

# Untersuchung elastisch-plastischer Deformationen mit dem Moiréverfahren

Jochen Naumann

## 1. Einleitung

Von den optischen Feldmeßverfahren ist das Moiréverfahren eine der leistungsfähigsten Methoden. Auf Grund der rein geometrischen Natur des Moiréeffekts können neben geometrischen Nichtlinearitäten, wie z. B. großen Deformationen, insbesondere auch physikalische Nichtlinearitäten, wie z. B. elastisch-plastisches, viskoelastisches oder viskoplastisches Werkstoffverhalten, berücksichtigt werden. Je nach verwendetem Meßprinzip [1] ergeben sich sowohl in-plane- als auch out-of-plane-Komponenten des Verschiebungsvektors der Objektoberfläche als primäre experimentelle Ergebnisse. Über die Wahl der Teilung der verwendeten Raster ist die Empfindlichkeit in weiten Grenzen einstellbar. Hervorzuheben sind weiter Einfachheit und Klarheit der Parameter der Moiréstreifen. Das erlaubt bereits während der Versuchsdurchführung eine qualitative Einschätzung der Versuchsergebnisse.

In der vorliegenden Arbeit sind ergänzend zur Analyse großer plastischer Deformationen [2] einige Möglichkeiten des Moiréverfahrens zur experimentellen Analyse elastisch-plastischer Deformationsfelder zusammengestellt. Dabei wird insbesondere das Meßprinzip

„Überlagerung eines verzerrten Objektrasters mit einem Bezugsraster“

berücksichtigt. Die allgemein bevorzugte Variante dieses Meßprinzips, das Isothetenverfahren, gestattet die einfache und elegante Ermittlung der in-plane-Komponenten des Verschiebungsvektors.

## 2. Analyse des Moiréverfahrens für in-plane Messungen

Die mathematische Analyse des Moiréeffekts erfolgt nachfolgend nach den Gesetzen der Strahlenoptik, wobei jedoch nicht unerwähnt bleiben soll, daß diese geometrisch-optische Art der Moiréstreifenentstehung nur bis zu Liniendichten von etwa 100 Linien/mm physikalisch dominierend ist. Bei Rastern höherer Liniendichte treten zunehmend Beugungserscheinungen auf, die sowohl eine adäquate theoretische Analyse des Moiréeffekts als auch eine völlig andere Versuchstechnik erfordern. Grundlagen der interferenzoptischen Moiréstreifenentstehung, oft auch als Moiréstreifenmultiplikation oder Moiréinterferometrie bezeichnet, enthält die Arbeit [3].

### 2.1. Allgemeiner Fall

Ein beliebig orientierter und mit der Objektoberfläche fest verbundener Linienraster (Bild 1) wird durch die Beziehung

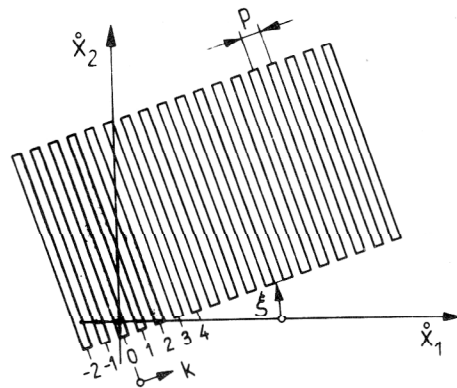


Bild 1  
Objektraster im unverzerrten Zustand

$$\overset{\circ}{x}_2 = -\frac{\overset{\circ}{x}_1}{\tan \xi} + \frac{k \cdot p}{\sin \xi} \quad (1)$$

dargestellt. Dieser Objektraster werde nun durch einen allgemeinen homogenen Deformationszustand mit den in-plane-Komponenten

$$u_1(x_1, x_2) = u_{1,1} \cdot x_1 + u_{1,2} \cdot x_2 \quad (2)$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_{2,1} \cdot x_1 + u_{2,2} \cdot x_2$$

verzerrt. Die Linienschar des verformten Objektrasters ergibt sich dann zu

$$x_2 = \frac{[-(1-u_{1,1}) \cdot \cos \xi + u_{2,1} \cdot \sin \xi] \cdot x_1 + k \cdot p}{(1-u_{2,2}) \cdot \sin \xi - u_{1,2} \cdot \cos \xi} \quad (3)$$

Dem verzerrten Objektraster ist ein Bezugsraster zu überlagern. Dieser habe sowohl eine Abweichung in seiner Teilung (Faktor  $\delta$ ) als auch in seiner Orientierung (Winkel  $\Delta \xi$ ) gegenüber dem unverzerrten Objektraster. Die Gleichung für die Linienschar des Bezugsrasters lautet deshalb

$$x_2 = -\frac{x_1}{\tan(\xi + \Delta \xi)} + \frac{l \cdot p \cdot (1 + \delta)}{\sin(\xi + \Delta \xi)} \quad (4)$$

Entlang der Skelettlinie eines jeden Moiréstreifens ist die Parameterdifferenz  $m = l - k$  konstant. Hieraus ergibt sich für das Feld der Moiréstreifen die Beziehung

$$m \cdot p = x_1 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \delta} \cdot \cos(\xi + \Delta \xi) - (1 - u_{1,1}) \cdot \cos \xi + u_{2,1} \cdot \sin \xi \right] + x_2 \cdot \left[ \frac{1}{1 + \delta} \cdot \sin(\xi + \Delta \xi) - (1 - u_{2,2}) \cdot \sin \xi + u_{1,2} \cdot \cos \xi \right] \quad (5)$$

In der experimentellen Spannungs- und Dehnungsanalyse mit Hilfe optischer Methoden ist es zweckmäßig, die Skelettlinien der entstehenden Interferenzstreifenfelder

als parameterbehaftete Linienscharen anzusehen. Einfache Parameter fördern dabei die Anschaulichkeit des Verfahrens. Für die Schar der Moiréstreifen nach Gl. (5) ergibt sich unter Zuhilfenahme des Verschiebungssatzes nach den Gln. (2) die Parametergleichung

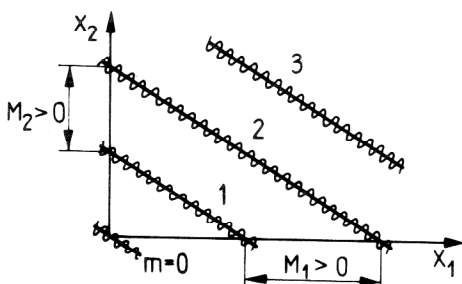
$$m \cdot p = u_1 \cdot \cos \xi + u_2 \cdot \sin \xi$$

$$-2 \sin \left( \frac{1}{2} \Delta \xi \right) \cdot \left[ x_1 \cdot \sin \left( \xi + \frac{1}{2} \Delta \xi \right) - x_2 \cdot \cos \left( \xi + \frac{1}{2} \Delta \xi \right) \right]$$

$$- \frac{\delta}{1 + \delta} \cdot \left[ x_1 \cdot \cos \left( \xi + \Delta \xi \right) + x_2 \cdot \sin \left( \xi + \Delta \xi \right) \right]$$

(6)

Entlang eines Moiréstreifens ist  $m \cdot p = \text{konst.}$  Erwartungsgemäß hat der Parameter für den hier dargestellten allgemeinen Fall keine einfache Gestalt, sondern beinhaltet neben den Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  noch die koordinatenabhängigen Terme infolge einer Verdrehung  $\Delta \xi$  und einer Änderung  $\delta$  der Teilung des Bezugsrasters.



**Bild 2**  
Charakteristische Moiréstreifenabstände  $M_1$  und  $M_2$

Die Gln. (5) und (6) sowie Bild 2 zeigen, daß die Moiréstreifen bei einem homogenen Deformationszustand stets ein äquidistantes System von Geraden bilden und daß aus diesem Feld die vorzeichenbehafteten charakteristischen Moiréstreifenabstände  $M_1$  und  $M_2$

$$M_1 = p/N_1 \quad M_2 = p/N_2 \quad (7)$$

$$N_1 = u_{1,1} \cdot \cos \xi + u_{2,1} \cdot \sin \xi$$

$$- 2 \sin \left( \frac{1}{2} \Delta \xi \right) \cdot \sin \left( \xi + \frac{1}{2} \Delta \xi \right)$$

$$- \frac{\delta}{1 + \delta} \cdot \cos \left( \xi + \Delta \xi \right)$$

$$N_2 = u_{1,2} \cdot \cos \xi + u_{2,2} \cdot \sin \xi$$

$$+ 2 \sin \left( \frac{1}{2} \Delta \xi \right) \cdot \cos \left( \xi + \frac{1}{2} \Delta \xi \right)$$

$$- \frac{\delta}{1 + \delta} \cdot \sin \left( \xi + \Delta \xi \right)$$

abgelesen werden können.  $M_1$  bzw.  $M_2$  sind dann positiv, wenn die Moiréstreifenordnung in  $x_1$ - bzw. in  $x_2$ -Richtung steigt.

## 2.2. Isothetenverfahren

Das Isothetenverfahren als praktisch wichtigste Variante des Meßprinzips der „Überlagerung eines Bezugsrasters mit einem verzerrten Objektraster“ zeichnet sich dadurch aus, daß der unverformte Objektraster und der Bezugsraster identisch sind, d. h. es gilt  $\delta = \Delta \xi = 0$ .

Damit lauten die Gln. (7) für die charakteristischen Moiréstreifenabstände jetzt

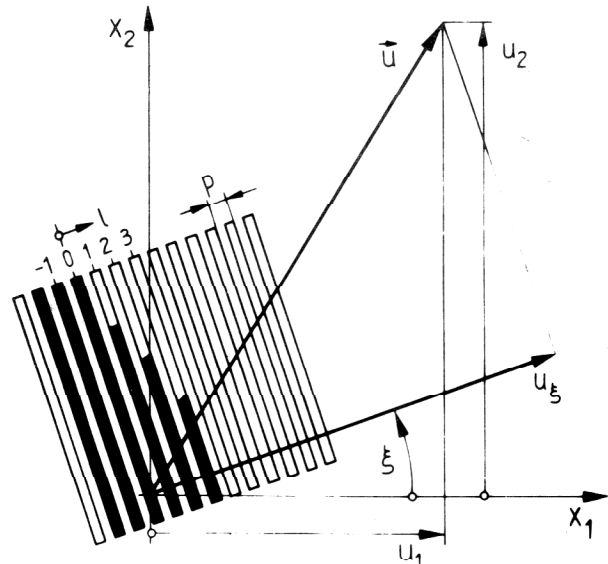
$$M_1 = \frac{p}{u_{1,1} \cdot \cos \xi + u_{2,1} \cdot \sin \xi} \quad (8)$$

$$M_2 = \frac{p}{u_{1,2} \cdot \cos \xi + u_{2,2} \cdot \sin \xi} \quad (9)$$

während sich entsprechend Gl. (6) für den Moiréstreifenparameter die Beziehung

$$m \cdot p = u_1 \cdot \cos \xi + u_2 \cdot \sin \xi = u_\xi$$

ergibt. Gl. (9) zeigt, daß mit der Eigenschaft  $\delta = \Delta \xi = 0$  des Bezugsrasters die zu den Bezugsrasterlinien senkrechte Komponente  $u_\xi$  des Verschiebungsvektors gemessen wird, Bild 3. Derartige Moiréstreifen, deren Parameter eine in-plane-Komponente des Verschiebungsvektors ist, werden als Isotheten bezeichnet.



**Bild 3**  
Moiréstreifenparameter beim Isothetenverfahren  
Entlang eines Moiréstreifens ist die zum Bezugsraster senkrechte Komponente des Verschiebungsvektors konstant.

Für die vollständige Analyse eines Deformationszustandes mit den vier Verschiebungsgradienten  $u_{i,j}$  sind zwei Objektraster erforderlich. Überragende Bedeutung besitzt dabei der Fall  $p_I = p_{II} = p$  und  $\xi_I = 0$ ,  $\xi_{II} = 90^\circ$ . Aus den Gln. (8) folgt dann für die gesuchten Verschiebungsgradienten

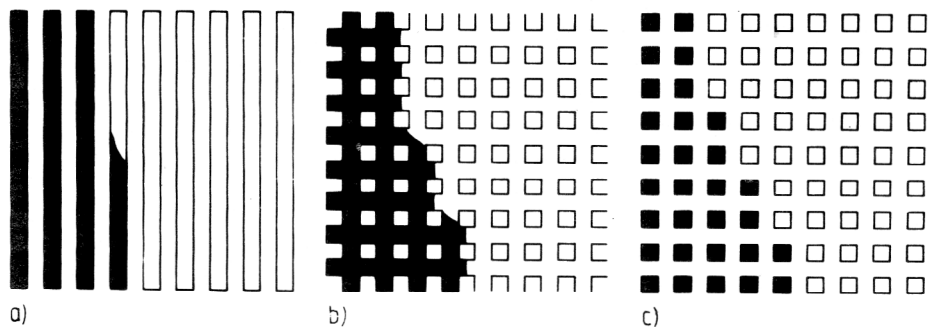
$$\xi_I = 0: \quad u_{1,1} = \frac{p}{M_{II1}} \quad u_{1,2} = \frac{p}{M_{II2}} \quad (10)$$

$$\xi_{II} = 90^\circ: \quad u_{2,1} = \frac{p}{M_{III1}} \quad u_{2,2} = \frac{p}{M_{III2}}$$

Zu den Isothetenordnungen  $m_1$  und  $m_2$  gehören die Parameter

$$\xi_I = 0: \quad u_1 = m_1 \cdot p$$

$$\xi_{II} = 90^\circ: \quad u_2 = m_2 \cdot p \quad (11)$$

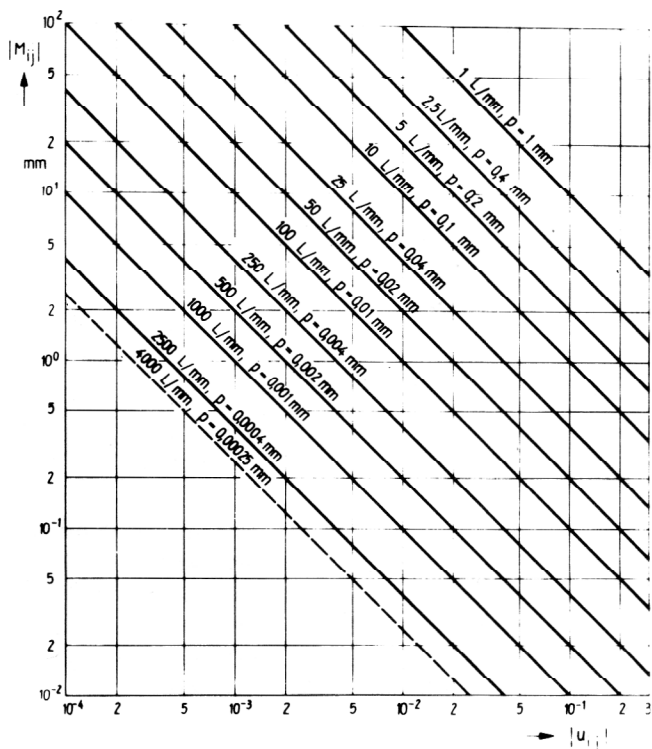


**Bild 4**  
 Raster für das Isothetenverfahren  
 a) Linienraster, b) Punktraster, c) Kreuzraster

Die praktische Realisierung des Isothetenverfahrens wird dadurch erleichtert, daß die erforderlichen zwei Objektraster mit  $\xi_I = 0$  und  $\xi_{II} = 90^\circ$  in einem Punkt- oder Kreuzraster vereinigt werden können. Die Erzeugung der  $u_1$ - und  $u_2$ -Isotheten erfolgt allgemein dadurch, daß einem solchen Objektraster **nacheinander** ein Linien-Bezugsraster überlagert wird, Bild 4.

### 2.3. Empfindlichkeit des Isothetenverfahrens

Die charakteristischen Abstände der Moiréstreifen sind ein Maß für die Empfindlichkeit des Isothetenverfahrens. Das aus den Gln. (10) ableitbare Empfindlichkeitsdiagramm (Bild 5) stellt für praktisch mögliche Liniendichten von Objekt- und Bezugsraster in Abhängigkeit von der Dehnung bzw. eines Verschiebungsgradienten die zu erwartenden charakteristischen Abstände der Isotheten dar.



**Bild 5**  
 Empfindlichkeitsdiagramm für das Isothetenverfahren

Bild 5 zeigt, daß für eine gegebene Liniendichte von Objekt- und Bezugsraster kleine Dehnungen (bzw. Verschiebungsgradienten) eine große Meßlänge erfordern, während größere Dehnungen auch in kleineren Gebieten erfaßt werden können. Eine Verfahrensgrenze besteht weiter darin, daß auch bei einer interferenzoptischen Moiréstreifenentstehung Gitter mit Liniendichten von über 4000 L/mm bei Verwendung sichtbaren Lichts nicht möglich sind [3].

### 2.4. Genauigkeit des Isothetenverfahrens

Nachfolgend wird mit den allgemeinen Gleichungen des Abschn. 2.1. der Einfluß verschiedener versuchstechnischer Imperfektionen auf die Genauigkeit des Isothetenverfahrens untersucht.

#### 2.4.1. Einfluß einer Meßunsicherheit $\Delta m_i$ der Isothetenordnung $m_i$

Für die Ermittlung der Verschiebungsgradienten  $u_{i,j}$  aus den Gln. (10) sind die Abstände  $M_{ij}$  zwischen benachbarten Isotheten auszumessen, wobei an jedem Knoten eine Unsicherheit  $\Delta x_j$  zugelassen werden muß. Obwohl an sich die Isothetenordnung  $m_i$  eine exakte Größe darstellt, wird ein besonders einfaches und anschauliches Resultat erhalten, wenn die Fehler  $\Delta x_j$  den Isothetenordnungen  $m_i$  als Fehler  $\Delta m_i$  zugewiesen werden. Denn es ist sinnvoll, anzunehmen, daß der relative Fehler  $\Delta x_j / M_{ij}$  für die Positioniergenauigkeit unabhängig von der jeweiligen Isothetendichte ist und daß für eine bestimmte Versuchsanordnung

$$\frac{\Delta x_j}{M_{ij}} = \Delta m_i = \text{const.}$$

gilt. Aus den Gln. (10) folgt für kleine Fehler von  $u_{i,j}$  und mit  $|\Delta M_{ij}| = 2 \cdot |\Delta x_j|$

$$|\Delta u_{i,j}| = \frac{P}{M_{ij}^2} \cdot |\Delta M_{ij}| = 2 \frac{P}{|M_{ij}|} \cdot |\Delta m_i|$$

und hieraus der relative Fehler von  $u_{i,j}$

$$f_{\text{rel}}(u_{i,j}) \equiv \left| \frac{\Delta u_{i,j}}{u_{i,j}} \right| = \left| \frac{\Delta M_{ij}}{M_{ij}} \right| = 2 |\Delta m_i| \quad (12)$$

Aus den Gln. (12) ergibt sich, daß bei einer praktisch realisierbaren Positionierung auf  $\Delta m_i = 0.1 \dots 0.01$  Ord-

nungen genau der relative Fehler in den Verschiebungsgradienten Werte von  $f_{rel}(u_{i,j}) = 0.2 \dots 0.02$  annehmen kann. Verbesserungen lassen sich zum einen durch vielfache Wiederholung der Messung und zum anderen durch den numerischen Ausgleich einer Vielzahl von Beobachtungen erreichen.

Bemerkenswert ist weiter, daß bei einer Messung der charakteristischen Isothetenabstände die Rasterteilung  $p$  den relativen Fehler der Verschiebungsgradienten zumindestens bei homogener Deformation nicht beeinflusst.

#### 2.4.2. Einfluß einer Positioniergenauigkeit $\Delta\xi$ des Bezugsrasters

Das Erzeugen der  $u_1$ - und  $u_2$ -Isotheten erfolgt i. a. dadurch, daß dem verzerrten Kreuz-Objektraster nacheinander ein Linien-Bezugsraster überlagert wird. Besteht dabei jeweils eine Positioniergenauigkeit von  $\Delta\xi$ , so ergeben sich aus den Gln. (7) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi_I = 0: \quad u_{1,1} &= \frac{p}{M_{I1}} + 1 - \cos \Delta\xi \\ u_{1,2} &= \frac{p}{M_{I2}} - \sin \Delta\xi \\ \xi_{II} = 90^\circ: \quad u_{2,1} &= \frac{p}{M_{II1}} + \sin \Delta\xi \\ u_{2,2} &= \frac{p}{M_{II2}} + 1 - \cos \Delta\xi \end{aligned} \quad (13)$$

Durch eine Positioniergenauigkeit  $\Delta\xi$  des Bezugsrasters entsteht also ein Fehler vorwiegend in den Verschiebungsgradienten  $u_{1,2}$  und  $u_{2,1}$ . Die Normaldehnungen  $u_{1,1}$  und  $u_{2,2}$ , kleine Verformungen vorausgesetzt, bleiben dadurch weitgehend unbeeinflusst. Die Schubverformung  $\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$  wird mit dem Fehler

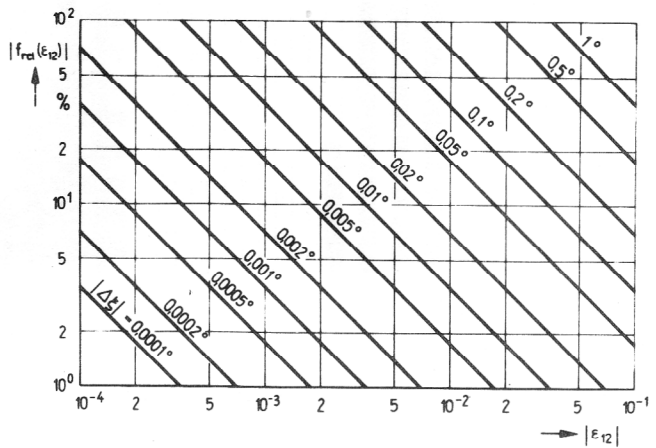
$$|\Delta\epsilon_{12}| = \sin |\Delta\xi|$$

belastet. Die grafische Darstellung (Bild 6) des relativen Fehlers  $f_{rel}(\epsilon_{12})$  mit

$$f_{rel}(\epsilon_{12}) \equiv \left| \frac{\Delta\epsilon_{12}}{\epsilon_{12}} \right| = \left| \frac{2 \sin \Delta\xi}{u_{1,2} + u_{2,1}} \right| \quad (14)$$

zeigt, daß insbesondere bei kleinen Verformungen der Bezugsraster mit einer sehr hohen Genauigkeit positioniert werden muß.

Aus den Gln. (13) folgt weiter das interessante Ergebnis, daß der Fehler von  $\epsilon_{12}$  dann verschwindet, wenn der Bezugsraster beide Male um den gleichen Winkel  $\Delta\xi$  falsch positioniert wurde, also eine Verdrehung um genau  $90^\circ$  erfuhr. Realisierbar ist dieser Fall mit der Anordnung der Moirestreifenmultiplikation, bei der sowohl Objekt- als auch Bezugsraster vom Typ eines Kreuzrasters sein dürfen und die Trennung der  $u_1$ - von den  $u_2$ -Isotheten auf optischem Wege erfolgt [4].



**Bild 6**  
Abhängigkeit des relativen Fehlers  $f_{rel}(\epsilon_{12})$  der zu messenden Schubverformung  $\epsilon_{12}$  infolge einer Positioniergenauigkeit  $\Delta\xi$  des Bezugsrasters

#### 2.4.3. Einfluß einer thermischen Dehnung des Bezugsrasters

Besitzen Objekt- und Bezugsraster zwar gleiche Rasterteilungen  $p$ , aber unterschiedliche thermische Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ , so rufen Temperaturänderungen  $\Delta T$  unerwünschte Dehnungsunterschiede zwischen den Rastern hervor. Der Einfachheit halber und für praktische Erfordernisse ausreichend soll der Temperatureinfluß ausschließlich dem Bezugsraster zugeschlagen werden. Mit

$$\delta_{th} = (\alpha_{\text{Bezugsraster}} - \alpha_{\text{Objekt}}) \cdot \Delta T \quad (15)$$

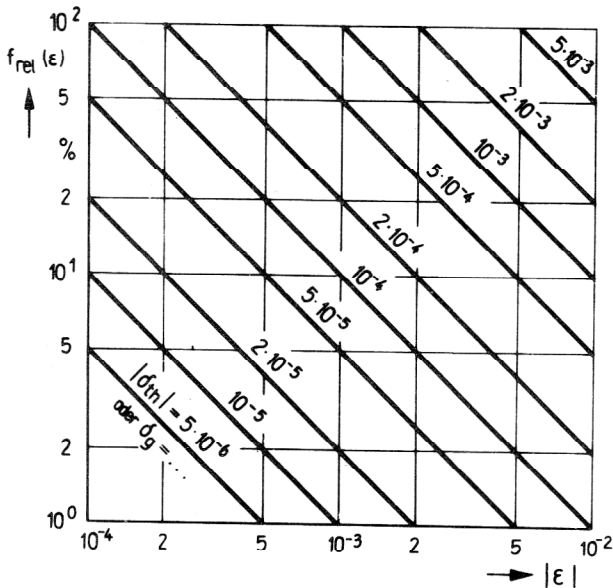
beträgt somit die Rasterteilung des Bezugsrasters  $p(1 + \delta_{th})$ . Für das Isothetenverfahren mit einem Kreuzraster ergibt sich dann aus den grundlegenden Gln. (7)

$$\begin{aligned} \xi_I = 0: \quad u_{1,1} &= \frac{p}{M_{I1}} + \frac{\delta_{th}}{1 + \delta_{th}} \quad \text{kleine Def.} \approx \frac{p}{M_{I1}} + \delta_{th} \\ u_{1,2} &= \frac{p}{M_{I2}} \\ \xi_{II} = 90^\circ: \quad u_{2,1} &= \frac{p}{M_{II1}} \\ u_{2,2} &= \frac{p}{M_{II2}} + \frac{\delta_{th}}{1 + \delta_{th}} \quad \text{kleine Def.} \approx \frac{p}{M_{II2}} + \delta_{th} \end{aligned} \quad (16)$$

Durch eine thermische Dehnung des Bezugsrasters entsteht also, kleine Deformationen vorausgesetzt, ein Fehler nur bei den Normaldehnungen, während die Schubverformung nach wie vor richtig ermittelt wird. Der absolute Fehler kann unmittelbar aus den Gln. (16) abgelesen werden. Den relativen Fehler  $f_{rel}(\epsilon)$  mit

$$f_{rel}(\epsilon) \equiv \frac{\Delta u_{i,j}}{u_{i,i}} = - \frac{\delta_{th}}{1 + \delta_{th}} \frac{1}{u_{i,i}} \approx - \frac{\delta_{th}}{u_{i,i}} \quad (17)$$

zeigt Bild 7.



**Bild 7**  
 Abhängigkeit des relativen Fehlers  $f_{rel}(\epsilon)$  der zu messenden Normaldehnung infolge einer thermischen Dehnung  $\delta_{th}$ , Gl. (15), des Bezugsrasters bzw. infolge des Einflusses  $\delta_g$ , Gl. (18), eines Spalts

**2.4.4. Einfluß eines Spalts zwischen Objekt- und Bezugsraster**

Für die mathematische Analyse der Entstehung des Moiréeffekts wurde bislang vorausgesetzt, daß Objekt- und Bezugsraster sich im Kontakt befinden. Dieser theoretische Grenzfall ist praktisch nicht realisierbar. Ein meist örtlich veränderlicher Spalt zwischen den den Moiréeffekt erzeugenden Rastern kann u. a. folgende Ursachen haben:

- Eine im unbelasteten Zustand ebene Oberfläche erfährt infolge des dort wirkenden ebenen Spannungszustandes auch laterale Verschiebungen.
- Imperfektionen der beteiligten Raster ermöglichen nur einen punktuellen Kontakt.
- Zwischen beiden Rastern befindet sich häufig der Film einer Immersionsflüssigkeit.

Bild 8 spiegelt die geometrischen Verhältnisse wider. Die Kamera sei auf die Bezugsrasterebene fokussiert. Zwischen Bezugs- und Objektraster befinde sich ein Spalt der Größe  $g$ . Wird weiter  $|g| \ll a$  vorausgesetzt, so entsteht noch ein ausreichend scharfes Bild des Objektrasters und der Einfluß der durch die Zentralperspektive entstehenden Parallaxe kann vernachlässigt werden.

Für die Abbildungsmaßstäbe  $\beta_B$  und  $\beta_0$  sowie die Teilungen  $p'_B$  und  $p'_0$  von Bezugs- und Objektraster in der Bildebene gilt dann mit den Gesetzen der Strahlenoptik

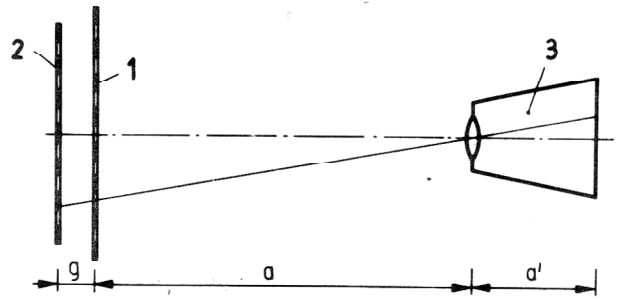
$$\beta_B = a' / a = p'_B \quad \beta_0 = a' / (a+g) = p'_0 / p$$

Nun kann analog zur Vorgehensweise von Abschn. 2.4.3. der entstehende Fehler wiederum allein dem Bezugsraster über die Fehlanpassung  $\delta_g$  Gl. (4), zugeschlagen werden. Aus der Beziehung

$$p'_B = (1 + \delta_g) p'_0$$

folgt dann mit  $|g| \ll a$

$$\delta_g = g/a \tag{18}$$



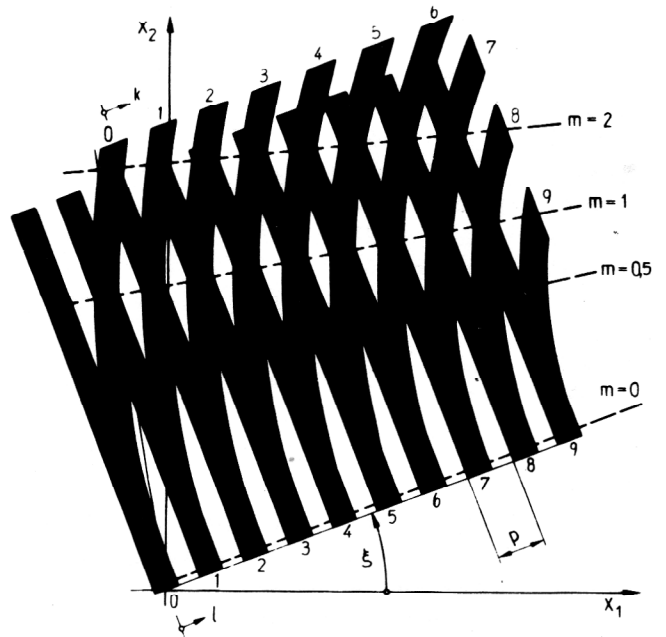
**Bild 8**  
 Isothermenverfahren mit Spalt zwischen Objekt- und Bezugsraster

Die Wirkung des experimentell stets vorhandenen Spalts zwischen Objekt- und Bezugsraster entspricht also der einer thermischen Dehnung des Bezugsrasters und kann deshalb ebenfalls mit Bild 7 abgeschätzt werden.

**2.5. Analyse des Moiréeffekts bei inhomogenen Deformationen**

Bei technischen Problemstellungen mit i. a. inhomogenen Deformationsfeldern entstehen nichtäquidistante und gekrümmte Moiréstreifensysteme. Diese können nur abschnittsweise und in gewisser Näherung als ein äquidistantes System gerader Moiréstreifen infolge eines homogenen Deformationszustandes angesehen werden.

Für das Isothermenverfahren folgt jedoch aus einer einfachen geometrischen Analyse, Bild 9, daß auch dann, wenn die Deformation beliebig inhomogen ist, entlang einer Isothete die entsprechende Komponente  $u_x$  des Verschiebungsvektors konstant ist. Somit gilt Gl. (9) auch für inhomogene Deformationen exakt. Durch analoge Überlegungen kann gezeigt werden, daß die allgemeine Beziehung für den Moiréstreifenparameter, Gl. (6), ebenfalls exakt gilt.



**Bild 9**  
 Geometrische Analyse des Isothermenverfahrens bei inhomogener Deformation

Im Ergebnis dessen sind die im Abschn. 2 abgeleiteten Gleichungen und Diagramme auch bei inhomogenen Deformationsfeldern weiterhin exakt gültig, wenn in ihnen die charakteristischen Moiréstreifenabstände  $M_{ij}$  im Sinne von

$$\frac{1}{M_{ij}} \rightarrow m_{i,j}(x_1, x_2) \equiv \frac{\partial m_i(x_1, x_2)}{\partial x_j} \quad (19)$$

ersetzt werden. Heuristisch erklärt dies auch der aus der Definition der charakteristischen Abstände ableitbare Zusammenhang

$$\frac{\partial m_i}{\partial x_j} \approx \frac{\Delta m_i}{\Delta x_j} = \frac{1}{M_{i,j}} \quad \left| \begin{array}{l} \Delta m_i = 1 \\ \Delta x_j = M_{i,j} \end{array} \right.$$

### 3. Analyse plastischer Deformationen mit dem Moiréverfahren

Aus Gründen einer beanspruchsgerechten Gestaltung, der Betriebssicherheit und der Materialökonomie ist häufig auch die Untersuchung des elastisch-plastischen bzw. vollplastischen Tragverhaltens einer Konstruktion erforderlich. Die Größe der dabei mit dem Isothetenverfahren zu erfassenden Deformationen kann für häufig verwendete metallische Werkstoffe mit Tabelle 1 abgeschätzt werden.

Tabelle 1

Festigkeit und Dehnung metallischer Werkstoffe im Zugversuch an der Streckgrenze (S) und beim Bruch (B)

Werkstoff	Zustand	$\sigma_S$ N/mm <sup>2</sup>	$\epsilon_S$ ‰	$\sigma_B$ N/mm <sup>2</sup>	$\epsilon_B$ ‰
St 38		240	1.1	380	25
St 60		340	1.6	600	14
C 60	vergütet	500	2.4	750	14
42CrMo4	vergütet	800	3.8	1000	11
GGL-20		—	—	200	2
GGG-40		280	1.6	400	12
Al99.5	weich	20	0.3	70	35
AL99.5	hart	110	1.6	130	5
Al Cu Mg1	ausgehärtet	270	3.8	400	15
AlZnMgCu0.5	ausgehärtet	430	6.1	500	6
R-Cu99.5	weich	100	0.8	200	40
R-Cu99.5	hart	320	2.6	360	4
CuZn30	weich	180	2.0	270	48
CuZn30	hart	290	3.2	420	12

#### 3.1. Vollplastische Deformationszustände

Bei Überschreiten der Streckgrenze treten in einem Bauteil lokale Plastifizierungen auf. Diese anfangs kleinen Bereiche wachsen mit zunehmender Last und können häufig zusammenhängende Gebiete, sog. plastische Gelenke, bilden. Es ist dann der vollplastische Zustand erreicht und eine weitere Lastaufnahme der Konstruktion ergibt sich lediglich durch die Verfestigung des Werkstoffs. Kleine Laststeigerungen haben große Zuwüchse der Deformationen zur Folge.

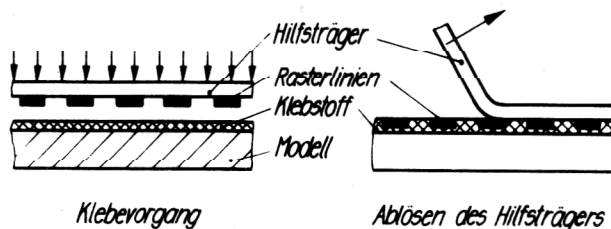


Bild 10  
Rasterübertragungstechnik

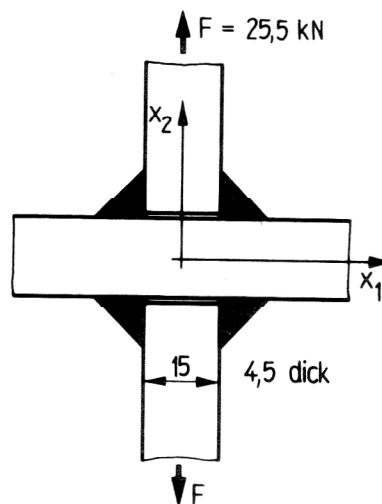


Bild 11  
Belastung einer Kreuzstoß-Schweißverbindung

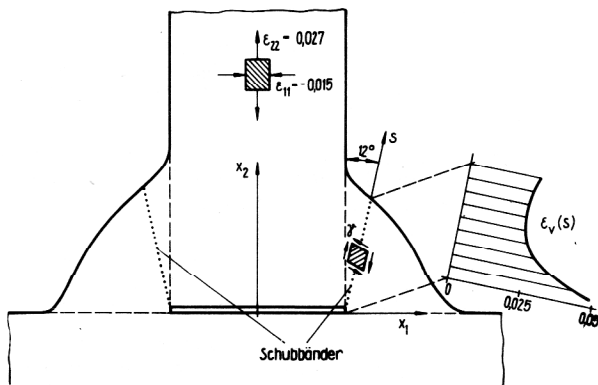
Vollplastische Deformationszustände können mit dem Moiréverfahren bei vergleichsweise geringer Empfindlichkeit untersucht werden. Charakteristisch ist eine anwenderfreundliche Rasterübertragungstechnik (Bild 10), die nur geringe Anforderungen an die Oberflächenvorbereitung stellt. Übertragbare Objekttraster<sup>1)</sup> bis zu 100 L/mm ( $p = 0.01$  mm), deren Strukturelemente aus reflektierenden Metallschichten (Dicke  $< 1 \mu\text{m}$ ) bestehen, ermöglichen eine Untersuchung im Auflicht. Als Klebstoffe sind u. a. modifizierte Epoxidharze geeignet. Für die Beobachtung des Moiréeffekts, der bei dieser Versuchstechnik strahlenoptisch entsteht, ist dem verzerrten Objekttraster, meist ein Kreuzraster, ein Linien-Bezugsraster im Kontakt zu überlagern. Als Bezugsraster dienen Kopien auf feinkörnige fotografische Silber-Gelatine-Schichten. Als Beispiel eines vollplastischen Deformationszustandes wird kurz die Beanspruchung einer Kreuzstoß-Schweißverbindung<sup>2)</sup> dargestellt. Die Probe wurde dabei aus einer unter technischen Bedingungen geschweißten Kreuzstoß-Verbindung herausgearbeitet und so belastet, daß der Kraftfluß den Weg über die Schweißnaht nimmt (Bild 11). Aus den Feldern der  $u_1$ - und  $u_2$ -Isotheten (Bild 12) geht hervor, daß sowohl in den Blechen als auch in den Kehlnähten bleibende Deformationen ent-

1) In beschränktem Umfang können derartige Raster interessierten Anwendern zur Verfügung gestellt werden.

2) Der Autor verdankt die Anregung zu dieser Aufgabe Herrn Doz. Dr. sc. techn. M. Kruppa von der Ingenieurhochschule Köthen.



**Bild 12**  
Isothetenfelder nach Entlastung  
Werkstoff: Stahl, Objektraster: 50 L/mm



**Bild 13**  
Einachsige Vergleichsdehnung  $\epsilon_v$  im Schubband der Kehlnaht und Verformung des Grundwerkstoffs

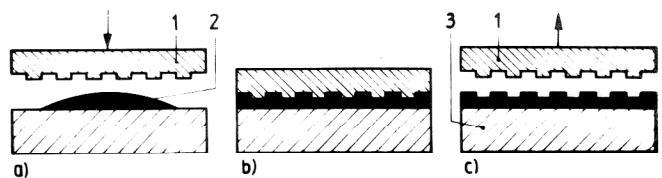
standen sind. In der Schweißnaht entstehen als vollplastische Gebiete typische Schubbänder, nach deren Ausbildung nur noch geringe Laststeigerungen möglich sind. Ausdrücklich hervorgehoben werden soll, daß das zumindest im plastischen Bereich unterschiedliche Werkstoffverhalten von Schweißnaht und Blech im Experiment zwangsläufig berücksichtigt wird. Die Größe der auftretenden Dehnungen kann aus Bild 13 abgelesen werden.

Weitere Anwendungen zu diesem Themenkreis enthalten u. a. die Arbeiten [5] bis [7].

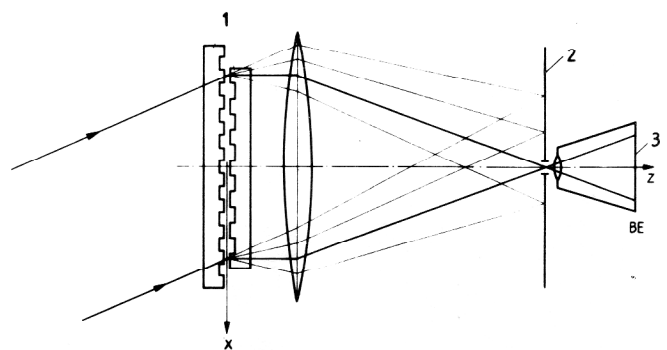
### 3.2. Elastisch-plastische Deformationsfelder

Bei dieser Aufgabe sind Deformationen zu analysieren, die die Streckgrenzdehnung, Tabelle 1, nur wenig überschreiten. Gut geeignet hierfür ist die interferenzoptische Methode der Moiréstreifenmultiplikation [4], mit der sich die Empfindlichkeit des Moiréverfahrens um mehr als eine Größenordnung steigern läßt.

Für die Versuchstechnik ist charakteristisch, daß als Objekt- und Bezugsraster transparente Phasengitter dienen. Das Kopieren der Phasengitter erfolgt mit einer Replica-Technik (Bild 14), bei der das Relief einer Gittervorlage mit einem aushärtbaren Formstoff abgeformt wird. Auch von dem verformten Objektgitter muß ein solcher Abdruck hergestellt werden. Den Strahlengang bei der Moiréstreifenentstehung zeigt Bild 15. Die Trennung der



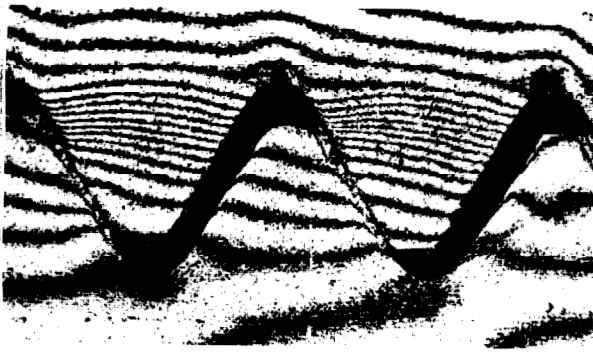
**Bild 14**  
Replica-Technik  
1 Gittervorlage, 2 Formstoff, 3 abgeformtes Gitter  
a) Andrücken der Gittervorlage  
b) Aushärten des Formstoffs  
c) Trennen der Gittervorlage vom abgeformten Gitter



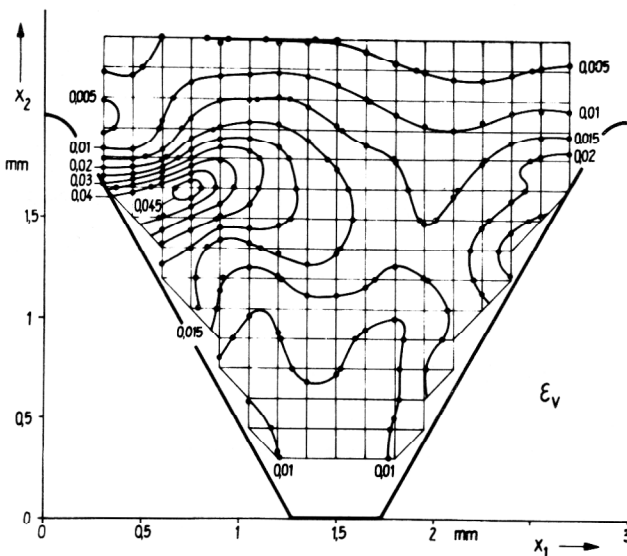
**Bild 15**  
Strahlengang der Moiréstreifenmultiplikation  
1 Objekt- und Bezugsgitter, 2 Ebene des Spektrums mit Raumblende, 3 Ebene der Moiréstreifenentstehung

$u_1$ - und  $u_2$ -Isotheten erfolgt auf optischem Wege durch Auswahl entsprechender Beugungsordnungen im Spektrum. Es entfällt dadurch das kritische Drehen des Bezugsrasters.

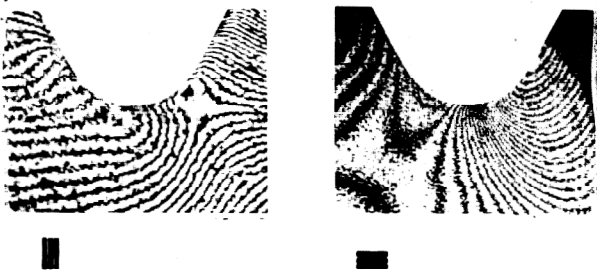
Elastisch-plastische Deformationen treten u. a. bei Schraubenverbindungen [8] auf. Um mit dem Moiréverfahren an einer freien Oberfläche arbeiten zu können, muß dabei jedoch die rotationssymmetrische Geometrie durch ein ebenes Modell konstanter Dicke nachgebildet



**Bild 16**  
Isotheten im Gewinde einer Schraubenverbindung M10x1.5 (4.66fach vergrößert), 40Cr4/34Cr4, Dicke des ebenen Modells: 6 mm, Schraubkraft: 75 kN, Objekttraster: 50 L/mm, Multiplikationsfaktor: 5, effektive Liniendichte: 250 L/mm



**Bild 17**  
Vergleichsdehnung  $\epsilon_V$  im Gewinde der Mutter



**Bild 18**  
Isotheten im Gewindegrund der Schraube, Multiplikationsfaktor: 40, effektive Liniendichte: 2000 L/mm

werden. Schraube bzw. Mutter eines M10 x 1.5-Gewindes in 4.66 facher Vergrößerung bestanden aus den Stählen 40Cr4 (gemessene Streckgrenze:  $\sigma_S = 410 \text{ N/mm}^2$ ) bzw. 34Cr4 ( $\sigma_S = 330 \text{ N/mm}^2$ ) und wurden spanend hergestellt. Bild 16 zeigt ein typisches Isothetenfeld. Dabei treten, wie sich nach Entlastung zeigte, nur in der Mutter plastische Deformationen auf. Die Verformungen

der Gewindegänge der Schraube sind weitgehend reversibel. Als Beispiel für das Ergebnis einer rechnergestützten Auswertung der Isothetenfelder für einen Gewindegang der Mutter ist im Bild 17 das Feld der einachsigen Vergleichsdehnung  $\epsilon_V$  dargestellt.

Eine gegenüber Bild 15 deutliche Steigerung der Empfindlichkeit ist durch weiteres Erhöhen des Faktors der Moiréstreifenmultiplikation möglich, wobei an die Versuchstechnik sehr hohe Anforderungen gestellt werden. Die in Bild 18 erreichte effektive Liniendichte von 2000 L/mm läßt dann, wie auch aus dem Empfindlichkeitsdiagramm (Bild 5) hervorgeht, die Analyse von kleinen elastisch-plastischen Deformationen in der Umgebung des Gewindegrundes zu. Weitere experimentelle Ergebnisse zur Festigkeit von Schraubenverbindungen enthält die Arbeit [8].

Da für Untersuchungen im sichtbaren Licht die theoretische Grenze der Liniendichte bei etwa 4000 L/mm liegt (Bild 5), müssen methodische Weiterentwicklungen deshalb vor allem der Verbesserung der Bildqualität und der Meßwertaufassung gewidmet sein [9].

#### LITERATUR

- [1] Vocke, W.; Ullmann, K.: Experimentelle Dehnungsanalyse; Dehngitter- und Moiréverfahren. – Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1974. – 196 S.
- [2] Naumann, J.: Anwendung des Moiréverfahrens zur experimentell-theoretischen Analyse von Umformvorgängen. – In: Kreißig, R.; Drey, K.-D.; Naumann, J.: Methoden der Plastizität; Anwendung auf Umformprobleme. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1980, S. 115 – 201.
- [3] Naumann, J.; Jantschke, B.: Eine Theorie zur Moiréstreifenmultiplikation bei zwei überlagerten Gittern. In: Wiss. Z. d. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 19(1977)3, S. 305 – 316.
- [4] Naumann, J.: Moiréverfahren. In: Heymann, J.; Lingener, A.: Experimentelle Festkörpermechanik. – Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1986. S. 112 – 172.
- [5] Ullmann, K.: Anwendung des Moiréeffekts zur experimentellen Dehnungsanalyse. In: Beiträge zur Spannungs- und Dehnungsanalyse VI. – Berlin: Akademie-Verlag, 1970. S. 59 – 112.
- [6] Naumann, J.; Jantschke, B.; Pelz, F.: Deformationsmessungen mit dem Moiréverfahren an widerstandsgeschweißten Stahlrohren. In: Schweißtechnik. – Berlin 26 (1976) 11. S. 514 – 516.
- [7] Heymann, J.; Naumann, J.; Ullmann, K.: Experimentelle Spannungsanalyse hochbeanspruchter Maschinenbauteile. In: Techn. Mechanik. – Berlin 2(1981)1. S. 19 – 26.
- [8] Stockmann, M.: Experimentelle und numerische Festigkeitsanalyse hochbelasteter Gehäuseschraubenverbindungen. Diss. A, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1984.
- [9] Heymann, J.; Lingener, A.; Petrak, D.: Entwicklungstendenzen der experimentellen Mechanik. In: Techn. Mechanik. – Berlin 5(1984)4. S. 5 – 19.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Jochen Naumann  
Technische Universität Karl-Marx-Stadt  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
PSF 964  
Karl-Marx-Stadt  
9010