

Die vollständigen Gleichungen einer quadratischen Theorie für die Auswertung von einfachen Hitzdrahtmessungen¹⁾

Hans Grützner

1. Einleitung

Zur experimentellen Untersuchung turbulenter Strömungsvorgänge werden sehr häufig Hitzdrahtsonden eingesetzt. Grundlage dieser Meßmethode ist der Umstand, daß der Wärmeübergang am Hitzdraht – und damit die vom Anemometer angezeigte Heizspannung E – von der Größe und der Richtung der Sondenströmung abhängen. Es besteht also für jede feste Stellung der Sonde im Raume ein Zusammenhang

$$E = E(w_1, w_2, w_3), \quad (1)$$

wenn die w_i ($i = 1, 2, 3$) die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \mathcal{C} der momentanen Sondenströmung in einem raumfesten z_i -Koordinatensystem sind. Die Temperatur des strömenden Mediums soll unverändert bleiben (isotherme Strömung), so daß ihr Einfluß auf E in (1) nicht weiter beachtet zu werden braucht.

In einer turbulenten Strömung sind die w_i Funktionen der Zeit: $w_i = w_i(t)$; damit wird auch die Heizspannung E eine Funktion der Zeit: $E = E(t)$. Wenn weiter vorausgesetzt wird, daß die betrachteten turbulenten Strömungen im zeitlichen Mittel stationär sind, dann gilt

$$E = E(t) = E(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \\ = E(\overline{w_1} + w'_1(t); \overline{w_2} + w'_2(t); \overline{w_3} + w'_3(t)). \quad (2)$$

Dabei ist von der in der Turbulenztheorie üblichen Aufteilung der Geschwindigkeit in zeitlichen Mittelwert $\overline{w_i}$ und turbulenten Schwankungswert $w'_i(t) = w_i(t) - \overline{w_i}$ Gebrauch gemacht worden. (Die mit einem Querstrich gekennzeichneten Größen bedeuten auch im folgenden zeitliche Mittelwerte.)

Die vorliegende Arbeit hat nur die Auswertung „einfacher“ Hitzdrahtmessungen zum Gegenstand. Darunter sollen Messungen verstanden werden, die ohne „größeren“ apparativen Aufwand durchgeführt werden. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß bei jeder festen Sondenstellung im Strömungsfeld als Meßwerte anfallen: der zeitliche Mittelwert \overline{E} der Heizspannung $E(t)$ und der Effektivwert E_{RMS} der Spannungsschwankungen E' :

$$E_{RMS} = \sqrt{(E(t) - \overline{E})^2} = \sqrt{E'^2}. \quad (3)$$

Aufgabe einer Auswertetheorie ist es dann, Zusammenhänge zwischen den Meßgrößen \overline{E} , E_{RMS} und den gesuchten zeitlich gemittelten Strömungsgrößen w_i , $w'_i w'_j$, ... ($i, j = 1, 2, 3$) aus (2) herzuleiten:

1) gekürzte Fassung von:

Grützner, H.: Die vollständigen Gleichungen einer allgemeinen quadratischen Theorie für die Auswertung von einfachen Hitzdrahtmessungen. Akademie der Wissenschaften der DDR, Institut für Mechanik, Preprint P-Mech-07/82.

$$\overline{E} = \overline{E}(\overline{w_i}, \overline{w'_i w'_j}, \dots), \\ E_{RMS} = E_{RMS}(\overline{w_i}, \overline{w'_i w'_j}, \dots) \quad (4)$$

bzw.

$$\overline{w_i} = f_i(\overline{E}, E_{RMS}), \\ \overline{w'_i w'_j} = f_{ij}(\overline{E}, E_{RMS}).$$

Durch die Physik des Wärmeübergangs am Hitzdraht bedingt, ist der Zusammenhang (1) bzw. (2) nichtlinear. Auch elektronische Schaltungsmaßnahmen vermögen diesen Zusammenhang lediglich für eine der Komponenten w_i zu linearisieren, wobei die Nichtlinearitäten bezüglich der übrigen Komponenten durchaus zunehmen können (vgl. z. B. [1], [2] und [3]). Es soll daher hier von vornherein der Zusammenhang (1) bzw. (2) als nichtlinear in allen Komponenten vorausgesetzt werden. Damit kann aber die oben gestellte Aufgabe (4) nur im Rahmen gewisser Näherungshypothesen gelöst werden.

Als Ausgangspunkt für eine Lösung dient dabei ganz allgemein die Taylor-Reihenentwicklung der Beziehung (2) an der Stelle $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$, also $w_i = \overline{w_i}$,

$$E(t) = E(\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}) \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial w_1} w'_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w'_2 + \frac{\partial}{\partial w_3} w'_3 \right)^p \overline{\mathcal{C}}^p E. \quad (5)$$

Diese Reihenentwicklung wird dann an geeigneter Stelle abgebrochen, um aus den so entstehenden Beziehungen gewisse Näherungslösungen für (4) herzuleiten. So begnügt man sich für Messungen in Strömungen mit „geringer“ Turbulenz mit dem Abbruch der Reihenentwicklung (5) nach dem linearen Glied

$$E(t) = E(\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}) \\ + \left(\frac{\partial E}{\partial w_1} \right)_{\overline{\mathcal{C}}} w'_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial w_2} \right)_{\overline{\mathcal{C}}} w'_2 + \left(\frac{\partial E}{\partial w_3} \right)_{\overline{\mathcal{C}}} w'_3 + \dots \quad (6)$$

Als Näherungslösung für (4) folgt dann aus (6) durch zeitliche Mittelung

$$\overline{E} = E(\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}) + \dots \\ \text{bzw.} \quad (7a)$$

$$\overline{E} = E(\overline{w_{1L}}, \overline{w_{2L}}, \overline{w_{3L}}),$$

und gemäß (3) wird aus (6)

$$E_{RMS}^2 = e_i e_j \overline{w'_i w'_j} + \dots \\ \text{bzw.} \quad (7b)$$

$$E_{RMS}^2 = e_{iL} e_{jL} (\overline{w'_i w'_j})_L$$

(i, j = 1, 2, 3). Dabei ist zur Abkürzung gesetzt worden

$$e_i = \left(\frac{\partial E}{\partial w_i} \right) \bar{\mathcal{C}} \quad \text{bzw.} \quad e_{iL} = \left(\frac{\partial E}{\partial w_i} \right) \bar{\mathcal{C}}_i \quad (7c)$$

Über doppelt auftretende Indizes i, j ist in (7b) – wie auch im folgenden über doppelt auftretende i, j, k, l – zu summieren. Die e_i bzw. e_{iL} sollen lineare Empfindlichkeitskoeffizienten genannt werden. Sie sind hier dimensionsbehaftet. Man spricht im Zusammenhang mit den Beziehungen (7) von der „linearen“ Auswertetheorie von Hitzdrahtmessungen. Die aus (7) folgenden Ergebnisse $\bar{w}_i, \overline{w_i w_j}$ werden deshalb hier durch den zusätzlichen Index L gekennzeichnet. Eine ausführliche Darstellung dieser linearen Theorie findet man z. B. in [4] und auch in [5].

Es ist aber zu erwarten, daß eine Anwendung der Formeln (7) auf Messungen in höberturbulenten Strömungen nur zu mehr oder weniger fehlerhaften Ergebnissen führen wird. Man ist daher oftmals gezwungen, den Auswertalgorithmus zu verfeinern.

2. Die vollständigen Gleichungen einer quadratischen Theorie für die Auswertung von einfachen Hitzdrahtmessungen

Die lineare Theorie (7) ist im wesentlichen durch die Aussage gekennzeichnet, daß $\bar{\mathcal{C}}$ das angezeigte \bar{E} und die $\overline{w_i w_j}$ den gemessenen E_{RMS} -Wert bedingen. Unter einer quadratischen Theorie zur Auswertung von Hitzdrahtmessungen sollen hier Beziehungen verstanden werden, die bezüglich \bar{E} noch den Einfluß der $\overline{w_i w_j}$ und bezüglich E_{RMS} noch den Einfluß der Turbulenz bis zu den 1-Punkt-Momenten 4. Ordnung – also bis zu den $\overline{w_i w_j w_k w_l}$ (i, j, k, l = 1, 2, 3) – berücksichtigen. Eine derartige Definition ist durch Überlegungen hinsichtlich der Größenordnung von $\bar{\mathcal{C}}$ und den $\overline{w_i w_j}$ bzw. von \bar{E} und $\overline{E'^2}$ einerseits und den entsprechenden Korrekturgrößen andererseits gerechtfertigt.

Bei der Ermittlung des Ausdrucks für \bar{E} wird man der obigen Definition gerecht durch eine Reihenentwicklung von (5) bis zu den Gliedern 2. Ordnung. Demgegenüber wird bei der Herleitung des Ausdrucks für $\overline{E'^2}$ – um wirklich alle 1-Punkt-Momente 4. Ordnung zu erfassen – die Reihenentwicklung von (5) bis zu den Gliedern 3. Ordnung benötigt (vgl. dazu auch [3]). Es soll daher hier gleich die Entwicklung von (5) bis zu den Gliedern 3. Ordnung angeschrieben werden, wobei dann obiger Definition gemäß im Endergebnis für \bar{E} die Momente 3. Ordnung weggelassen werden. Damit wird aus (5)

$$E(t) = E(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3) + e_i \overline{w_i} + e_{ij} \overline{w_i w_j} + e_{ijk} \overline{w_i w_j w_k} + \dots \quad (8)$$

(i, j, k = 1, 2, 3) mit den e_i nach (7c) und den e_{ij}, e_{ijk} abkürzend für

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial w_i \partial w_j} \right) \bar{\mathcal{C}}, \quad e_{ijk} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 E}{\partial w_i \partial w_j \partial w_k} \right) \bar{\mathcal{C}} \quad (9)$$

Aus (8) folgt durch zeitliche Mittelung zunächst

$$\bar{E} = E(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3) + e_{ij} \overline{w_i w_j} + e_{ijk} \overline{w_i w_j w_k} + \dots \quad (10)$$

und damit wiederum aus (8)

$$E' = E(t) - \bar{E} = e_i \overline{w_i} + e_{ij} (\overline{w_i w_j} - \overline{w_i} \overline{w_j}) + e_{ijk} (\overline{w_i w_j w_k} - \overline{w_i} \overline{w_j} \overline{w_k}) + \dots \quad (11)$$

(i, j, k = 1, 2, 3). Durch Quadrieren und zeitliches Mitteln von (11) ergibt sich schließlich

$$\overline{E'^2} = e_i e_j \overline{w_i w_j} + 2e_i e_{jk} \overline{w_i w_j w_k} + (2e_i e_{jkl} + e_{ij} e_{kl}) \overline{w_i w_j w_k w_l} - e_{ij} e_{kl} \overline{w_i w_j} \cdot \overline{w_k w_l} + \dots \quad (12)$$

(i, j, k, l = 1, 2, 3). Gemäß der oben getroffenen Definition sollen die aus (10) und (12) folgenden Beziehungen

$$\bar{E} = E(\overline{w_{1Q}}, \overline{w_{2Q}}, \overline{w_{3Q}}) + e_{ijQ} (\overline{w_i w_j})_Q, \quad (13a)$$

$$\overline{E'^2} = e_{iQ} e_{jQ} (\overline{w_i w_j})_Q + 2e_{iQ} e_{jQ} (\overline{w_i w_j w_k})_Q + (2e_{iQ} e_{jklQ} + e_{ijQ} e_{klQ}) (\overline{w_i w_j w_k w_l})_Q - e_{ijQ} e_{klQ} (\overline{w_i w_j})_Q (\overline{w_k w_l})_Q \quad (13b)$$

(i, j, k, l = 1, 2, 3) als die vollständigen Gleichungen einer quadratischen Auswertetheorie von Hitzdrahtmessungen angesehen werden. Ihre Lösung ist ohne eine Aussage über die Verteilung der Geschwindigkeitsschwankungen nicht möglich. Der Index Q an den gesuchten Strömungsgrößen in (13) soll anzeigen, daß es sich um Ergebnisse aus einer „quadratischen“ Näherungstheorie handelt. Die in (13) auftretenden Empfindlichkeitskoeffizienten stehen entsprechend (7c) und (9) abkürzend für

$$e_{iQ} = \left(\frac{\partial E}{\partial w_i} \right) \bar{\mathcal{C}}_Q, \quad e_{ijQ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial w_i \partial w_j} \right) \bar{\mathcal{C}}_Q, \quad e_{ijkQ} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 E}{\partial w_i \partial w_j \partial w_k} \right) \bar{\mathcal{C}}_Q \quad (13c)$$

Die Beziehungen (13) der vollständigen quadratischen Auswertetheorie enthalten zunächst als Unbekannte

3 Komponenten \bar{w}_i des mittleren Geschwindigkeitsvektors ;

9 Ein-Punkt-Momente 2. Ordnung: $\overline{w_i w_j}$ für i, j = 1, 2, 3;

27 Ein-Punkt-Momente 3. Ordnung: $\overline{w_i w_j w_k}$ für i, j, k = 1, 2, 3;

81 Ein-Punkt-Momente 4. Ordnung: $\overline{w_i w_j w_k w_l}$ für i, j, k, l = 1, 2, 3;

alle Größen entsprechend ihrer Näherung mit Q indiziert. Diese Vielzahl der Unbekannten läßt sich allerdings noch reduzieren, wenn man bei den e_{ij} , e_{ijk} die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen und bei den auftretenden Produkten $w'_i w'_j$, $w'_i w'_j w'_k$, $w'_i w'_j w'_k w'_l$ die Vertauschbarkeit der Faktoren beachtet. Die Anzahl der so geordneten unbekanntenen Momente reduziert sich dann auf

6 Ein-Punkt-Momente 2. Ordnung:

$$w'_i w'_j \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3 \\ \text{und } i \leq j;$$

10 Ein-Punkt-Momente 3. Ordnung:

$$w'_i w'_j w'_k \quad \text{für } i, j, k = 1, 2, 3 \\ \text{und } i \leq j \leq k;$$

15 Ein-Punkt-Momente 4. Ordnung:

$$w'_i w'_j w'_k w'_l \quad \text{für } i, j, k, l = 1, 2, 3 \\ \text{und } i \leq j \leq k \leq l.$$

Verglichen mit den Beziehungen (7) der linearen Auswertetheorie zeigen die Formeln (13) der quadratischen Auswertetheorie eine erhebliche Steigerung des Auswerteaufwandes an. Eine allgemeine Einschätzung der Leistungsgrenzen beider Verfahren dürfte schwierig sein. Im folgenden soll daher wenigstens an dem stark vereinfachten Beispiel einer gleichverteilten eindimensionalen turbulenten Strömung die Leistungsfähigkeit beider Verfahren und diejenige zweier weiterer, aus ihnen abgeleiteten Vorgehensweisen numerisch getestet werden.

3. Anwendung der quadratischen Auswertetheorie auf das einfache Beispiel einer gleichverteilten eindimensionalen turbulenten Strömung

Der Nachweis der Leistungsfähigkeit einer Auswertetheorie von Hitzdrahtmessungen ist experimentell schwer zu erbringen. Denn es gibt kaum turbulente Strömungen, deren Strömungsparameter alle genügend genau bekannt sind und die damit als Testobjekt dienen könnten. Ein Ausweg aus dieser Situation wird in [6] aufgezeigt. Dort wird eine normalverteilte dreidimensionale Geschwindigkeitsverteilung vorausgesetzt, ein relativ einfaches räumliches Eichverhalten der Hitzdrahtsonde – das sogenannte cos-Gesetz – angenommen und dann daraus die mittlere Spannung \bar{E} und der Effektivwert E_{RMS} der Spannungsschwankungen errechnet, wie sie ein Hitzdrahtanemometer unter den genannten Bedingungen anzeigen würde. Mit diesen Werten \bar{E} und E_{RMS} liegen dann ideale Vergleichswerte vor, mit deren Hilfe jedes Auswerteverfahren hypothesenfrei überprüft werden kann.

In ähnlicher Weise soll auch hier vorgegangen werden, wengleich der Einfachheit wegen nur das Beispiel einer gleichverteilten eindimensionalen turbulenten Strömung behandelt werden soll.

3.1. Ermittlung von \bar{E} und E_{RMS} für eine gleichverteilte eindimensionale turbulente Strömung bei vorgegebener Eichkurve $E = E(c) = \sqrt{A + B\sqrt{c}}$

Wenn $p_c(c)$ die Verteilungsdichte der turbulent schwankenden Geschwindigkeit c ist, so folgt aus der Bedingung $\int_{-\infty}^{+\infty} p_c(c) dc = 1$ für die Verteilungsdichte der gleichverteilten eindimensionalen turbulenten Strömung (vgl. auch Bild 1)

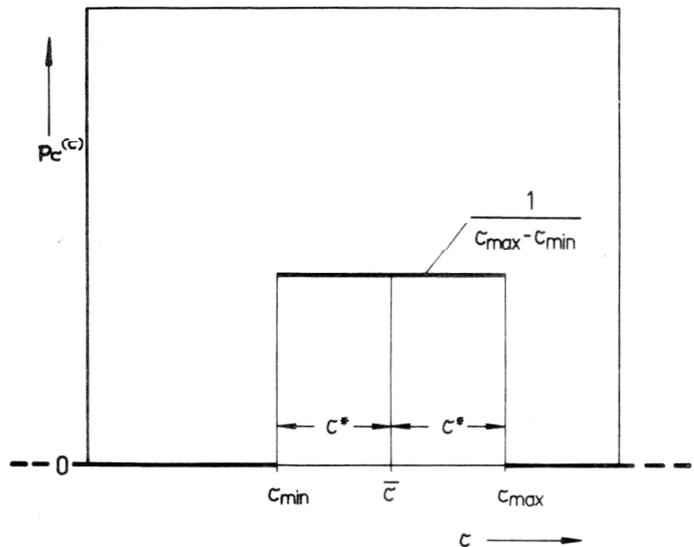


Bild 1

Die Verteilungsdichte $p_c(c)$ einer gleichverteilten eindimensionalen turbulenten Strömung

$$p_c(c) = \begin{cases} 0 & \text{für } c < c_{\min} \\ \frac{1}{c_{\max} - c_{\min}} & \text{für } c_{\min} \leq c \leq c_{\max} \\ 0 & \text{für } c > c_{\max} \end{cases} \quad (14)$$

Mit $c_{\max} > 0$ ist der Maximalwert, mit $c_{\min} > 0$ der Minimalwert bezeichnet, den die Geschwindigkeit c annehmen kann. Für den Mittelwert \bar{c} und die Streuung $\overline{c'^2}$ gilt

$$\bar{c} = \int_{c_{\min}}^{c_{\max}} c p_c(c) dc = \frac{1}{2} (c_{\max} + c_{\min}), \quad (15)$$

$$\overline{c'^2} = \int_{c_{\min}}^{c_{\max}} (c - \bar{c})^2 p_c(c) dc = \frac{1}{3} c^{*2}, \quad (16)$$

wenn

$$c^* = \frac{1}{2} (c_{\max} - c_{\min}) \quad (17)$$

(vgl. Bild 1). Der Turbulenzgrad T_c ergibt sich dann zu

$$T_c = \sqrt{\frac{\overline{c'^2}}{c^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} \frac{c^*}{c} \quad (18)$$

Alle Größen (14) bis (18) sind als bekannt anzusehen. Bekannt ist nach Voraussetzung auch der funktionelle Zusammenhang

$$E = E(c) = \sqrt{A + B\sqrt{c}}$$

bzw.

$$c = c(E) = \left(\frac{E^2 - A}{B}\right)^2$$

Dies ist ein Ausdruck, der die an einem realen Hitzdraht vorliegenden Verhältnisse gut widerspiegelt (Kingsches Gesetz).

Gefragt sind nun die sich damit ergebenden Werte \bar{E} und $E_{RMS} = \sqrt{\bar{E}'^2}$. Entsprechend (15) und (16) gilt

$$\bar{E} = \int_{E_{min}}^{E_{max}} E p_E(E) dE,$$

$$\bar{E}'^2 = \int_{E_{min}}^{E_{max}} (E - \bar{E})^2 p_E(E) dE,$$

wobei nach [7] zwischen den beiden Verteilungsdichten p_c und p_E die Beziehung

$$p_E(E) dE = p_c(c) dc$$

besteht (vgl. Bild 2). Im vorliegenden Falle folgt somit für die gesuchte Verteilungsdichte $p_E(E)$ aus (14), (17) und (19)

$$p_E(E) = p_c(c) \frac{dc}{dE} = \frac{2}{c^*} \frac{E^3 - AE}{B^2}$$

für $E_{min} \leq E \leq E_{max}$ und damit dann nach (20) und (21) für die letztendlich gesuchten \bar{E} und \bar{E}'^2 :

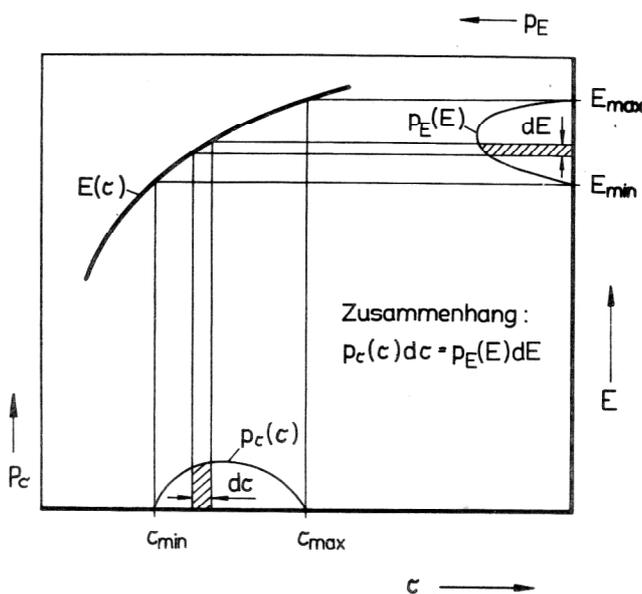


Bild 2
Zum Zusammenhang zwischen den Verteilungsdichten $p_c(c)$ und $p_E(E)$

$$\bar{E} = \frac{2}{15} \frac{1}{c^* B^2} [3(E_{max}^5 - E_{min}^5) - 5A(E_{max}^3 - E_{min}^3)],$$

$$\bar{E}'^2 = \frac{1}{6} \frac{1}{c^* B^2} [2(E_{max}^6 - E_{min}^6) - 3A(E_{max}^4 - E_{min}^4)] - \bar{E}^2$$

mit

$$E_{max} = \sqrt{A + B\sqrt{c_{max}}}, \quad E_{min} = \sqrt{A + B\sqrt{c_{min}}}$$

Als Zahlenbeispiel sind in der Tabelle 1 für zwei mittlere Geschwindigkeiten $\bar{c} = 1 \frac{m}{s}$ und $\bar{c} = 25 \frac{m}{s}$ und die Turbulenzgrade $T_c = 0; 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ die sich gemäß (22) und (23) zusammen mit (18), (17), (19) und (24) ergebenden \bar{E} - und E_{RMS} -Werte eingetragen. Dabei sind A und B genommen worden zu

$$A = 25 [V^2], \quad B = 10 [V^2/\sqrt{m/s}].$$

Tabelle 1

Die sich nach verschiedenen Auswertetheorien ergebenden Werte \bar{c} [m/s] und T_c [-] für $E^2 = 25 + 10\sqrt{c}$ [V²]; [c] = m/s; [E_{RMS}] = V.

„exakte“ Werte		Näherungswerte nach			
vorgegeben	aus (22) und (23)	(25)	(26)	(27)	(28)
\bar{c} T_c	E E_{RMS}	\bar{c}_Q T_{cQ}	\bar{c}_U T_{cU}	\bar{c}_G T_{cG}	\bar{c}_L T_{cL}
1	5.9161	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0
1	5.9161	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.01	0.0042	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
1	5.9158	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993
0.05	0.0211	0.0500	0.0500	0.0500	0.0501
1	5.9149	1.0000	1.0000	1.0000	0.9971
0.1	0.0424	0.1000	0.1003	0.1003	0.1004
1	5.9111	0.9997	1.0000	1.0000	0.9883
0.2	0.0856	0.2001	0.2022	0.2025	0.2035
1	5.9046	0.9987	0.9999	1.0000	0.9730
0.3	0.1305	0.3010	0.3079	0.3088	0.3124
1	5.8946	0.9957	0.9996	1.0002	0.9498
0.4	0.1787	0.4046	0.4205	0.4229	0.4323
25	8.6603	25	25	25	25
0	0	0	0	0	0
25	8.6602	25.0000	25.0000	25.0000	24.9992
0.01	0.0144	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
25	8.6590	25.0000	25.0000	25.0000	24.9791
0.05	0.0722	0.0500	0.0500	0.0500	0.0501
25	8.6554	24.9995	25.0000	25.0001	24.9162
0.1	0.1449	0.1000	0.1003	0.1004	0.1005
25	8.6405	24.9917	25.0003	25.0017	24.6593
0.2	0.2931	0.2002	0.2027	0.2031	0.2040
25	8.6142	24.9582	25.0016	25.0095	24.2104
0.3	0.4490	0.3013	0.3098	0.3111	0.3145
25	8.5735	24.8677	25.0074	25.0352	23.5271
0.4	0.6194	0.4059	0.4257	0.4289	0.4379

Mit diesen \bar{c} - und T_c -Werten und den zugehörigen Werten \bar{E} und E_{RMS} stehen völlig fehlerfreie Vergleichswerte zur Verfügung – hier natürlich nur für das einfache Beispiel einer gleichverteilten eindimensionalen Turbulenz –, an denen die Leistungsfähigkeit einer Auswertetheorie streng getestet werden kann.

3.2. Anwendung der quadratischen Auswertetheorie auf das Beispiel gleichverteilter eindimensionaler Turbulenz

Für den Fall eindimensionaler Turbulenz

$$w_1 = c, \quad w_2 \equiv w_3 \equiv 0, \quad E = E(c)$$

vereinfachen sich die vollständigen Gleichungen (13) der quadratischen Auswertetheorie erheblich. Aus (13 a) wird

$$\bar{E} = E(\bar{c}_Q) + e_{2Q} (\bar{c}'^2)_Q, \quad (25 a)$$

und aus (13 b) wird

$$\begin{aligned} \bar{E}'^2 = e_{1Q}^2 (\bar{c}'^2)_Q + 2 e_{1Q} e_{2Q} (\bar{c}'^3)_Q \\ + (2 e_{1Q} e_{3Q} + e_{2Q}^2) (\bar{c}'^4)_Q - e_{2Q}^2 (\bar{c}'^2)_Q^2 \end{aligned} \quad (25 b)$$

mit

$$e_{1Q} = \left(\frac{dE}{dc} \right)_{\bar{c}_Q}, \quad e_{2Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2E}{dc^2} \right)_{\bar{c}_Q}, \quad (25 c)$$

$$e_{3Q} = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3E}{dc^3} \right)_{\bar{c}_Q}$$

gemäß (13 c). Dabei bedeuten hier in (25) der Übersichtlichkeit wegen die Indexziffern nicht mehr – wie in (13) – die Koordinatenrichtung, sondern den Grad des Empfindlichkeitskoeffizienten. Aus der Bedingung der Gleichverteilung der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen folgt weiterhin

$$\bar{c}'^3 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{c}'^4 = \frac{9}{5} (\bar{c}'^2)^2,$$

so daß sich aus (25 b) letztlich ergibt

$$\bar{E}'^2 = e_{1Q}^2 (\bar{c}'^2)_Q + \left(\frac{18}{5} e_{1Q} e_{3Q} + \frac{4}{5} e_{2Q}^2 \right) (\bar{c}'^2)_Q^2. \quad (25 d)$$

Die Gleichungen der quadratischen Auswertetheorie reduzieren sich damit für die gleichverteilte eindimensionale Turbulenz auf die Beziehungen (25 a), (25 c) und (25 d). Hieraus sind also bei bekannten Werten \bar{E} und $\bar{E}'^2 = E_{RMS}^2$ die gesuchten Strömungsgrößen \bar{c}_Q und $(\bar{c}'^2)_Q$ bzw. $T_{cQ} = \sqrt{(\bar{c}'^2)_Q / \bar{c}_Q^2}$ zu ermitteln.

Die Lösung der Gleichungen (25 a), (25 c) und (25 d) für die im Abschnitt 3.1. ermittelten Werte von \bar{E} und E_{RMS} erfolgte iterativ. Dabei ist für (19) und wegen $(\bar{c}'^2)_Q > 0$ die Lösung der quadratischen Gleichung (25 d) eindeutig. Die Ergebnisse \bar{c}_Q und T_{cQ} dieser Rechnung sind in die Tabelle 1 mit eingetragen. Es zeigt sich, daß die Leistungsfähigkeit der quadratischen Theorie im vorliegenden einfachen Beispiel durchaus zufriedenstellend ist. Bei einem Turbulenzgrad von $T_c = 40\%$ beträgt der Fehler in der errechneten mittleren Ge-

schwindigkeit erst etwa 0,5 %, und der Fehler im ermittelten Turbulenzgrad ist nicht größer als 1,5 %.

Zum Vergleich mit diesen Werten sollen im nächsten Abschnitt noch die Ergebnisse einiger „einfacherer“ Auswertetheorien für das behandelte Beispiel aufgeführt werden.

3.3. Anwendung von vereinfachten Auswertetheorien auf das Beispiel gleichverteilter eindimensionaler Turbulenz

In [8] und [9] erfolgt die Reihenentwicklung von (5) nur bis zu den quadratischen Gliedern. Das bedeutet, daß in (13 b) die Glieder mit den e_{jkl} nicht auftreten. Aus den Beziehungen (25 a), (25 d) und (25 c) für das Beispiel der gleichverteilten eindimensionalen Turbulenz wird damit

$$\bar{E} = E(\bar{c}_U) + e_{2U} (\bar{c}'^2)_U, \quad (26 a)$$

$$\bar{E}'^2 = e_{1U}^2 (\bar{c}'^2)_U + \frac{4}{5} e_{2U}^2 (\bar{c}'^2)_U^2 \quad (26 c)$$

mit

$$e_{1U} = \left(\frac{dE}{dc} \right)_{\bar{c}_U}, \quad e_{2U} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2E}{dc^2} \right)_{\bar{c}_U}. \quad (26 c)$$

Auch diese Gleichungen (26) lassen sich iterativ lösen. Ihre Lösungen für die im Abschnitt 3.1. errechneten Werte \bar{E} und E_{RMS} – hier gekennzeichnet durch den zusätzlichen Index U – sind ebenfalls in die Tabelle 1 mit eingetragen. Danach sind die Werte für die mittlere Geschwindigkeit sehr befriedigend. Aber die Ergebnisse T_{cU} für die höheren Turbulenzgrade weichen doch schon merklich von den richtigen Werten T_c ab. So wird der Turbulenzgrad $T_c = 40\%$ im vorliegenden Beispiel immerhin um 5 bis 7 % seines Wertes falsch ermittelt. Eine weitere Vereinfachung der Auswertungsgleichungen stellen die Beziehungen

$$\bar{E} = E(\bar{c}_G) + e_{2G} (\bar{c}'^2)_G, \quad (27 a)$$

$$\bar{E}'^2 = e_{1G}^2 (\bar{c}'^2)_G \quad (27 b)$$

mit

$$e_{1G} = \left(\frac{dE}{dc} \right)_{\bar{c}_G}, \quad e_{2G} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2E}{dc^2} \right)_{\bar{c}_G} \quad (27 c)$$

dar. Diese sind so zu interpretieren, daß man sich hier mit „linear“ ermittelten Turbulenzgrößen begnügt, diese aber zu einer „quadratischen“ Korrektur der mittleren Geschwindigkeit benutzt. Bemerkenswert ist, daß zur Lösung keine Aussage über die Art der Geschwindigkeitsverteilung erforderlich ist. Das bedeutet aber auch, daß diese Auswertetheorie den Einfluß unterschiedlicher Geschwindigkeitsverteilungen nicht zu berücksichtigen vermag.

Die Lösung von (27) erfolgte für das vorliegende Beispiel wiederum iterativ. Die Ergebnisse \bar{c}_G und T_{cG} – gekennzeichnet durch den zusätzlichen Index G – sind ebenfalls in Tabelle 1 zu finden. Erwartungsgemäß sind die Werte \bar{c}_G für die mittlere Geschwindigkeit \bar{c} auch für höhere Turbulenzgrade kaum schlechter als die mit den aufwendigeren Auswertetheorien gewonnenen. Größere Fehler weisen dagegen die T_{cG} -Werte auf. Sie sind aller-

dings auch nicht wesentlich größer als die der Werte T_{cU} .

Letztendlich sollen noch die Ergebnisse nach der einfachen linearen Auswertetheorie zum Vergleich angeführt werden. Für den Fall eindimensionaler Turbulenz folgt aus (7)

$$\bar{E} = E(\bar{c}_L), \quad (28a)$$

$$E'^2 = e_{1L}^2 (\bar{c}'^2)_L \quad (28b)$$

mit

$$e_{1L} = \left(\frac{dE}{dc} \right)_{\bar{c}_L} \quad (28c)$$

Zur Ermittlung der Lösung \bar{c}_L und T_{cL} dieser Gleichungen (28) sind keine Iterationen und natürlich auch keinerlei Kenntnis über die Verteilung der Geschwindigkeit erforderlich.

Die sich für das vorliegende Beispiel ergebenden Werte \bar{c}_L und T_{cL} sind wiederum in Tabelle 1 zu finden. Wie nicht anders zu erwarten, weichen jetzt mit größer werdender Turbulenz auch die mittleren Geschwindigkeiten \bar{c}_L merklich von den richtigen Werten \bar{c} ab. Bei $T_c = 40\%$ liegen diese Abweichungen immerhin zwischen 5% und 6% des richtigen Wertes \bar{c} . Der sich ergebende Turbulenzgrad T_{cL} weist dabei einen Fehler von fast 10% des richtigen Wertes $T_c = 0,4$ auf.

4. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden die vollständigen Gleichungen (13) einer quadratischen Auswertetheorie von einfachen Hitzdrahtmessungen abgeleitet. Als charakteristisch für diese Auswertetheorie kann angesehen werden, daß im Ausdruck (13b) für die E'^2 -Werte auch die 3. Ableitungen von E nach den Geschwindigkeitskomponenten w_i auftreten. Die Anwendung dieser Auswertetheorie dürfte im allgemeinen Fall sehr aufwendig sein; der Aufwand ist größer als der in [8] und [9] aufgezeigte. Die Frage, ob dieser erhöhte Aufwand sich im allgemeinen Anwendungsfall auch lohnt, muß hier unbeantwortet bleiben. Hier konnte lediglich an dem einfachen Beispiel einer gleichverteilten eindimensionalen turbulenten Strömung gezeigt werden, daß die vollständige quadratische Auswertetheorie den hier getesteten „einfacheren“ Auswertetheorien doch mehr oder weniger überlegen ist.

LITERATUR

- [1] Parthasarathy, S. P., Tritton, D. J.: Impossibility of linearizing a hot-wire anemometer for measurements in turbulent flows. AIAA J. 1 (1963) 5, S. 1210 – 1211 (TN).
- [2] Hoffmeister, M.: Probleme bei der Anwendung der Hitzdrahtmeßtechnik. ZAMM 52 (1972), T 375 – T 382.
- [3] Klatt, F.: A study of systematic errors in measurements with the constant-temperature anemometer in high-turbulence flows with and without hot-wire signal linearization. DISA Information No. 14, 1973.
- [4] Hoffmeister, M.: Zur Anwendung einer einfachen Hitzdrahtsonde auf dreidimensionale turbulente Strömungsfelder. Maschinenbautechnik 19 (1970) 8, S. 399 – 408.
- [5] Grützner, H.: Die Messung der mittleren Geschwindigkeit und der Reynoldsschen Spannungen in isothermen, niedrigturbulenten Strömungen mit Hilfe gedrehter einfacher Hitzdrahtsonden. Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik, Report R-01/79.
- [6] Birkner, D.: Zur mathematischen Modellierung von Hitzdrahtmessungen in turbulenten Strömungen. Diplomarbeit, Humboldt-Universität Berlin, Sektion Mathematik, 1979.
- [7] Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin 1958, S. 38.
- [8] Hoffmeister, M.: Nichtlineares Auswertungsverfahren für Turbulenzmessungen mit einfachen Hitzdrahtsonden. Maschinenbautechnik 23 (1974) 12, S. 545 – 549.
- [9] Kitzing, H., Sammler, B.: Analysis of hot-wire measurements in high-turbulent three-dimensional flows. DISA Information No. 29, 1984.