, $s_\vartheta^{\kappa\lambda}$, $s^{\kappa\lambda}$, $B_i^{\mu\nu}$, $e_{\vartheta i}$ und e_i als Funktion von $g_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu}$, $\sigma^{\kappa\lambda}$, h_i und ϑ berechnen.

Sollen solche Unterprogramme in einem Feldprogramm wie FIDEFA [5] auf der Grundlage der Lagrangeschen Metrik als austauschbare Bausteine genutzt werden, dann lassen sich die Eulerschen Koordinaten frei wählen. Sie sollen mit den konvektiven Koordinaten zur Zeit t identifiziert werden:

$$x^m = \delta^m_\mu \, \Theta^\mu , \tag{43}$$

und aus (10.2) folgt

$$c^m_{\mu\cdot} = \delta^m_\mu . \tag{44}$$

Zur Anpassung der Materialunterprogramme werden lediglich zwei Adapterprogramme mit einfachen Matrizenmultiplikationen benötigt.

Vor dem Aufruf des Materialunterprogramms sind nach (T1–5), (T2–9) und (T3–8)

$$g_{\mu\nu} = c^M_{\mu\cdot} \, c^N_{\nu\cdot} \, G_{MN} \tag{45}$$

$$\epsilon_{\mu\nu} = \overset{*}{c}{}^M_{\mu\cdot} \, \overset{*}{c}{}^N_{\nu\cdot} \, E_{MN} \tag{46}$$

		LAGRANGE	EULER	KONVEKTIV
(T5-1.1)	Deformationsgesetz	$\overset{\circ}{T}{}^{KL} = C^{KLMN} D_{MN} + S_\vartheta^{KL} \dot{\vartheta} + S^{KL}$	$\overset{\circ}{\sigma}{}^{kl} = C^{klmn} d_{mn} + s_\vartheta^{kl} \dot{\vartheta} + s^{kl}$	$\overset{\circ}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} = C^{\kappa\lambda\mu\nu} d_{\mu\nu} + s_\vartheta^{\kappa\lambda} \dot{\vartheta} + s^{\kappa\lambda}$
(T5-1.2)		$\dot{h}_i = B_i^{MN} D_{MN} + e_{\vartheta i} \dot{\vartheta} + e_i$	$\dot{h}_i = B_i^{mn} d_{mn} + e_{\vartheta i} \dot{\vartheta} + e_i$	$\dot{h}_i = B_i^{\mu\nu} d_{\mu\nu} + e_{\vartheta i} \dot{\vartheta} + e_i$
(T5-2.1)	Beziehungen zwischen Tensorkoordinaten	$\Longleftarrow \; C^{KLMN} = \frac{\rho_0}{\rho} \overset{*}{c}{}^K_{k\cdot} \overset{*}{c}{}^L_{l\cdot} \overset{*}{c}{}^M_{m\cdot} \overset{*}{c}{}^N_{n\cdot} \, C^{klmn}$		$\Longleftarrow \; C^{klmn} = c^k_{\kappa\cdot} c^l_{\lambda\cdot} c^m_{\mu\cdot} c^n_{\nu\cdot} \, C^{\kappa\lambda\mu\nu}$
(T5-2.2)		$\Longleftarrow \; S_\vartheta^{KL} = \frac{\rho_0}{\rho} \overset{*}{c}{}^K_{k\cdot} \overset{*}{c}{}^L_{l\cdot} \, s_\vartheta^{kl}$		$\Longleftarrow \; s_\vartheta^{kl} = c^k_{\kappa\cdot} c^l_{\lambda\cdot} \, s^{\kappa\lambda}$
(T5-2.3)		$\Longleftarrow \; S^{KL} = \frac{\rho_0}{\rho} \overset{*}{c}{}^K_{k\cdot} \overset{*}{c}{}^L_{l\cdot} \, s^{kl}$		$\Longleftarrow \; s^{kl} = c^k_{\kappa\cdot} c^l_{\lambda\cdot} \, s^{\kappa\lambda}$
(T5-2.4)		$\Longleftarrow \; B_i^{MN} = \overset{*}{c}{}^M_{m\cdot} \overset{*}{c}{}^N_{n\cdot} \, B_i^{mn}$		$\Longleftarrow \; B_i^{mn} = c^m_{\mu\cdot} c^n_{\nu\cdot} \, B_i^{\mu\nu}$
(T5-3.1)	Lokales Potential	$\overset{\circ}{T}{}^{KL} = \frac{\partial \pi_0^*}{\partial D_{KL}}$	$\overset{\circ}{\sigma}{}^{kl} = \frac{\partial \pi^*}{\partial d_{kl}}$	$\overset{\circ}{\sigma}{}^{\kappa\lambda} = \frac{\partial \pi^*}{\partial d_{\kappa\lambda}}$
(T5-3.2)		$\pi_0^* = \frac{1}{2} C^{KLMN} D_{KL} D_{MN} + (S_\vartheta^{KL} \dot{\vartheta} + S^{KL}) D_{KL}$	$\pi^* = \frac{1}{2} C^{klmn} d_{kl} d_{mn} + (s_\vartheta^{kl} \dot{\vartheta} + s^{kl}) d_{kl}$	$\pi^* = \frac{1}{2} C^{\kappa\lambda\mu\nu} d_{\kappa\lambda} d_{\mu\nu} + (s_\vartheta^{\kappa\lambda} \dot{\vartheta} + s^{\kappa\lambda})$
(T5-4)	Globales Potential	$\pi = \int_{V_0} \pi_0^* + \frac{1}{2} T^{KL} V^M\|_K V_M\|_L \, dV_0$	$\pi = \int_V \pi^* + \frac{1}{2} \sigma^{kl} v^m\|_k v_m\|_l \, dV$	$\pi = \int_V \pi^* + \frac{1}{2} \sigma^{\kappa\lambda} v^\mu\|_\kappa v_\mu\|_\lambda \, dV$
(T5-5)	Äußere „virtuelle Arbeit"	$\delta L_A = \int_{A_0} \dot{P}^L \delta V_L \, dA_0 + \int_{V_0} \dot{F}^L \delta V_L \, dV$	$\delta L_A = \int_A \delta v_l (p^l dA)^\cdot + \int_V \delta v_l (f^l dV)^\cdot$	$\delta L_A = \int_A \delta \vec{v} (\vec{p} dA)^\cdot + \int_V \delta \vec{v} (\vec{f} dV)^\cdot$
(T5-6)	Variationsgleichung	$\delta\pi = \delta L_A$	$\delta\pi = \delta L_A$	$\delta\pi = \delta L_A$

Tabelle 5
Deformationsgesetz und Formänderungspotential in den Geschwindigkeiten

$$\sigma^{\kappa\lambda} = \frac{\rho}{\rho_o} \overset{*}{c}{}^{\kappa}_{K\cdot} \overset{*}{c}{}^{\lambda}_{L\cdot} T^{KL} \tag{47}$$

zu berechnen.
Nach Abarbeitung des Materialunterprogramms müssen die Materialgrößen der konvektiven Metrik auf die Lagrangesche nach (T5–2) rücktransformiert werden

$$C^{KLMN} = \frac{\rho_o}{\rho} \overset{*}{c}{}^{K}_{\kappa\cdot} \overset{*}{c}{}^{L}_{\lambda\cdot} \overset{*}{c}{}^{M}_{\mu\cdot} \overset{*}{c}{}^{N}_{\nu\cdot} C^{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{48}$$

$$s^{KL}_{\vartheta} = \frac{\rho_o}{\rho} \overset{*}{c}{}^{K}_{\kappa\cdot} \overset{*}{c}{}^{L}_{\lambda\cdot} s^{\kappa\lambda}_{\vartheta} \tag{49}$$

$$s^{KL} = \frac{\rho_o}{\rho} \overset{*}{c}{}^{K}_{\kappa\cdot} \overset{*}{c}{}^{L}_{\lambda\cdot} s^{\kappa\lambda} \tag{50}$$

$$B^{MN}_{i} = \overset{*}{c}{}^{M}_{\mu\cdot} \overset{*}{c}{}^{N}_{\nu\cdot} B^{\mu\nu}_{i} \; . \tag{51}$$

Der in beiden Umrechnungsvorschriften enthaltene Faktor ρ_o/ρ läßt sich nach [3] aus den Matrizen $g_{\mu\nu}$, G_{MN} und $\overset{*}{c}{}^{\mu}_{M\cdot}$ berechnen:

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \det(\overset{*}{c}{}^{\mu}_{M\cdot}) \left(\frac{\det(g_{\mu\nu})}{\det(G_{MN})}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{52}$$

Die Matrix mit den Elementen

$$\overset{*}{c}{}^{M}_{\mu\cdot} = X^{M}{}_{,\mu} \tag{53}$$

ist keine Funktion der Zeit t, da sowohl X^M wie auch Θ^μ materielle Koordinaten sind. Sie kann insbesondere mit der speziellen Wahl

$$X^M = \delta^M_\mu \; \Theta^\mu \tag{54}$$

auf die Form der Einheitsmatrix

$$\overset{*}{c}{}^{M}_{\mu} = \delta^{M}_{\mu} \tag{55}$$

gebracht werden.

Nach der Integration über die Zeit ist der neue Zustandsgrößensatz T^{KL}, E_{MN}, U^M, h_i, ϑ festgelegt und die Rechnung beginnt erneut bei (45).
Durch die Formelsätze (45) bis (47), (48) bis (51) und (53) sind alle notwendigen Anpassungsarbeiten theoretisch fundiert. Zu vermerken bleibt, daß diese Operationen an allen Punkten der numerischen Diskretisierung, also im Fall der FEM für alle Gauß-Punkte, erfolgen muß.

LITERATUR

[1] Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2. Leipzig, 1985.

[2] Prager, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. Basel, Stuttgart 1961.

[3] Günther, H.: Finite Deformationen. Zur Berechnung großer elastischer und inelastischer Deformationen kompressibler Materialien mit einer inkrementen Methode. Wiss. Beiträge der Ingenieurhochschule, Zwickau 1983.

[4] Manson, J.: Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory (Studies in Applied Mechanics, Band 4). Amsterdam, Oxford, New York 1980.

[5] Strobel, W.: Zur Berechnung endlicher elastisch-plastischer Deformationen mit der Methode der finiten Elemente. Diss., IH Zwickau 1984.

[6] Oldroyd, J. G.: On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. A 200 (1950), 523 – 541.

[7] Bergander, H.: Deformationsgesetze der Standardform in konvektiver Metrik, Z. Technische Mechanik 8 (1987) H. 2.

[8] Herrlich, O.: Die Berechnung des elastisch-plastischen Verhaltens von rotationssymmetrisch belasteten Rotationsschalen unter Berücksichtigung endlicher Verformungen. Habilitationsschrift, TU Dresden 1969.

[9] Röhle, H.; Ulbricht, V.: Berechnung von Rotationsschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten. Diss., TU Dresden 1975.

[10] Landgraf, G.: Extremalprinzipe für geometrisch nichtlineare Flächentragwerke. Weiterbildungsseminar, TU Dresden 1982.

[11] Hill, R.: Some Basic Principles in the Mechanics of Solids Without a Natural Time. J. Mech. Phys. Solids 7 (1959), 209 – 225.

[12] Günther, H.; Drey, K.; Strobel, W.: Plastizitätstheoretische Untersuchungen von Umformvorgängen mit der Methode der finiten Elemente. Z. Techn. Mech. 1 (1980), 63 – 68.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Helge Bergander
TU Karl-Marx-Stadt
Sektion Maschinen-Bauelemente
PSF 964

Karl-Marx-Stadt
9010