

Die Eigenspannungen an der kaltverfestigten Bohrung bei überkritischem Dornübermaß

Udo Gamer

1. Einleitung

Die Umgebung einer Bohrung wird kaltverfestigt, indem man die Bohrung mit Hilfe eines Dorns aufweitet bis zum Auftreten plastischer Deformation. Dabei herrscht in radialer Richtung eine Druckspannung und in Umfangsrichtung eine Zugspannung, und nach dem Entfernen des Dorns bleibt ein sich auf die Schwingfestigkeit günstig auswirkender Eigenspannungszustand in der Scheibe zurück. Die Umfangsspannung beginnt an der Bohrung als Druck, geht weiter außen in Zug über und verschwindet nach einem relativen Maximum im Unendlichen. Die am Rande der Bohrung fehlende Radialspannung ist weniger bedeutend und klingt ebenfalls mit wachsender Entfernung von der Bohrung ab.

Der Zusammenhang zwischen dem an der Bohrung aufgebrauchten Druck und den sich daraus ergebenden Eigenspannungen wurde von mehreren Autoren untersucht. Ihre auf der v. Misesschen Fließbedingung beruhenden Resultate liegen zumeist nur in numerischer Form vor. Einen Überblick sowie einen kritischen Vergleich mit eigenen experimentellen Ergebnissen bietet [1].

Kürzlich wurde eine auf der Trescaschen Fließbedingung, der ihr zugeordneten Fließregel und der Annahme linearer isotroper Verfestigung aufgebaute analytische Lösung angegeben, und auch der Einfluß des Dornübermaßes auf die Eigenspannungen studiert [2], [3].

Die dort abgeleiteten Gleichungen liefern für gewisse Parameterkombinationen eine negative Umfangsspannung. Diese steht jedoch im Widerspruch zu der Fließbedingung, auf welcher die Ableitung beruht. Also ist der Gültigkeitsbereich der Ergebnisse überschritten. Aus der Bedingung $\sigma_{\varphi}(a) = 0$, wo a den Bohrungshalbmesser bezeichnet, kommt der Zusammenhang

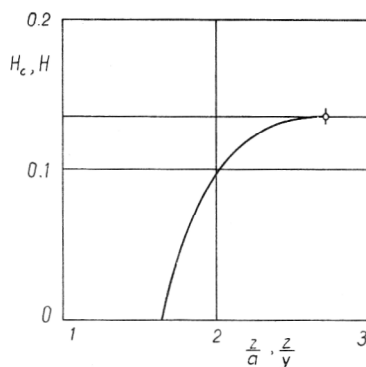


Bild 1

Der kritische Verfestigungsparameter H_c als Funktion der Eindringtiefe z/a des plastischen Bereichs oder der Verfestigungsparameter H als Funktion des Radienverhältnisses z/y

$$\frac{\sigma_o}{E} \eta_c = \frac{a^2}{z^2} (2 \log \frac{z}{a} - 1) \quad (1)$$

zwischen der Eindringtiefe z des plastischen Bereichs und dem kritischen Verfestigungsparameter η_c (Bild 1). Für $\eta \geq \eta_c$ trifft die in [2], [3] dargelegte Theorie zu; für $\eta < \eta_c$ muß sie ergänzt werden. Dies ist der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung.

Im Falle $\eta < \eta_c$ kann die Eindringtiefe z nur durch ein überkritisches Übermaß des Dorns verwirklicht werden. Eine ähnliche Situation liegt beim Preßverband vor [4]. Die Lösung des gegenwärtigen Problems wird erleichtert durch Gebrauch der dort gefundenen Ergebnisse, zumal das mechanische Modell zur Beschreibung der Kaltverfestigung der Bohrung ein Preßverband mit unendlich großer Nabe ist (Bild 2). Eine Verallgemeinerung auf ver-

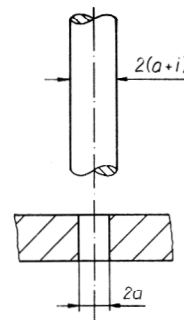


Bild 2

Die Abmessungen von Dorn und Scheibe vor der Kaltverfestigung

schiedenes Materialverhalten von Dorn und Nabe ist jedoch unerlässlich, da es sich beim vorliegenden Problem beispielsweise um einen Dorn aus Stahl und eine Aluminiumplatte handeln kann. Die Annahme eines ebenen Spannungszustandes im Dorn ist nur näherungsweise erfüllt; die mit dem Einführen und dem Herausziehen des Dorns verbundenen Schubspannungen werden vernachlässigt.

Wie beim Preßverband mit überkritischem Übermaß, so existiert auch bei der Kaltverfestigung mit überkritischem Dornübermaß für idealplastisches Materialverhalten keine Lösung.

2. Die Grundgleichungen

Nach [4] gilt im elastischen Dorn,

$$0 \leq r \leq a, \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = -p, \quad (2.1)$$

$$u = -(1 - \nu_1) \frac{p}{E_1} r, \quad (2.2)$$

im inneren plastischen Bereich der Scheibe,

$$a \leq r \leq y \quad \sigma_r = \frac{C_1}{r}, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad (2.3), (2.4)$$

$$u = \frac{1}{E_2} \left[\frac{1+H}{H} C_1 \log r + \frac{\sigma_o}{H} r + C_2 \right], \quad (2.5)$$

$$\epsilon_r^p = \frac{1}{H E_2} \left(\frac{C_1}{r} + \sigma_o \right), \quad (2.6)$$

$$\epsilon_\varphi^p = \frac{1}{E_2} \left[\left(\frac{1+H}{H} + \nu_2 \right) \frac{C_1}{r} + \frac{\sigma_o}{H} + \frac{C_2}{r} \right], \quad (2.7)$$

$$\epsilon_z^p = -(\epsilon_r^p + \epsilon_\varphi^p), \quad (2.8)$$

im äußeren plastischen Bereich der Scheibe

$$y \leq r \leq z$$

$$\sigma_r = \frac{1}{1+H} \left(\sigma_o \log r - \frac{H}{2} \frac{C_4}{r^2} \right) + C_3, \quad (2.9)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{1+H} \left(\sigma_o \log r + \sigma_o + \frac{H}{2} \frac{C_4}{r^2} \right) + C_3, \quad (2.10)$$

$$u = \frac{1-\nu_2}{E_2} \left[\frac{1}{1+H} \left(\sigma_o \log r - \frac{H}{2} \frac{C_4}{r^2} \right) + C_3 \right] r + \frac{1}{E_2} \frac{C_4}{r}, \quad (2.11)$$

$$\epsilon_\varphi^p = -\epsilon_r^p = \frac{1}{(1+H)E_2} \left(\frac{C_4}{r^2} - \sigma_o \right), \quad (2.12)$$

$$\epsilon_z^p = 0 \quad (2.13)$$

und im elastischen Bereich der Scheibe,

$$z \leq r < \infty,$$

$$\sigma_r = -\frac{C_5}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{C_5}{r^2}, \quad (2.14), (2.15)$$

$$u = \frac{1+\nu_2}{E_2} \frac{C_5}{r}. \quad (2.16)$$

Die Ausdrücke für die Spannungen, die Verschiebung und die plastischen Dehnungen in den beiden Teilen des plastischen Bereichs wurden mit Hilfe der Trescaschen Fließbedingung, der ihr zugeordneten Fließregel und der Annahme linearer isotroper Verfestigung abgeleitet. Die plastischen Dehnungen sind die Differenz der Gesamtdehnungen und der elastischen Dehnungsanteile; die im Verfestigungsgesetz auftretende plastische Vergleichs-

dehnung wird aus der Äquivalenz des plastischen Arbeitsinkrements bestimmt. σ_o ist die ursprüngliche Fließgrenze beim Zugversuch, und $H = \sigma_o \eta / E_2$ bezeichnet den normierten Verfestigungsparameter.

Die plastisch deformierte Scheibe mit den beiden Grensradien y und z ist in Bild 3 dargestellt.

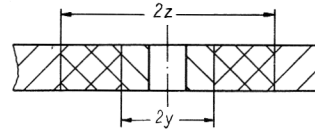


Bild 3

Der innere und der äußere Teil des plastischen Bereichs der Scheibe sowie die Grensradien y und z

3. Die Bestimmung der Integrationskonstanten und der Grensradien

Die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungen und die Verschiebung in den vier Bereichen enthalten sechs Integrationskonstanten. Zur Bestimmung dieser sechs Unbekannten sowie der Grensradien y und z hat man an den beiden Grensradien die Bedingungen der Stetigkeit von Radialspannung, Umfangsspannung und Verschiebung. Am Fugradius $r = a$ verläuft die Radialspannung stetig. Dort gilt auch die geometrische Bedingung, welche besagt, daß die Differenz der Verschiebung der Scheibe an der Bohrung und der Verschiebung am Rande des Dorns gleich dem (halben) Übermaß i des Dorns ist. Die beiden Stetigkeitsbedingungen für die Verschiebung lassen sich durch die leichter zu handhabenden (redundanten) Bedingungen $\epsilon_\varphi^p(z) = 0$ und $\epsilon_z^p(y) = 0$ ersetzen.

Die drei Bedingungen der Stetigkeit von plastischer Dehnung, Radial- und Umfangsspannung am Radius $r = z$ liefern die Integrationskonstanten C_3 , C_4 und C_5 als Funktion von z und damit im elastischen Bereich

$$z \leq r \leq b$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_o} = -\frac{1}{2} \frac{z^2}{r^2}, \quad \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_o} = \frac{1}{2} \frac{z^2}{r^2}, \quad (3.1), (3.2)$$

$$\frac{E_2 u}{\sigma_o z} = \frac{1}{2} (1 + \nu_2) \frac{z}{r} \quad (3.3)$$

und im äußeren plastischen Bereich

$$y \leq r \leq z$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_o} = \frac{1}{1+H} \left[\log \frac{r}{z} - \frac{1}{2} \left(H \frac{z^2}{r^2} + 1 \right) \right], \quad (3.4)$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_o} = \frac{1}{1+H} \left[\log \frac{r}{z} + \frac{1}{2} \left(H \frac{z^2}{r^2} + 1 \right) \right], \quad (3.5)$$

$$\frac{E_2 u}{\sigma_o z} = \frac{1-\nu_2}{1+H} \left[\log \frac{r}{z} - \frac{1}{2} \left(H \frac{z^2}{r^2} + 1 \right) \right] \frac{r}{z} + \frac{z}{r}, \quad (3.6)$$

$$\frac{E_2}{\sigma_o} \epsilon_\varphi^p = -\frac{E_2}{\sigma_o} \epsilon_r^p = \frac{1}{1+H} \left(\frac{z^2}{r^2} - 1 \right). \quad (3.7)$$

Bei nichtkritischem Dornübermaß existieren nur diese beiden Bereiche. Der in diesem Falle gültige Zusammenhang zwischen dem Grenzradius z und dem Dornübermaß i ist in [3] zu finden.

Nun werden die Stetigkeitsbedingungen am Radius $r = y$ im Inneren des plastischen Bereiches ausgewertet. Das Verschwinden der Umfangsspannung führt auf

$$\log \frac{y}{z} + \frac{1}{2} \left(H \frac{z^2}{y^2} + 1 \right) = 0. \quad (3.8)$$

Das Verhältnis y/z ist also eine durch den Verfestigungsparameter festgelegte Konstante; es hängt nicht vom Dornübermaß ab. Für $\frac{y}{z} = \frac{a}{z_c}$ ist durch (3.8) die kritische Eindringtiefe als Funktion des Verfestigungsparameters gegeben. Die zugehörige mit (1) identische Umkehrfunktion liefert die Abhängigkeit des kritischen Verfestigungsparameters von der Eindringtiefe. Die in Bild 1 gezeigte Kurve gilt also auch für den Zusammenhang zwischen dem Verfestigungsparameter H und dem Radienverhältnis z/y .

Aus der Stetigkeit der Radialspannung am Radius $r = y$ folgt C_1 , und damit läßt sich aus dem Verschwinden der axialen plastischen Dehnung C_2 ermitteln. Man findet also im inneren plastischen Bereich

$$a \leq r \leq y$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_o} = \frac{2}{1+H} \frac{y}{z} \left(\log \frac{y}{z} \right) \frac{z}{r}, \quad \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_o} = 0 \quad (3.9), (3.10)$$

$$\frac{E_2 u}{\sigma_o z} = \frac{2}{H} \frac{y}{z} \left[\left(\log \frac{y}{z} \right) \times \left(\log \frac{r}{z} - \log \frac{y}{z} - \frac{1+\nu_2 H}{1+H} \right) - 1 \right] + \frac{1}{H} \frac{r}{z}, \quad (3.11)$$

$$\frac{E_2}{\sigma_o} \epsilon_r^p = \frac{1}{H} \left[\frac{2}{1+H} \frac{y}{z} \left(\log \frac{y}{z} \right) \frac{z}{r} + 1 \right], \quad (3.12)$$

$$\frac{E_2}{\sigma_o} \epsilon_\varphi^p = \frac{2}{H} \frac{y}{z} \left[\left(\log \frac{y}{z} \right) \times \left(\log \frac{r}{z} - \log \frac{y}{z} - \frac{1}{1+H} \right) - 1 \right] \frac{z}{r} + \frac{1}{H}, \quad (3.13)$$

$$\frac{E_2}{\sigma_o} \epsilon_z^p = \frac{2}{H} \frac{y}{z} \left[\left(\log \frac{y}{z} \right) \times \left(-\log \frac{r}{z} + \log \frac{y}{z} \right) + 1 \right] \frac{z}{r} - \frac{2}{H}. \quad (3.14)$$

In allgemein gültiger Form — also unabhängig vom Druck an der Bohrung oder vom Übermaß — zeigen die Bilder 4 bis 6, die durch das Einführen des Dorns erzeugten Spannungen $\bar{\sigma}_r := \sigma_r / \sigma_o$, $\bar{\sigma}_\varphi := \sigma_\varphi / \sigma_o$, die Verschiebung $\bar{u} := E_2 u / (\sigma_o z)$ sowie die plastischen Dehnungen $\bar{\epsilon}_r^p := E \epsilon_r^p / \sigma_o$, $\bar{\epsilon}_\varphi^p := E \epsilon_\varphi^p / \sigma_o$ und $\bar{\epsilon}_z^p := E \epsilon_z^p / \sigma_o$ als Funktion von r/z für die Verfestigungsparameter $H=0.01$ und $H=0.1$.

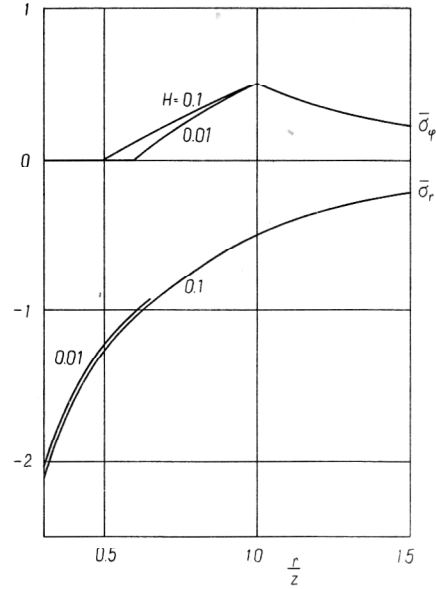


Bild 4
Die Spannungen $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{\sigma}_\varphi$ als Funktion von r/z für $H=0.01$ und $H=0.1$

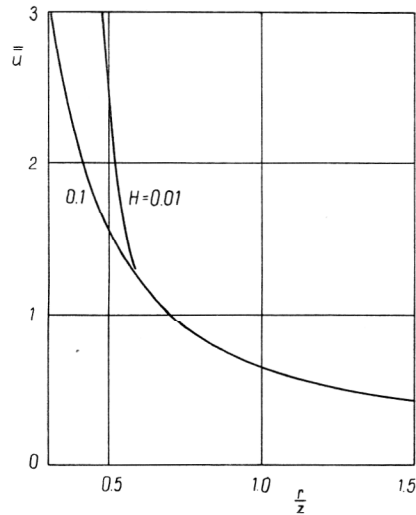


Bild 5
Die Verschiebung \bar{u} als Funktion von r/z für $H=0.01$ und $H=0.1$

Für $r = a$ folgt aus (3.9)

$$\frac{p}{\sigma_o} = \frac{2}{1+H} \left(\log \frac{z}{y} \right) \frac{y}{a}. \quad (3.15)$$

Der Radius y ist also dem vom Dorn erzeugten Druck an der Oberfläche der Bohrung proportional, und damit sind beide Grenzradialen lineare Funktionen des Druckes. Die hier behandelte Theorie gilt für Drücke, die den kritischen Druck

$$\frac{p_c}{\sigma_o} = \frac{2}{1+H} \log \frac{z}{y} \quad (3.16)$$

überschreiten. Dieser hängt nur vom Verfestigungsparameter ab. Eine graphische Darstellung findet man in [2].

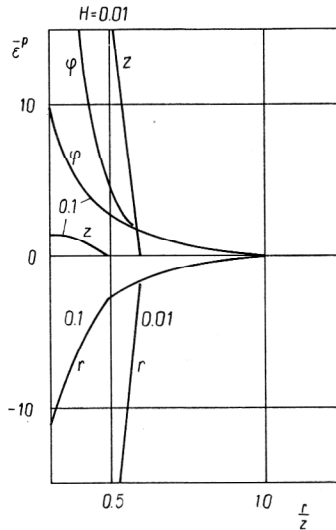


Bild 6
Die plastischen Dehnungen $\bar{\epsilon}_r^p$, $\bar{\epsilon}_\phi^p$ und $\bar{\epsilon}_z^p$ als Funktion von r/z für $H=0.01$ und $H=0.1$

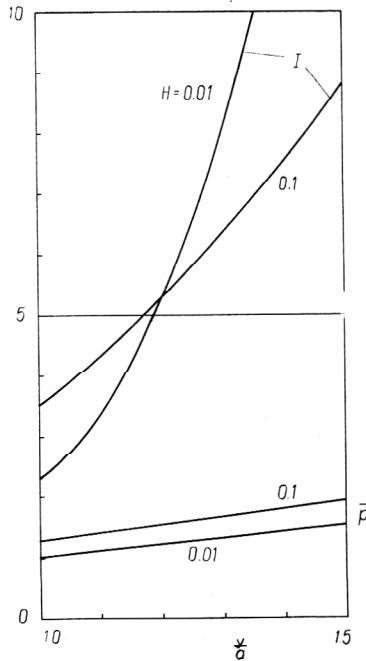


Bild 7
Übermaß I und Druck \bar{p} als Funktion von y/a für $H=0.01$ und $H=0.1$

Der durch (3.15) gegebene Druck stimmt überein mit dem Druck, welcher nach dem Entfernen des Dorns an der Bohrung in Umfangsrichtung zurückbleibt. Er ist als Funktion von y/a in Bild 7 aufgetragen.

4. Das Übermaß

Die geometrische Bedingung

$$u^S(a) - u^D(a) = i, \quad (4.1)$$

wo S für Scheibe und D für Dorn steht, liefert den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{E_2 i}{\sigma_0 a} &= \frac{2}{H} \left\{ \left(\log \frac{z}{y} \right) \right. \\ &\quad \times \log \frac{y}{a} + \frac{1}{1+H} [1 + \nu_2 H + (1 - \nu_1) H \frac{E_2}{E_1}] \left. \right\} \\ &\quad \times \frac{y}{a} - \frac{2}{H} \frac{y}{a} + \frac{1}{H} \end{aligned} \quad (4.2)$$

zwischen dem Grenzradius y und dem Übermaß i . Es sei daran erinnert, daß der Quotient z/y nach (3.8) durch den Verfestigungsparameter festgelegt ist.

Für $y=a$ erhält man aus (4.2) das kritische Übermaß

$$\frac{E_2 i_c}{\sigma_0 a} = \frac{2}{1+H} \left[\frac{1}{H} + \nu_2 - (1 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right] \log \frac{z}{y} - \frac{1}{H}. \quad (4.3)$$

Dieses ist in [3] als Funktion des Verfestigungsparameters H für verschiedene E_2/E_1 bzw. als Funktion des Verhältnisses E_2/E_1 mit H als Scharparameter graphisch dargestellt.

Bild 7 zeigt das Übermaß $I := E_2 i / (\sigma_0 a)$ nach (4.2) sowie den Druck $\bar{p} := p / \sigma_0$ an der Bohrung nach (3.15) als Funktion von y/a für die Parameter $H=0.01$ und $H=0.1$. Dabei wurde $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ gesetzt und $E_2/E_1 = 1/3$. Zu dem Abszissenwert $y/a=1$ gehören die kritischen Übermäße und Drücke. Mit Hilfe dieses Bildes kann man das den gewünschten Eigenumfangsdruck an der Bohrung erzeugende Übermaß des Dorns ermitteln. Dieses läßt sich jedoch auch unter Verwendung der aus (3.15) und (3.16) folgenden Substitution

$$\frac{y}{a} = \frac{p}{p_c} \quad (4.4)$$

direkt aus (4.2) berechnen.

Für $H=0$ existiert keine Lösung des überkritischen Problems.

5. Die Eigenspannungen

Das Herausziehen des Dorns ist mit elastischer Entlastung verbunden. Man erhält die sich einstellenden Eigenspannungen nebst der zugehörigen Verschiebung durch Addition der Spannungen

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{p_c}{\sigma_0} \frac{y}{a} \frac{a^2}{r^2}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\sigma_\phi}{\sigma_0} = - \frac{p_c}{\delta_0} \frac{y}{a} \frac{a^2}{r^2} \quad (5.2)$$

bzw. der Verschiebung

$$\frac{E_2 u}{\sigma_0 a} = - (1 + \nu_2) \frac{p_c}{\sigma_0} \frac{y}{a} \frac{a}{r} \quad (5.3)$$

zu den im 3. Abschnitt gegebenen Spannungen und Verschiebungen, welche durch das Einführen des Dorns hervorgerufen wurden. Die Umfangseigenspannung

$$\sigma_\phi^o = - p_c \frac{y}{a} \quad (5.4)$$

am Rande $r=a$ der Bohrung kommt in die Ecke des durch die plastische Deformation aufgeblähten Tresca-Sechsecks zu liegen, sekundäre plastische Deformation tritt jedoch nicht ein.

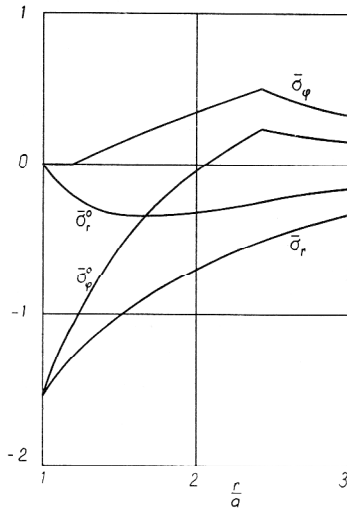


Bild 8
Spannungen $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{\sigma}_\varphi$ sowie Eigenspannungen $\bar{\sigma}_r^0$ und $\bar{\sigma}_\varphi^0$ als Funktion von r/a für $H=0.1$ und $y/a=1.2$

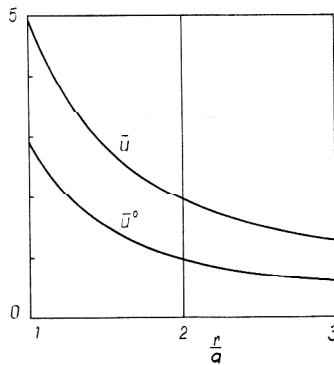


Bild 9
Verschiebung \bar{u} und bleibende Verschiebung \bar{u}^0 als Funktion von r/a für $H=0.1$ und $y/a=1.2$

Die Eigenspannungen lassen sich nicht allgemeingültig darstellen. Für $H=0.1$ und $y/a=1.2$ – dem entspricht $I=5.228$ – zeigt Bild 8 die durch das Einführen des Dorns erzeugten elastisch-plastischen Spannungen $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{\sigma}_\varphi$ sowie die Eigenspannungen $\bar{\sigma}_r^0$ und $\bar{\sigma}_\varphi^0$ als Funktion von r/a . Auf Bild 9 findet man schließlich die entsprechenden Verschiebungen $\bar{u} := E_2 u / (\sigma_0 a)$ und \bar{u}^0 .

LITERATUR

- [1] Sharpe, W. N. Jr.: Residual strains around coldworked fastener holes. Journal of Engineering Materials and Technology 100 (1978) No. 7, pp. 310 – 312.
- [2] Gamer, U.: Die Restspannungen in der Umgebung der kaltverfestigten Bohrung. Forsch. Ing.-Wes. 53 (1987).
- [3] Gamer, U.: Die Erzeugung der Eigenspannungen an der kaltverfestigten Bohrung. (zur Veröffentlichung eingereicht).
- [4] Gamer, U.: The elastic-plastic shrink fit with supercritical interference. Acta Mechanica 61 (1986) No. 1, pp. 1 – 14.

Anschritt des Verfassers:
Prof. Dr. Udo Gamer
Technische Universität Wien
Institut für Maschinelle
Kontakmechanik
Karlplatz 13
Wien 1
1040