

Anwendung der Fourier-Entwicklung zur Eigenschwingungsanalyse sektorsymmetrischer Strukturen im PS COSAR

Udo Fischer, Jörg Kirbs

1. Einleitung

Universelle Programmsysteme auf der Basis der FEM zur Berechnung von Konstruktionen und einzelnen Bauteilen haben in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung erlangt. Bei dem Umfang, den die zu behandelnden Probleme dabei annehmen können und den damit anfallenden großen Datenmengen und Rechenzeiten, spielt die Frage nach Verkürzung der Rechenzeit und Einsparung von Speicherplatz eine große Rolle. Als Möglichkeiten dazu seien hier die Anwendung der Substrukturtechnik und die Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften genannt. Bei der Behandlung dynamischer Probleme kann die Substrukturtechnik nicht so vorteilhaft angewendet werden wie in der Elastostatik (siehe [1] und [2]). Die in dem vom WB Festkörpermechanik der TU Magdeburg entwickelten PS COSAR angewendete statische Kondensation hat z. B. den Nachteil, daß außer den Bindungsknoten zwischen benachbarten Superelementen auch noch zusätzliche externe Knoten eingeführt werden müssen, die eine Darstellung der Eigenformen im gesuchten Bereich des Lösungsspektrums zulassen. Dabei muß ein Kompromiß zwischen der ausreichenden Reduktion des Freiheitsgrades des Gesamtsystems und den Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse geschlossen werden. Unter Berücksichtigung dessen kommt anderen Methoden zur Reduktion des Freiheitsgrades der zu behandelnden Probleme große Bedeutung zu. In [3] wurde ein Verfahren zur dynamischen Analyse sektorsymmetrischer Bauteile mit Hilfe einer Fourier-Entwicklung vorgestellt und an einem speziellen Programm zur Berechnung scheibenförmiger Bauteile getestet. Dieses Verfahren ist inzwischen erweitert und im PS COSAR zur Anwendung gebracht worden. Weitere Untersuchungen zur Analyse sektorsymmetrischer Bauteile werden in [4] bis [7] angeboten.

2. Darstellung der wichtigsten Grundlagen und Anpassung an das COSAR-Konzept

Zur Herleitung der theoretischen Grundlagen wird an dieser Stelle auf [3] verwiesen. Nachfolgend sollen nur noch einmal die wichtigsten Gleichungen zusammengefaßt und einige Änderungen gegenüber [3], die sich aus der Anpassung an das COSAR-Konzept ergaben, aufgeführt werden.

Die Zerlegung einer sektorsymmetrischen Struktur mit Hilfe der Fourier-Entwicklung führt auf das folgende Eigenwertproblem:

$$\begin{bmatrix} A + (B + B^T) \cos k\varphi & (B - B^T) \sin k\varphi \\ (B^T - B) \sin k\varphi & A + (B + B^T) \cos k\varphi \end{bmatrix} \bar{a} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & O \\ O & M \end{bmatrix} \bar{a} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{oder } [\bar{K} - \omega^2 \bar{M}] \bar{a} = 0$$

Gleichung (1) vereinfacht sich für $k=0$ zu:

$$[A + (B + B^T) - \omega^2 M] a_0 = 0 \quad (1a)$$

und bei geraden n für $k=n/2=N$ gilt:

$$(A - B - B^T - \omega^2 M) a_N = 0, \quad (1b)$$

mit:

n – Anzahl der Sektoren

N – Anzahl der Fourierglieder

$$N = \frac{n}{2} \text{ für gerades } n$$

$$N = (n-1)/2 \text{ für ungerades } n$$

k = Ordnung des Fouriergliedes

$$k = 1 \dots N$$

und

$$\varphi = 2\pi/n.$$

Die Eigenvektoren q_{lk} lassen sich wie folgt ermitteln:

$$q_{lk} = a_k \cos k l \varphi + b_k \sin k l \varphi \quad (2)$$

wobei

$$l = 1 \dots n$$

und

$$k = 1 \dots N.$$

Die quadratischen Matrizen A , B und M ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} A &= K_{LL} + T K_{EE} T^T \\ B &= K_{LE} T^T \\ M &= M_{LL} + T M_E T^T \end{aligned} \quad (3)$$

unter der Voraussetzung, daß für den Sektor l wie bei Anwendung der Substrukturtechnik externe und lokale Knoten definiert werden. Als externe Knoten werden die auf der Grenzfläche zum $(l+1)$ -ten Sektor festgelegt, alle übrigen als lokale Knoten (Bild 1).

Die von der x - und y -Achse aufgespannte Ebene wird hierbei als Sektorebene bezeichnet.

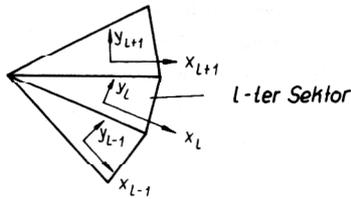


Bild 1

Damit erhalten die Steifigkeits- und Massenmatrix des Sektors folgendes Aussehen:

$$K_s = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LE} \\ K_{LE}^T & K_{EE} \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} M_{LL} & M_{LE} \\ M_{LE}^T & M_{EE} \end{bmatrix}$$

Beim Aufbau der Sektormassenmatrix M wurden die Matrizen M_{LE} und M_{LE}^T vernachlässigt, da sie in M schiefsymmetrische Anteile liefern würden, die bei einer Diagonalisierung durch Zeilensummenbildung verschwinden. Es zeigte sich jedoch, daß die mit einer auf diese Art erzeugten Massenmatrix erzielten Ergebnisse genauer sind, als die mit einer vollständig diagonalisierten (d. h. M_{LL} und M_{EE} sind Diagonalmatrizen). Im PS COSAR sind beide Versionen möglich.

Die Submatrizen K_{LL} , K_{LE} , K_{EE} sowie die entsprechenden Massenmatrizen werden vom PS COSAR aufgebaut und abgespeichert, so daß sie für die weiteren Berechnungen entsprechend den Gleichungen (3) zur Verfügung stehen. Auf den Aufbau der Transformationsmatrix T wird im Abschnitt 3. noch näher eingegangen. Zur Lösung des Eigenwertproblems (1) konnten die im Zweig COSAR-Dynamik vorhandenen Programmbausteine ohne Einschränkung verwendet werden.

3. Aufbau der Transformationsmatrix

Zum Aufbau der Transformationsmatrix soll ausgegangen werden vom Vektor der verallgemeinerten Koordinaten q_{E1} der Knoten der Grenzfläche von l -ten zum $(l+1)$ -ten Sektor. Dieser Vektor beinhaltet die auf das Koordinatensystem x_1, y_1, z bezogenen Verschiebungen u_1, v_1, w_1 bzw. die Verdrehungen $\kappa_1, \psi_1, \vartheta_1$. Zwischen dem Vektor q_{E1} und einem auf das Koordinatensystem x_{l+1}, y_{l+1}, z bezogenen Vektor $q_{L,l+1}$ besteht die Transformationsbeziehung:

$$q_{L,l+1} = \bar{T} q_{E1} \quad (4)$$

Die orthogonale Matrix \bar{T} berücksichtigt dabei folgende Beziehungen zwischen den Koordinaten der Knoten:

$$\begin{aligned} u_{i,l+1} &= u_{i1} \cos \varphi + v_{i1} \sin \varphi; & \kappa_{i,l+1} &= \kappa_{i1} \cos \varphi + \psi_{i1} \sin \varphi \\ v_{i,l+1} &= u_{i1} \sin \varphi + v_{i1} \cos \varphi; & \psi_{i,l+1} &= -\kappa_{i1} \sin \varphi + \psi_{i1} \cos \varphi \\ w_{i,l+1} &= w_{i1} & \vartheta_{i,l+1} &= \vartheta_{i1} \end{aligned} \quad (5)$$

Diese Transformationsbeziehungen wurden bisher in entsprechender Modifikation für die im Elementkatalog von COSAR (siehe [8]) enthaltenen isoparametrischen 3D-, Scheiben-, Platten- und dicken Schalenelementen reali-

siert. Damit der Vektor $\bar{q}_{L,l+1}$ das gleiche Format erhält wie $\bar{q}_{L,l}$, wird er mit Nullelementen aufgefüllt. Entsprechendes gilt auch für die Transformationsmatrix \bar{T} , die so entstehende Matrix wird mit T bezeichnet.

4. Verbindung mit einer Balkenachse

Der Anschluß einer Achse an ein sektorsymmetrisches Bauteil wird mit Hilfe von eindimensionalen Balkenelementen realisiert. Dies erfolgt unter der Voraussetzung, daß die Balkenelemente normal zur Sektorebene in der Mitte des Bauteils angeschlossen werden. Somit sind die Knoten der Achse gleichzeitig allen Sektoren zugehörig und für die Verschiebungen und Verdrehungen dieser Knoten gelten die Gleichungen (5). Die Steifigkeiten und Massen der Balkenelemente gehen dabei nur zu einem n -tel in die Steifigkeits- und Massenmatrix des Sektors ein.

Unter Verwendung der Gleichungen (2) und (5) lassen sich dann folgende Bedingungen für die Freiwerte a_k und b_k der verallgemeinerten Koordinaten der Achsenknoten herleiten:

$$\begin{aligned} \text{für } k=0 & \quad a_0^x = a_0^y = b_0^x = b_0^y = 0 \\ \text{für } k=1 & \quad a_1^x = -b_1^y; \quad a_1^y = b_1^x; \quad a_1^z = b_1^z = 0 \\ \text{für } k>1 & \quad a_k^x = a_k^y = a_k^z = b_k^x = b_k^y = b_k^z = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Dabei geben die oberen Indizes x, y und z an, daß es sich um Freiwerte der Verschiebungen bzw. Verdrehungen in Richtung der x, y oder z -Achse handelt.

Aus (6) ist ersichtlich, daß nur für das 0. und 1. Fourierglied Randbedingungen für die Kopplung der Balkenelemente an die Platten-, Scheiben-, 3D- oder Schalenelemente aufgestellt werden müssen. Für das 0. Fourierglied sind dies Randbedingungen in Richtung der Normalen zur Sektorebene und für das 1. Fourierglied Randbedingungen in den beiden Richtungen der Sektorebene.

Dies soll am Beispiel des Anschlusses von Balkenelementen an 3D-Elemente erläutert werden.

Im Bild 2 ist die Kopplung einer Balkenachse mit einer 3D-Struktur dargestellt. Die Mittelachse des Balkens (Punkt 1) wird im Punkt 1 angeschlossen und im Punkt 2 wird der Anschluß des Balkenrandes simuliert. Der

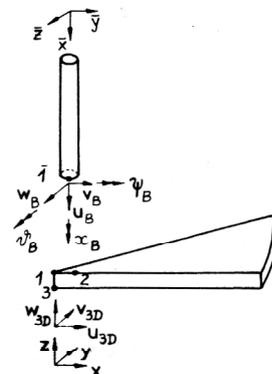


Bild 2

Kopplung einer Balkenachse mit einer 3D-Struktur

Punkt 3 liegt in der Verlängerung der Mittelachse des Balkens. Die 3D-Struktur wird so vernetzt, daß alle Koppelpunkte Knotenpunkte sind und Punkt 2 auf der x-Achse und Punkt 3 auf der z-Achse liegt. Der Abstand r zwischen den Punkten 1 und 2 entspricht z. B. bei Balken mit Kreisquerschnitt dem Radius des Balkens. Der Balkenquerschnitt muß notwendigerweise ebenfalls sektorsymmetrisch sein. Die Punkte 1 und 3 besitzen den Abstand d voneinander.

Damit können die Randbedingungen wie folgt formuliert werden:

$$u_{3D}^1 = v_B^1 \quad (I) \quad v_{3D}^2 - v_{3D}^1 = r \kappa_B^1 \quad (IV)$$

$$v_{3D}^1 = -w_B^1 \quad (II) \quad w_{3D}^2 - w_{3D}^1 = r \vartheta_B^1 \quad (V)$$

$$w_{3D}^1 = -u_B^1 \quad (III) \quad v_{3D}^3 - v_{3D}^1 = d \kappa_B^1 \quad (VI)$$

wobei sich die verallgemeinerten Koordinaten der 3D-Struktur auf das allgemeine Koordinatensystem x, y, z beziehen und die des Balkens auf das spezielle Koordinatensystem $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Für das 0. Fourierglied müssen die Randbedingungen (III) bis (VI) und für das 1. Fourierglied mit Ausnahme von (III) alle Randbedingungen realisiert werden. Außerdem gelten für alle Fourierglieder die Beziehungen (6). Die Einarbeitung der Randbedingungen erfolgt mit Hilfe der Penalty-Funktion-Methode. Dafür werden vom Programmsystem COSAR die entsprechenden Algorithmen zur Verfügung gestellt.

5. Realisierung im PS COSAR

Die Realisierung der Fourier-Entwicklung für sektorsymmetrische Strukturen erfolgt im PS COSAR durch den Prozessor SEKSYM. Dieser wird vom Hauptprozessor

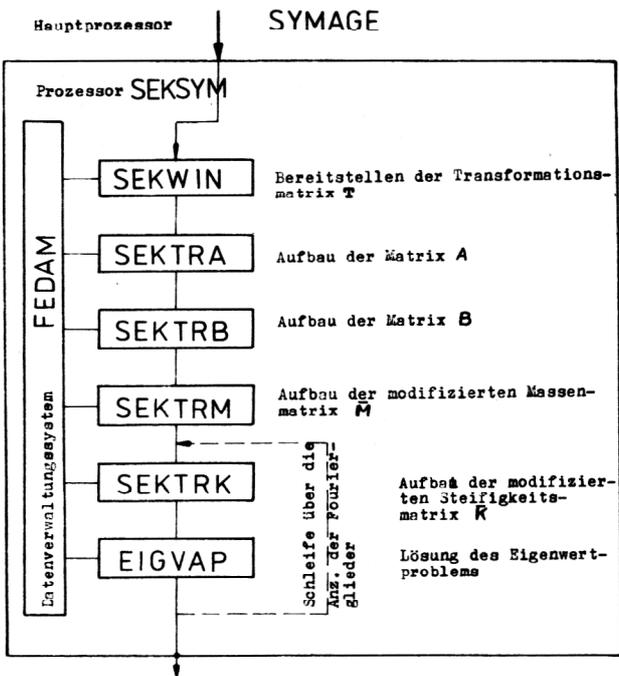


Bild 3
Prozessor SEKSYM

SYMAGE aktiviert. Bild 3 gibt eine Übersicht über den Aufbau des Prozessors SEKSYM. Die Eigenvektoren werden mit Hilfe des Programmbausteins SEKEIV ermittelt, der vom Hauptprozessor zur Ergebnisausgabe für den Programmzweig Dynamik RESULD aufgerufen wird.

6. Testbeispiele und Auswertung der Ergebnisse

Als erstes Testbeispiel wurde eine Kreisringplatte gewählt, deren analytische Lösung nach der Kirchhoffschen Plattentheorie [9] zu entnehmen ist. Für die FEM-Rechnung wurde ein Achtel vernetzt, einmal unter Verwendung von 4 und dann von 16 Elementen. Die Unterteilung der Lösungen erfolgte nach der Anzahl der Knotendurchmesser (n) und Knotenkreise (s) (Tabelle 1).

Tabelle 1
Eigenfrequenzen einer Kreisringplatte in 10^4 1/s
($r_i = 10$ mm, $r_a = 40$ mm, $h = 2$ mm)

n	s	analytisch	mit SEKSYM		mit Substrukturtechnik
			4 El.	16. El.	
0	0	1,14	1,28	1,18	0,99
1	0	0,95	1,23	0,99	0,95
2	0	1,36	1,52	1,27	1,27
3	0	2,40	2,74	2,38	2,38
0	1	7,12	11,05	7,60	7,75

Im Vergleich dazu ist in der rechten Spalte die auf der gleichen Vernetzung (16 Elemente) beruhende Lösung mit Hilfe der Substrukturtechnik angegeben.

Bei einer Vernetzung mit 4 Elementen erbrachte die Substrukturtechnik nur sehr unzureichende Ergebnisse. Die Rechenzeiteinsparung (gemessen an den CPU-Zeiten) des hier beschriebenen Verfahrens gegenüber der Substrukturtechnik lagen bei 20 – 25 %. Als weiteres Beispiel sollen die Scheiben- und Plattenschwingungen in Bild 4 dargestellten Lamelle berechnet werden.

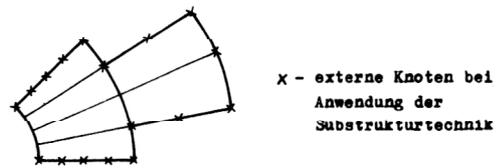


Bild 4
Ausschnitt aus einer Lamelle (1/6 vernetzt)

Im Vergleich dazu sind die Lösungen für die dicke Schale ermittelt worden. Für die Rechnung mit der Substrukturtechnik wurden 17 externe Knoten definiert. Damit lassen sich die Eigenformen recht gut darstellen. Dies führt (besonders für das 0. und 3. Fourierglied) zu einer guten Übereinstimmung der mit beiden Verfahren (Fourier-Entwicklung und Substrukturtechnik) erzielten Ergebnisse (Tabelle 2). Dabei konnte durch Anwendung der Fourier-Entwicklung 30 – 45 % an Rechenzeit eingespart werden.

Für die Berechnung eines Verdichterlaufrades, bestehend aus 18 Sektoren mit einem Freiheitsgrad von 381 je Sek-

Tabelle 2

Eigenfrequenzen für das im Bild 4 dargestellte Modell einer Lamelle in $10^4 \frac{1}{s}$ geordnet nach Fouriergliedern

Ordnung des Fouriergl.	mit SEKSYM			mit Substrukturtechnik	
	Scheibe	Platte	dicke Schale	Scheibe	Platte
0.	1,51	0,478	0,475; 1,47	1,51	0,478
	8,39	2,37	2,35 ; 8,28	8,55	2,41
1.	3,52	0,422	0,416; 1,87	3,54	0,441
	7,24	1,95	3,46 ; 7,69	8,16	2,04
2.	4,10	0,493	0,492; 1,87	4,12	0,510
	9,61	1,88	4,03 ; 9,35	10,02	1,77
3.	4,09	0,639	0,627; 1,58	4,12	0,639
	10,69	1,69	3,89 ; 10,25	10,71	1,69

tor (bei Vernetzung mit 3D-Elementen), wurde ein Aufwandsvergleich angestellt. Dabei werden für die Iteration bei Anwendung der Substrukturtechnik ca. $3,97 \cdot 10^8$ Rechenoperationen benötigt, bei Anwendung der Fourier-Entwicklung nur ca. $2,47 \cdot 10^8$ Operationen, obwohl 10 Eigenwertprobleme zu lösen sind.

Abschließend sollen die Vorteile der Fourier-Entwicklung noch einmal kurz zusammengefaßt werden, die dieses Verfahren als günstige Alternative zu anderen Verfahren (z. B. Substrukturtechnik) bei der Berechnung sektorsymmetrischer Bauteile ausweisen.

- Mit zunehmender Kompliziertheit der geometrischen Struktur der Sektoren wird prozentual mehr Rechenzeit eingespart, da bei Verwendung der Substrukturtechnik der Anteil der benötigten Externknoten an der Gesamtknotenanzahl wächst.
- Bei der Verwendung diagonaler Massenmatrizen kann ein größerer Effektivitätsgewinn bei geringen Genauigkeitsverlusten erreicht werden.
- Brauchbare Ergebnisse werden schon mit einer relativ groben Vernetzung erzielt.
- Es werden alle Frequenzen des Spektrums erfasst (auch die nichtsymmetrischen). Dies ist z. B. bei Anwendung der Substrukturtechnik durch unglückliche Wahl der Externknoten nicht immer der Fall.
- Zur Vernetzung der Bauteile ist ein relativ geringer manueller Aufwand notwendig.

LITERATUR

- [1] Zehn, M.: Substruktur-/Superelementtechnik für die Eigenschwingungsberechnung dreidimensionaler Modelle mit Hilfe der FEM. Z. Techn. Mechanik 4 (1983) H. 1, S. 56 – 63.
- [2] Zehn, M.: Berechnung der Eigenschwingungen dreidimensionaler Modelle unter Nutzung der Methode der finiten Elemente. Dissertation, TU Magdeburg 1981.
- [3] Fischer, U.; Grochla, J.: Eigenschwingungsanalyse sektorsymmetrischer Strukturen. Technische Mechanik 4 (1983) H. 2, S. 47 – 51.
- [4] Лукин, Б. С.: Об Исследовании колебаний циклически симметричных конструкций методом конечных элементов. Динамика и прочность машин, вып. 31, изд-во при Харьк. ун-те, 1980 г., с 12 – 21.
- [5] Thomas, D. L.: Dynamics of Rotationally Periodic Structures. Int. Journ. f. Num. Meth. in Eng. 1/1980, p. 81 – 102.
- [6] Williams, F. W.: An algorithm for exact eigenvalue calculations for rotationally periodic structures. Int. Journ. f. Num. Meth. in Eng. 4 (1986), p. 609 – 622.
- [7] Krasny, I.: Numerical solution of rotationally periodic structures. Acta Technica Csav 5/1982, p. 634 – 650.
- [8] Autorenkollektiv: Nutzerhandbuch COSAR. Technische Hochschule Magdeburg, Sektion Maschinenbau, WB Festkörpermechanik 1985.
- [9] Гонткевич, В. С.: Собственные колебания пластинок и оболочек Наукова думка Киев, 1964.