

# Ermittlung der Eigenschwingungen von Rotationsschalen mit der Methode der Finiten Elemente

R. B. Rikards, A. K. Chate

## 1. Einleitung

Der Berechnung von Eigenschwingungen für Rotationsschalen ist eine Vielzahl von Beiträgen gewidmet. Dabei werden sowohl analytische Untersuchungsmethoden betrachtet [1], aber auch numerische, wobei die weiteste Verbreitung die Finite-Element-Methode erhielt.

Die qualitativen Untersuchungsmethoden [1] geben Informationen über die Dichte des Frequenzspektrums, jedoch genügen dem Ingenieur nicht allein Informationen über die Verteilungsfunktion der Frequenzen. Er benötigt ebenfalls die Werte der Frequenzen selbst, da entsprechend diesen Frequenzen eine Projektierung auf dynamische Belastungen erfolgt.

Analytische Lösungen zur Ermittlung der Frequenzen sind hauptsächlich für Zylinder- und Kugelschalen bekannt. Für Schalen mit anderen geometrischen Formen (Kegel, Torus, Rotationsschalen mit positiver und negativer Gaußscher Krümmung) lassen sich Lösungen nur numerisch erhalten. Außerdem treten in technischen Anwendungsfällen verrippte und zusammengesetzte Schalen sowie Schalen mit verzweigter Meridianform auf. Zur Berechnung solcher Schalen stellt die Methode der Finiten Elemente ein universelles Berechnungsverfahren dar. Für Rotationsschalen, die keine nichtaxialsymmetrischen Inhomogenitäten aufweisen (Bohrungen, Luken, Versteifungen), ist der Einsatz von eindimensionalen Finiten Elementen mit polynomialen Approximationen in Meridianrichtung und trigonometrischen Ansätzen in Umfangsrichtung besonders ökonomisch. Eine solche Vorgehensweise ist beispielsweise in den Arbeiten [2] bis [4] u. a. verfolgt worden. Für den Fall, daß die Rotationsschale nichtaxialsymmetrische Inhomogenitäten aufweist, sind entweder zweidimensionale Finite Elemente für die gesamte Schale bzw. in der Umgebung der Inhomogenität zu verwenden. Für den letzten Fall sind spezielle Übergangselemente zur Kopplung eindimensionaler und zweidimensionaler Elemente einzusetzen [5].

Die Schalengeometrie läßt sich entweder mit Hilfe von analytischen Funktionen definieren, bzw. die Meridianform kann mit Splinefunktionen [6] beschrieben werden. Letzteres ist universeller, da der Berechnungsingenieur die Schalengeometrie unmittelbar aus der Zeichnung übernehmen kann. Im universellen Programmsystem ROTCAU, welches zur Analyse von Rotationsschalen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode dient, kann die Form der Meridianabschnitte analytisch bzw. numerisch mit nachfolgender Approximation durch kubische Splinefunktionen eingegeben werden. Das Programmsystem ROTCAU wurde bei allen nachfolgenden Rechnungen verwendet.

Zur Ermittlung dynamischer Charakteristika von Schalen mit Hilfe der Finite-Element-Methode ist es notwendig, das Deformationsenergiefunktional sowie das Funktional der kinetischen Energie zu bestimmen. Mit Hilfe der Hypothesen der Schalentheorie erfolgt der Übergang von den dreidimensionalen zu den zweidimensionalen Funktionalen. Meistens wird dabei die Hypothese von Kirchhoff und Love verwendet. Jedoch enthält in diesem Fall das zu minimierende Funktional die zweiten Ableitungen der Durchbiegungen, womit man als wesentliche Randbedingungen der Variationsaufgabe die Verschiebungen sowie die erste Ableitung der Durchbiegung erhält. Die Konstruktion zweidimensionaler verträglicher Approximationen führt damit zu wesentlichen Schwierigkeiten. Für eindimensionale Finite Elemente von Rotationsschalen treten diese Schwierigkeiten nicht auf, da benachbarte Elemente nur in einem Knoten zusammentreffen. Dieser Knoten stellt eine Umfangslinie dar. Da jedoch zur Analyse dickwandiger oder anisotroper Schalen die Berücksichtigung der Querschubdeformation notwendig ist, wird anstelle der Kirchhoff-Love-Hypothese die Timošenko-Hypothese verwendet. Diese berücksichtigt Querschubdeformationen. In der Timošenko-Theorie sind die Drehungen des normalgerichteten Elements unabhängige Funktionen. Daher enthält das Deformationsenergiefunktional nur erste Ableitungen der verallgemeinerten Verschiebungen. Damit im Zusammenhang steht, daß die wesentlichen Randbedingungen der Variationsaufgabe die verallgemeinerten Verschiebungen selbst sind, womit auch die Formulierung abgestimmter zweidimensionaler Approximationen keine Schwierigkeiten hervorruft.

Die Timošenko-Schalentheorie mit fünf Freiheitsgraden (Theorie mit 5 Moden) ist in [7] ausführlich beschrieben. Eine Variante der Timošenko-Schalentheorie mit sechs Freiheitsgraden ist in [8] dargestellt. Diese Theorie erfaßt neben Querschubdeformation auch die Längenänderungen der Normalen und gestattet daneben auch die Kopplung aller Verschiebungen, die in den verschiedenen lokalen Koordinatensystemen ermittelt werden. Dies ist besonders wichtig bei verrippten und verzweigten Schalen. In der vorliegenden Arbeit wird zur Ermittlung der Steifigkeits- und der Massenmatrix eines Finiten Elements die Timošenko-Theorie mit dem Freiheitsgrad 6 verwendet.

Die Timošenko-Theorie, die auf einer linearen Approximation der Verschiebungen in Schalendickenrichtung beruht, ist genauso wie die Kirchhoff-Love-Theorie eine Theorie der ersten Näherung [9], d. h. die Spannungen werden in beiden Theorien mit dem gleichen Fehler er-

mittelt. Da jedoch die Timošenko-Theorie auch den Querschub und die Längenänderungen der Normalen erfasst, wird somit der Ausdruck für die Deformationsenergie genauer. Damit erhält man bei der Berechnung auch verbesserte Werte für die integralen Charakteristika: die Durchbiegungen, die Eigenfrequenzen, die kritischen Belastungen. Für anisotrope Schalen können in einigen Fällen diese Korrekturterme wesentlich sein [10].

Die Berücksichtigung des Querschubs bei der Berechnung dickwandiger Schalen erfolgt durch Anwendung der diskreten Timošenko-Hypothese unmittelbar für das dreidimensionale Finite Element. Eine solche Vorgehensweise ist in [11] vorgeschlagen und in vielen Arbeiten zur Erarbeitung zweidimensionaler Finiter Elemente weiterentwickelt worden. Für Rotationsschalen ist ein Finites Element unter Einbeziehung des Querschubs in [12] vorgeschlagen.

## 2. Die Funktionale für die Deformationsenergie und die kinetische Energie

Für das Erhalten der Bewegungsgleichungen der Schale ist die Kenntnis der Funktionale der Deformationsenergie  $U$ , der kinetischen Energie  $T$  und der Arbeit der äußeren Kräfte notwendig. Bei Eigenschwingungen ohne Berücksichtigung der Wechselwirkungen mit der Umgebung entfällt der Term für die Arbeit der äußeren Kräfte. Für Schalen werden die notwendigen Funktionale aus den entsprechenden dreidimensionalen Funktionalen abgeleitet [13]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} e_{ij} dV, \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u} \cdot \dot{u} dV. \quad (2)$$

Dabei bedeuten  $\sigma^{ij}$ ,  $e_{ij}$  – die Komponenten des dreidimensionalen Spannungs- und Deformationstensors,  $\underline{u}$  – der dreidimensionale Verschiebungsvektor,  $dV$  – ein Volumenelement der Schale,  $\dot{u} = \partial \underline{u} / \partial t$  – die Verschiebungsgeschwindigkeiten,  $\rho$  – die Dichte des Schalenmaterials. Hier und nachfolgend erfolgt die Summation bei sich wiederholenden lateinischen Indizes von 1 bis 3, bei sich wiederholenden griechischen von 1 bis 2.

Entsprechend der Timošenko-Hypothese wird bei der Ableitung der zweidimensionalen Funktionale für die Schale eine lineare Approximation der Verschiebungen verwendet [7], [8]:

$$\underline{u}(x^\alpha, x_3) = \underline{v}(x^\alpha) + x_3 \underline{\gamma}(x^\alpha). \quad (3)$$

Dabei ist  $\underline{v} = v^\alpha \underline{a}_\alpha + w \underline{a}_3$  – der Verschiebungsvektor in der Mittelfläche,  $\underline{\gamma} = \gamma^\alpha \underline{a}_\alpha + \gamma \underline{a}_3$  – der Vektor der Rotationen um die Normalen,  $x^\alpha, x_3$  – ein krummliniges Koordinatensystem auf der Fläche mit den Basisvektoren  $\underline{a}_\alpha, \underline{a}_3$ .

Die Koordinatensysteme für die Rotationsschale sind auf Bild 1 dargestellt. Die Verschiebungen, Spannungen und Deformationen werden im Zylinderkoordinatensystem ( $x^1 = s, x^2 = \varphi, x_3$ ) ermittelt. Die Schalengeometrie wird im Zylinderkoordinatensystem  $r, \varphi, z$  definiert. Letzteres ist mit dem globalen kartesischen Koordinatensystem  $x, y, z$  verbunden. Bei Verwendung des linearen Greenschen Deformationstensors [13]

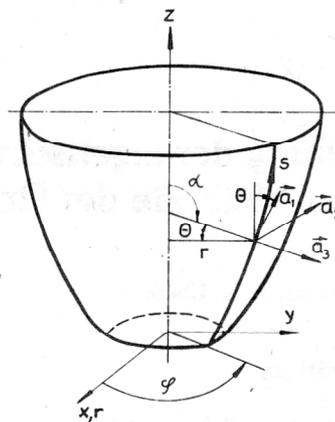


Bild 1  
Koordinatensysteme für die Rotationsschale

$$e_{ij} = \underline{u}_{,i} \cdot \underline{g}_j + \underline{u}_{,j} \cdot \underline{g}_i, \quad (4)$$

wobei  $\underline{g}_i$  die Basisvektoren in den äquidistanten Flächen der Schale sind, und der Hypothese (1) erhält man die Kinematik-Gleichungen der Timošenko-Theorie. Bei Beschränkung auf lineare Glieder für die Koordinate  $x_3$  gehen diese Beziehungen in folgende über [8], [14]

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \Omega_{\alpha\beta} + x_3 \chi_{\alpha\beta}, \\ e_{\alpha 3} &= \Omega_{\alpha 3}, \\ e_{33} &= \Omega_{33}. \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei nehmen die zweidimensionalen Tensoren folgende Ausdrücke an

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}), \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\beta\alpha} - b_\alpha^\nu \epsilon_{\nu\beta} - b_\beta^\nu \epsilon_{\nu\alpha}), \\ \Omega_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (\gamma_\alpha + \psi_\alpha), \\ \Omega_{33} &= \gamma \end{aligned} \quad (6)$$

mit

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= v_\alpha \parallel_\beta - b_{\alpha\beta} w, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \gamma_\alpha \parallel_\beta - b_{\alpha\beta} \gamma, \\ \psi_\alpha &= w_{,\alpha} + b_{\alpha\beta} v^\beta. \end{aligned} \quad (7)$$

$a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  sind die Komponenten des ersten (metrischen) und des zweiten Tensors der Fläche, das Zeichen  $\parallel$  bedeutet kovariantes Differenzieren in der Metrik der Mittelfläche unter Verwendung der Christoffel-Symbole  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  für die Mittelfläche. Für Rotationsschalen (Bild 1) erhält man in den Koordinaten  $s, \varphi$  folgende Größen

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \quad b_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{d\Theta}{ds} & 0 \\ 0 & -\frac{\cos\Theta}{r} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\sin\Theta}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r \sin\Theta.$$

Dabei bedeuten:  $r$  – Radius der Parallelen (Bild 1),  $\Theta$  – Winkel zwischen der Tangenten zum Meridian und der Rotationsachse  $z$ . Die restlichen Komponenten des Christoffel-Symbols sind gleich Null.

Unter Verwendung der Formeln für das kovariante Differenzieren [13], der Beziehungen (8) sowie durch Übergang in den Gln. (6) und (7) zu den physikalischen Komponenten der Vektoren und Tensoren erhält man die linearen kinematischen Beziehungen für die Timošenko-Theorie im Falle von Rotationsschalen. Diese Gln. sind in [14] vollständig abgeleitet. Folgende Bezeichnungen werden für die physikalischen Verschiebungskomponenten eingeführt

$$u = v(1), \quad v = v(2), \quad w = w, \quad (9)$$

$$\gamma_s = \gamma(1), \quad \gamma_\varphi = \gamma(2), \quad \gamma = \gamma.$$

Damit lassen sich die kinematischen Beziehungen folgendermaßen darstellen

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (10)$$

mit  $\underline{L}$  als Matrix der Differentialoperatoren, die sich aus den in [14] angegebenen Beziehungen ergeben,  $\underline{\epsilon}$  als Matrix der Deformationen,  $\underline{u}$  als Matrix der Verschiebungen. Das Zeichen „T“ bedeutet nachfolgend „transponiert“.  $\underline{\epsilon}$  und  $\underline{u}$  nehmen damit folgende Ausdrücke an:

$$\underline{\epsilon}^T = \left\{ \Omega_{ss}, \Omega_{\varphi\varphi}, 2\Omega_{s\varphi}, \chi_{ss}, \chi_{\varphi\varphi}, 2\chi_{s\varphi}, 2\Omega_{s3}, 2\Omega_{\varphi3}, 2\Omega_{33} \right\}, \quad (11)$$

$$\underline{u}^T = \left\{ u, v, w, \gamma_s, \gamma_\varphi, \gamma \right\}.$$

Nachfolgend wird das dreidimensionale Funktional der Deformationsenergie (1) in ein zweidimensionales umgeformt. Das Elementarvolumen der Schale wird wie folgt berechnet [13]:

$$dV = \mu \, dx_3 \, dS, \quad (12)$$

wobei  $dS = r \, d\varphi \, ds$  eine Elementarfläche auf der Schalenmittelfläche ist und  $\mu = \det(\mu_\beta^\alpha)$  die Determinante des shifter-Tensors darstellt

$$\mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - x_3 \, b_\beta^\alpha. \quad (13)$$

Hier ist  $\delta_\beta^\alpha$  das Kronecker-Symbol. Wenn weiterhin die kinematischen Beziehungen (5) in das Funktional (1) eingesetzt werden, nimmt die Deformationsenergie der Schale folgenden Ausdruck an:

$$U = \frac{1}{2} \iint_S (N^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + 2Q^\alpha \Omega_{\alpha 3} + N^{33} \Omega_{33}) \, dS. \quad (14)$$

Hierbei werden folgende Beziehungen für die Kräfte  $N^{\alpha\beta}$ , die Momente  $M^{\alpha\beta}$ , die Querkräfte  $Q^\alpha$  und die für die Längenänderungen der Normalen verantwortlichen Kräfte  $N^{33}$  verwendet

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \, \sigma^{\alpha\beta} \, dx_3,$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \, \delta^{\alpha\beta} \, x_3 \, dx_3,$$

$$Q^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \, \sigma^{\alpha 3} \, dx_3, \quad (15)$$

$$N^{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \, \sigma^{33} \, dx_3.$$

In (15) ist  $h$  die Schalendicke.

Für die weiteren Ausführungen werden folgende Vereinfachungen getroffen. Für flache Schalen bleiben die Änderungen der Metrik über die Schalendicke unberücksichtigt. Das bedeutet, daß auf jeder äquidistanten Fläche der Metriktenor gleich dem Metriktenor auf der Schalenmittelfläche  $a_{\alpha\beta}$  ist. Damit wird  $\mu = 1$ ,  $\mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$  und der Kräfte- sowie der Momententensor sind folglich symmetrisch, da die Komponenten des Spannungstensors in einem Koordinatensystem gemittelt werden. Nach Einsetzen von (15) in das Hookesche Gesetz

$$\sigma^{ij} = A^{ijkl} \, \epsilon_{kl}, \quad (16)$$

wobei die Komponenten des Steifigkeitstensors für das Schalenmaterial  $A^{ijkl}$  im Koordinatensystem der Mittelfläche bestimmt werden, und in die kinematischen Beziehungen (5) erhält man die physikalischen Beziehungen für die Schale. Sie haben in Matrix-Schreibweise folgendes Aussehen

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon}. \quad (17)$$

Dabei ist  $\underline{D}$  die Matrix der Elastizitätskonstanten der Schale und  $\underline{\sigma}$  die Spannungsmatrix

$$\underline{\sigma}^T = \left\{ N_{ss}, N_{\varphi\varphi}, N_{s\varphi}, M_{ss}, M_{\varphi\varphi}, M_{s\varphi}, Q_s, Q_\varphi, N_{33} \right\} \quad (18)$$

Die Matrix der Elastizitätskonstanten  $\underline{D}$  enthält im Falle von Schalen aus anisotropem Schichtmaterial die Membransteifigkeiten  $Q^{ijkl}$ , die Membran-Biegesteifigkeiten  $B^{ijkl}$  und die Biegesteifigkeiten  $D^{ijkl}$ , die sich für eine  $k$ -schichtige Schale wie folgt ermitteln lassen [10]:

$$Q^{ijkl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A^{ijkl} \, dx_3 = \sum_{k=1}^K A_{(k)}^{ijkl} [x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}],$$

$$B^{ijkl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A^{ijkl} \, x_3 \, dx_3 \quad (19)$$

$$= \sum_{k=1}^K A_{(k)}^{ijkl} \left\{ [x_3^{(k)}]^2 - [x_3^{(k-1)}]^2 \right\} / 2,$$

$$D^{ijkl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A^{ijkl} \, x_3^2 \, dx_3$$

$$= \sum_{k=1}^K A_{(k)}^{ijkl} \left\{ [x_3^{(k)}]^3 - [x_3^{(k-1)}]^3 \right\} / 3.$$

Hier sind  $A_{ijkl}^{(k)}$  die Komponenten des Steifigkeitstensors für die k-te Schicht und  $x_3^{(k)}$  die äußere Koordinate der k-ten Schicht.

Damit läßt sich unter Verwendung der Bezeichnungen (11) und (18) und bei Berücksichtigung der kinematischen Beziehungen (10) das Funktional der Deformationsenergie (14) durch 6 Funktionen der verallgemeinerten Verschiebungen darstellen

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon} \, dS = \frac{1}{2} \iint_S \underline{\epsilon}^T \underline{D} \underline{\epsilon} \, dS. \quad (20)$$

Dieses Funktional enthält nur erste Ableitungen der Verschiebungen.

Nach Einsetzen der Timosenko-Hypothese (3) in das Funktional für die kinetische Energie (2) erhält man:

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ \rho_0 (\dot{v}^\alpha \dot{v}_\alpha + \dot{w} \dot{w}) + \rho_1 (\dot{v}^\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \dot{\gamma}^\alpha \dot{v}_\alpha) + \rho_2 (\dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \dot{\gamma} \dot{\gamma}) \right\} dS \quad (21)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen für die verallgemeinerten Dichtefunktionen verwendet

$$\rho_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu [\rho(x_3)]^i dx_3. \quad (22)$$

Für die K-schichtige Schale mit der Dichte  $\rho^{(k)}$  für die k-te Schicht ergibt sich bei Beachtung der Annahme  $\mu = 1$  aus den Gln. (22)

$$\rho_0 = \sum_{k=1}^K \rho^{(k)} [x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}],$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \rho^{(k)} \left\{ [x_3^{(k)}]^2 - [x_3^{(k-1)}]^2 \right\}, \quad (23)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K \rho^{(k)} \left\{ [x_3^{(k)}]^3 - [x_3^{(k-1)}]^3 \right\}.$$

Bei Berücksichtigung der Bezeichnungen (11) erhält man für das Funktional (21) bei Verwendung der Matrix-Schreibweise

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \underline{\dot{u}}^T \underline{R} \underline{\dot{u}} \, dS, \quad (24)$$

wobei die Matrix  $\underline{R}$  die verallgemeinerten Dichtefunktionen der Schale enthält

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \mathbf{I} & \rho_1 & \mathbf{I} \\ \rho_1 & \mathbf{I} & \rho_2 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$\mathbf{I}$  ist die Einheitsmatrix (Dimension 3 x 3).

### 3. Die Finite-Element-Approximation

Zur Approximation der Funktionale (20) und (24) wird das in [14] vorgeschlagene Finite Element für die Rotationsschale verwendet. Zunächst werden die Verschiebungen mit trigonometrischen Funktionen in Richtung der Umfangskoordinaten  $\varphi$  approximiert

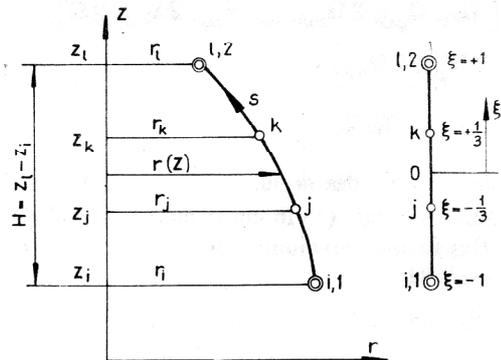
$$\begin{aligned} u(s, \varphi) &= u_0(s) \cos n\varphi, \quad \gamma_s = \gamma_s^0(s) \cos n\varphi, \\ v(s, \varphi) &= v_0(s) \sin n\varphi, \quad \gamma_\varphi = \gamma_\varphi^0(s) \sin n\varphi, \\ w(s, \varphi) &= w_0(s) \cos n\varphi, \quad \gamma = \gamma_0(s) \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Nachfolgend werden die Funktionen  $u_0, v_0, w_0, \gamma_s^0, \gamma_\varphi^0, \gamma_0$  mit kubischen Hermiteschen Polynomen in Richtung der Meridiankoordinaten angenähert

$$F(\xi) = F_1 N_1 + F_2 N_2 + J_1 \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)_1 N_1^* + J_2 \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)_2 N_2^* \quad (27)$$

$F_i, \left( \frac{\partial F}{\partial s} \right)_i$  ( $i=1, 2$ ) sind die Funktionswerte und ihre ersten Ableitungen nach der s-Koordinate in den Knoten 1 und 2 (s. Bild 2),  $J_i = \left( \frac{\partial s}{\partial \xi} \right)_i$  ( $i=1, 2$ ) ist die Jacobi'sche Transformationsdeterminante für die Koordinaten in den Knoten 1 und 2,  $N_1, N_2, N_1^*, N_2^*$  sind die Formfunktionen für das Finite Element

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)^2 (2 + \xi), \quad N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)^2 (2 - \xi), \\ N_1^* &= \frac{1}{4} (\xi - 1) (\xi^2 - 1), \quad N_2^* = \frac{1}{4} (\xi - 1) (\xi + 1)^2. \end{aligned} \quad (28)$$



**Bild 2**  
Finite Element für eine Rotationsschale mit Definition der isoparametrischen Transformation unter Verwendung der z-Koordinaten

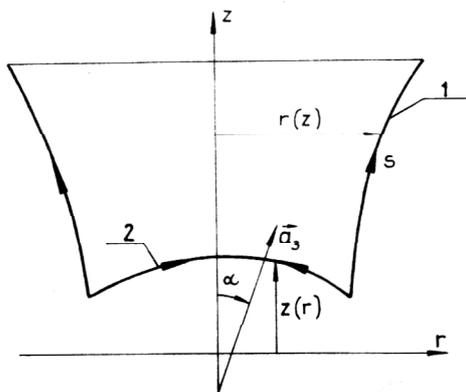
Dabei ist  $\xi \in [-1; +1]$  die lokale Koordinate für das Finite Element.

Damit hat der Vektor der Unbekannten in den Knoten  $\underline{d}^e$  eines Finite Elements 24 Komponenten

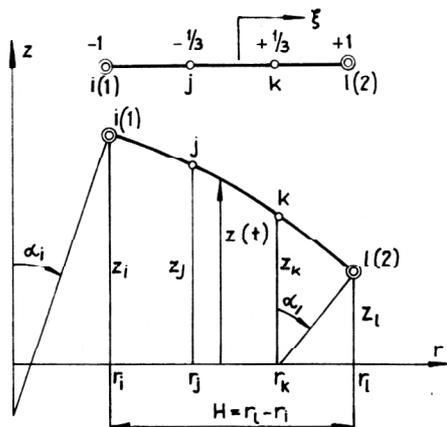
$$\begin{aligned} \underline{d}_e^T &= \left\{ d_1^e, d_2^e \right\}; \\ (\underline{d}_i^e)^T &= \left\{ u_i^0, \left( \frac{\partial u_0}{\partial s} \right)_i, v_i^0, \left( \frac{\partial v_0}{\partial s} \right)_i, w_i^0, \left( \frac{\partial w_0}{\partial s} \right)_i, \right. \\ &\quad \left. \gamma_{si}^0, \left( \frac{\partial \gamma_s^0}{\partial s} \right)_i, \gamma_{\varphi i}^0, \left( \frac{\partial \gamma_\varphi^0}{\partial s} \right)_i, \gamma_i^0, \left( \frac{\partial \gamma_0}{\partial s} \right)_i \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Die Geometrie des Meridians kann verschieden angegeben werden. Für den Fall, daß für einen Abschnitt des Meridians der Winkel  $\Theta$  in den Grenzen  $-\frac{\pi}{4} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{4}$

liegt, läßt sich die Meridianform bequem mit Hilfe der Funktion  $r = r(z)$  angehen (vgl. Bild 2). Für eine Schale, deren Form auf Bild 3 gezeigt ist, wird die Meridianform im Abschnitt 1 mit Hilfe der Funktion  $r = r(z)$  und im Abschnitt 2 mit Hilfe der Funktion  $z = z(r)$  bzw. mit den Funktionen  $r = r(\alpha)$  oder  $z = z(\alpha)$  beschrieben. Die Winkelkoordinate  $\alpha$  ist auch für im Pol geschlossene Schalen (Torusschalen, Kugelschalen usw.) günstig. Der Fall isoparametrischer Transformationen für die Koordinaten  $z$  und  $\alpha$  im Finiten Element ist im Bild 4 gezeigt.



**Bild 3**  
Definition des Meridians für die Rotationsschale



**Bild 4**  
Definition der isoparametrischen Transformation des Finiten Elements unter Verwendung der Koordinaten  $r$  und  $\alpha$

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $z$ ,  $r$  oder  $\alpha$  mit der lokalen Koordinaten  $\xi$  wird durch kubische Polynome mit den Koordinatenwerten  $(f_i, f_j, f_k, f_l)$  in den Knoten  $i, j, k, l$  des Finiten Elements beschrieben:

$$f(\xi) = f_i P_i + f_j P_j + f_k P_k + f_l P_l \quad (30)$$

mit

$$P_i = -\frac{9}{16} (\xi - 1) (\xi^2 - \frac{1}{9}), \quad P_j = \frac{27}{16} (\xi - \frac{1}{3}) (\xi^2 - 1),$$

$$P_k = -\frac{27}{16} (\xi + \frac{1}{3}) (\xi^2 - 1), \quad P_l = \frac{9}{16} (\xi + 1) (\xi^2 - \frac{1}{9}). \quad (31)$$

Die Verschiebungen des Finiten Elements werden durch die Werte der Verschiebungen und ihre ersten Ableitungen in den Knoten 1 und 2 definiert, die Geometrie des Elements dagegen durch die Werte in den Knoten  $i, j, k, l$ . Dabei kann jede der Funktionen  $r(z)$ ,  $z(r)$ ,  $r(\alpha)$ ,  $z(\alpha)$  entweder analytisch oder mit kubischen Splines angegeben werden. Die bei der Ermittlung der Deformationen des Finiten Elements in die kinematischen Beziehungen eingehenden Ableitungen werden durch Variablensubstitution berechnet:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial \xi} J^{-1}. \quad (32)$$

Dabei wird in Abhängigkeit vom Koordinatensystem, in dem die Geometrie des Finiten Elements definiert ist, die Jacobische Transformationsmatrix nach folgenden Formeln berechnet

$$J(\xi) = \frac{ds}{d\xi} = \frac{ds}{dz} \frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{d\xi} \sqrt{1 + (\frac{dr}{dz})^2}$$

$$J(\xi) = \frac{ds}{d\xi} = \frac{ds}{dr} \frac{dr}{d\xi} = \frac{dr}{d\xi} \sqrt{1 + (\frac{dz}{dr})^2}, \quad (33)$$

$$J(\xi) = \frac{ds}{d\xi} = -R_1 \frac{d\alpha}{d\xi}.$$

$R_1$  ist der Krümmungsradius für den Meridian. Im Falle der Funktion  $r = r(z)$  werden  $R_1$  und die in die kinematischen Beziehungen eingehenden Funktionen wie folgt berechnet

$$R_1 = -\frac{[1 + (\frac{dr}{dz})^2]^{3/2}}{\frac{d^2 r}{dz^2}}, \quad (34)$$

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{dr}{dz})^2}}, \quad \sin \Theta = \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 + (\frac{dr}{dz})^2}}.$$

Analog ergibt sich für  $z = z(r)$

$$R_1 = \frac{[1 + (\frac{dz}{dr})^2]^{3/2}}{\frac{d^2 z}{dr^2}}, \quad (35)$$

$$\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{dz}{dr})^2}}, \quad \cos \Theta = \frac{\frac{dz}{dr}}{\sqrt{1 + (\frac{dz}{dr})^2}}.$$

Für  $z = z(\alpha)$  und  $r = r(\alpha)$  erhält man

$$R_1 = \frac{[(\frac{dr}{d\alpha})^2 + (\frac{dz}{d\alpha})^2]^{3/2}}{\frac{dr}{d\alpha} \frac{d^2 z}{d\alpha^2} - \frac{d^2 r}{d\alpha^2} \frac{dz}{d\alpha}}. \quad (36)$$

$$\sin \Theta = -\cos \alpha, \quad \cos \Theta = \sin \alpha.$$

Die letzten Beziehungen ergeben sich unmittelbar aus Bild 1, da  $\Theta = \alpha - \pi/2$  ist.

Die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_e$  und die Massenmatrix erhält man für das Finite Element in der üblichen Weise aus dem Energiefunktional (20) und der kinetischen Energie (24). Die Integration über die Koordinate  $\varphi$  kann man analytisch ausführen, die Integration über die lokale Koordinate  $\xi$  wird numerisch mit dem Gauß-Verfahren realisiert.

#### 4. Numerische Beispiele

Nachfolgend werden Beispiele zur Berechnung der Eigenschwingungen verschiedener Rotationsschalen betrachtet. Bekanntlich führt die Finite-Element-Diskretisierung von Konstruktionen bei Aufgaben zur Ermittlung der Schwingungsfrequenzen auf die Lösung eines verallgemeinerten Eigenwertproblems [11]:

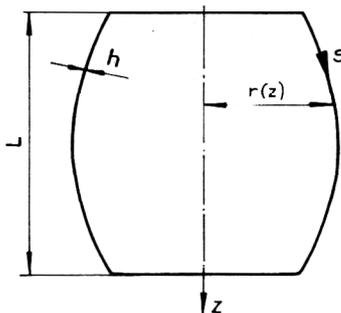
$$\underline{K} \underline{d} - \omega^2 \underline{M} \underline{d} = 0. \quad (37)$$

In (37) bedeuten:  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$  Steifigkeits- bzw. Massenmatrix der Gesamtkonstruktion,  $\underline{d}$  – Vektor der Knotenverschiebungen der Gesamtkonstruktion,  $\omega$  – Eigenkreisfrequenz. Da die Matrizen  $\underline{K}$  und  $\underline{M}$  Bandmatrizen mit großer Dimension sind, werden zur effektiven Lösung der Aufgabe (37) spezielle Algorithmen benötigt. Zur Ermittlung des Anfangsabschnitts des Frequenzspektrums hat sich als besonders effektiv die Subspace-Iteration erwiesen. Diese besitzt einige Modifikationen [21].

Es werden die Eigenfrequenzen für eine Schale mit positiver Gaußscher Krümmung (Bild 5) bei folgenden Ausgangsdaten (dimensionslose Größen) betrachtet

$$S = 3, L = 6 \sin 0,5 = 2,877, h = 0,001 \quad (38)$$

$$E = 1, \nu = 0,3, \rho = 1.$$



**Bild 5**  
Schale mit positiver Gaußscher Krümmung

Dabei sind: S – die Länge des Schalenmeridians, L, h – Länge und Dicke der Schale (Bild 5), E,  $\nu$ ,  $\rho$  – Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl und Dichte des isotropen Schalenmaterials. Das gleiche Beispiel wurde in [2] betrachtet.

Die Meridianform läßt sich mit der Gleichung (dimensionslose Länge) angeben

$$r(z) = \sqrt{9 - (3 \sin 0,5 - z)^2} - 1,879. \quad (39)$$

**Tabelle 1**  
Quadrat der untersten Eigenfrequenz  $\omega^2$  ( $n = 4$ ) für eine Schale mit positiver Gaußscher Krümmung

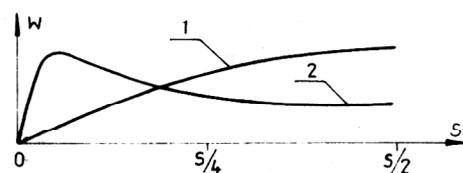
N	$z = 0, L: w = 0$ ( $m = 3$ )	$z = 0, L: v, w = 0$ ( $m = 1$ )	$z = 0, L: u, v, w = 0$ ( $m = 1$ )
5	0,09419	0,12058	0,12066
10	0,06852	0,12058	0,12066
20	0,05480	0,12058	0,12066
Werte nach [2] (N = 10)	–	0,1206	–

Die Aufgabe wurde für symmetrische Randbedingungen an den Schalenrändern betrachtet. Bei symmetrischen Schwingungsformen bezüglich der Ebenen  $z = L/2$  wird nur eine Hälfte der Schale bei folgenden Randbedingungen berechnet

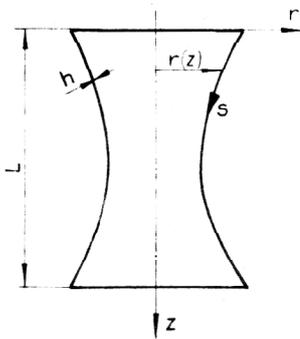
$$z = L/2 : u = 0, \gamma_s = 0, \frac{\partial v}{\partial s} = 0. \quad (40)$$

In Tabelle 1 sind die berechneten Ausdrücke für die Quadrate der niedrigsten Frequenz  $\omega^2$  für die Rotationsschale mit positiver Gaußscher Krümmung in Abhängigkeit von der Anzahl der Finiten Elemente N angeführt. Dabei wurde die Halbe Länge bei gleichmäßiger Vernetzung und verschiedenen Randbedingungen analysiert. Es wurde die Schwingform für  $n = 4$  Umfangswellen betrachtet. Zum Vergleich dienen die Werte in [2]. Diese wurden unter Verwendung eines Finiten Elements dritter Ordnung auf der Basis der Kirchhoff-Loveschen Theorie erhalten. Da die Schale dünn sowie isotrop ist und die untersten Eigenfrequenzen betrachtet wurden, so fallen die Ergebnisse der Timošenko-Theorie und der Kirchhoff-Loveschen Theorie praktisch zusammen.

Die zweite und dritte Variante der Randbedingungen führen ebenfalls zu fast identischen Ergebnissen. Für die erste Variante der Randbedingungen ist nur die Verschiebung in Richtung der Normalen verhindert ( $w = 0$ ) und das Quadrat der untersten Frequenz ist mehr als um das 2fache geringer im Vergleich zu den Randbedingungen bei beschränkten Meridian- und Umfangsverschiebungen. Dabei verändert sich die Schwingungsform für die Verschiebung w im Falle der untersten Frequenz von einer Halbwelle ( $m = 1$ ) entlang des Meridians (Kurve 1 auf Bild 6) auf 3 Halbwellen ( $m = 3$ ) entlang des Meridians (Kurve 2 auf Bild 6). Bei  $m = 1$  wurde Konvergenz be-



**Bild 6**  
Schwingungsformen für die unterste Frequenz einer Schale mit positiver Gaußscher Krümmung



**Bild 7**  
Schale mit negativer Gaußscher Krümmung

reits für eine Vernetzung  $N = 5$  Finite Elemente auf der Halben Länge erzielt. Für die erste Variante der Randbedingungen ( $m = 3$ ) wurde die Konvergenz erst bei einer Einteilung in  $N = 20$  Elemente erzielt.

Das nächste Beispiel ist eine Schale mit negativer Gaußscher Krümmung (Bild 7). Dieses Beispiel ist ebenfalls in [2] enthalten. Folgende Ausgangsdaten (dimensionslose Werte) gelten dafür

$$S = 3, L = 40 \sin 0,075 = 2,997, h = 0,001, \quad (41)$$

$$E = 0,91, \nu = 0,3, \rho = 1.$$

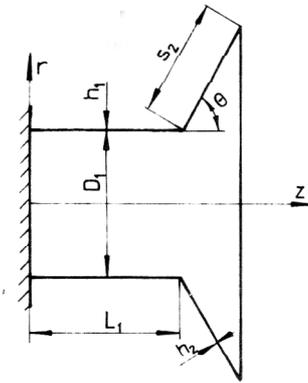
Die Meridianform läßt sich mit folgender Gleichung (dimensionslose Länge) beschreiben:

$$r(z) = 21 - \sqrt{400 - [z + 20 \sin(-0,075)]^2} \quad (42)$$

Da wiederum symmetrische Randbedingungen an den Schalenenden gelten sollen, genügt es, die Aufgabe für eine Schalenhälfte mit den Randbedingungen (40) in der Mitte zu betrachten. In Tabelle 2 sind die Quadrate der untersten Frequenz  $\omega^2$  bei  $n = 4$  Umfangswellen für verschiedene Randbedingungen an den Schalenenden erfaßt. Wie aus den Ergebnissen zu erkennen ist, tritt die geringste Konvergenzgeschwindigkeit auch für diesen Fall bei der ersten Variante der Randbedingungen ( $w = 0$ ) auf, obwohl für die konkave Schale für alle betrachteten Varianten der Randbedingungen die unterste Frequenz der Schwingungsform mit einer Halbwelle in Meridianrichtung ( $m = 1$ ) entspricht. Für die Schale mit negativer Gaußscher Krümmung kann man ein wesentliches Anwachsen der Eigenfrequenz bei Beschränkung der Meridianverschiebungen beobachten (vgl. dritte Variante der Randbedingungen in Tabelle 2). Dieser Effekt wurde auf der Grundlage von analytischen qualitativen Untersuchungen in [1] ebenfalls erhalten.

**Tabelle 2**  
Quadrat der untersten Eigenfrequenz  $\omega^2$  ( $n = 4$ ) für eine Schale mit negativer Gaußscher Krümmung

N	$z = 0, L: w = 0$ ( $m = 1$ )	$z = 0, L: v, w = 0$ ( $m = 1$ )	$z = 0, L: u, v, w = 0$ ( $m = 1$ )
5	$0,2726 \cdot 10^{-2}$	$0,3279 \cdot 10^{-2}$	$1,087 \cdot 10^{-2}$
10	$0,2401 \cdot 10^{-2}$	$0,3313 \cdot 10^{-2}$	$1,089 \cdot 10^{-2}$
20	$0,2247 \cdot 10^{-2}$	$0,3277 \cdot 10^{-2}$	$1,085 \cdot 10^{-2}$
30	$0,2232 \cdot 10^{-2}$	$0,3254 \cdot 10^{-2}$	$1,082 \cdot 10^{-2}$



**Bild 8**  
Zusammengesetzte Schale, bestehend aus Zylinder und Kegel

Das nächste Beispiel ist eine aus Zylinder und Kegel zusammengesetzte Schale (Bild 8). Dieses Beispiel ist in [3] bei folgenden Ausgangsdaten berechnet:

$$\begin{aligned} D_1 &= 0,10775 \text{ m}, L_1 = 0,10320 \text{ m}, h_1 = 0,64 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \\ S_2 &= 0,07097 \text{ m}, h_2 = 0,264 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \Theta = \pi/3, \\ E &= 4,482 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \nu = 0,35, \rho = 1,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Die berechneten Werte für die niedrigste Eigenfrequenz in Hertz ( $f = \omega/2\pi$ ) bei einer Anzahl von  $n = 3$  Umfangswellen und für verschiedene Vernetzungen  $N$  sind in Tabelle 3 angeführt. Dabei wurde eine gleichmäßige Vernetzung in folgender Form vorgenommen: 1/4 der Finiten Elemente sind im Kegel enthalten, 3/4 im Zylinderteil. Außerdem wurden Werte, die aus Rechnungen mit dem Finite-Differenzen-Verfahren (FDM) und dem Experiment stammen, zum Vergleich angeführt. In [3] wurde die Rechnung auf der Grundlage der Kirchhoff-Loveschen Theorie bei unregelmäßiger Elemententeilung durchgeführt. Es ist zu erkennen, daß die Werte, die auf der Grundlage der hier entwickelten Vorgehensweise erhalten wurden, bei einer Einteilung in  $N = 48$  Finite Elemente für die Frequenz  $f = 895,3$  Hz gut mit dem Werte nach der Finiten-Differenzen-Methode ( $f = 897$  Hz) und mit dem experimentell ermittelten Wert ( $f = 886$  Hz) übereinstimmen.

Im nächsten Beispiel werden Schwingungen einer Kreisplatte mit dem Außenradius  $R$  betrachtet. Diese Aufgabe besitzt eine analytische Lösung nach der Timošenko-Theorie [22] und nach der Kirchhoff-Loveschen Theorie [15]. Die Platte wird bei den Randbedingungen „starre Einspannung“ am äußeren Rand und den Symmetriebedingungen im Zentrum betrachtet:

$$r = R: u = v = w = \gamma_s = \gamma_\varphi = \gamma = 0,$$

$$r = 0: u = \gamma_s = 0.$$

Die Lösung bei einer Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$  ist in Abhängigkeit von der relativen Plattendicke in Tabelle 4 angeführt, wobei für die Darstellung die dimensionslose Frequenz  $\lambda$  gewählt wurde

$$\lambda = \omega \sqrt{\frac{\rho h^2}{G}}$$

der Timošenko-Theorie größer (6. Ordnung) als in der Kirchhoff-Loveschen Theorie (4. Ordnung). Jedoch kann der Wert des relativen Fehlers in der Kirchhoff-Loveschen Theorie geringer sein als in der Timošenko-Theorie, da der Faktor  $\lambda_1^2$  im Vergleich zu  $\lambda_1^4$  in den entsprechenden Wert eingeht. Bei hochfrequenten Schwingungen nimmt  $\lambda_1$  zu und folglich wächst auch der Berechnungsfehler bei der Ermittlung der Frequenzen. Entsprechend den mathematischen Abschätzungen nimmt dieser Fehler in der Kirchhoff-Loveschen Theorie langsamer zu. Jedoch taucht die Frage nach der Gültigkeit der Kirchhoff-Loveschen Theorie für den Bereich der hohen Frequenzen auf, da sie falsche Dispersionscharakteristiken (Geschwindigkeit der Wellenausbreitung geht gegen unendlich) bei hohen Frequenzen liefert.

Abschließend sei angemerkt, daß ein Programmpaket ROTCAU zur Lösung verschiedener Aufgaben der Statik, Dynamik und Stabilität für beliebige Rotationsschalen mit Hilfe der FEM erarbeitet wurde. Dieses Programmpaket wurde ebenfalls für geschichtete Rotationsschalen aus kompositen Werkstoffen angewendet. Diesbezüglich löst das Programmpaket ROTCAU analoge Aufgaben wie das Programmpaket FASOR [20].

#### LITERATUR

- [ 1 ] Гольденвейзер, А. Л., Лидский, В. Б., Товстик, П. Е.: Свободные колебания тонких упругих оболочек. — Москва: Наука, 1979. — 383 с.
- [ 2 ] Raju, K. K., Rao, G. V.: Large Amplitude Asymmetric Vibrations of some Thin Shells of Revolution. *Journ. of Sound and Vibration* 90 (1976), 3, 327 — 333.
- [ 3 ] Ross, C. T. F.: Finite Elements for the Vibration of Cones and Cylinders. *Int. Journ. for Numer. Meth. in Engineering* 9 (1975), 833 — 845.
- [ 4 ] Raju, K. K., Hinton, E.: Nonlinear Vibration of Thick Plates using Mindlin Plate Elements. *Int. Journ. for Numer. Meth. in Engineering* 15 (1980), 249 — 257.
- [ 5 ] Han, K. J.; Gould, P. L.: Shells of Revolution with Local Deviations. *Int. Journ. for Numer. Meth. in Engineering* 20 (1984), 305 — 313.
- [ 6 ] Алберг, Дж., Нильсон, Э., Уолш, Дж.: Теория сплайнов и ее приложения. — Москва: Мир, 1972. — 316 с.
- [ 7 ] Naghdi, P. M.: Foundations of Elastic Shell Theory. — In: *Progress in Solid Mechanics*, Amsterdam: North-Holland, 1963. — Vol. IV, Ch. I, p. 1 — 91.
- [ 8 ] Галимов, К. З.: Основы нелинейной теории тонких оболочек. — Казань: Изд. Казанского университета, 1975. — 326 с.
- [ 9 ] Гольденвейзер, А. Л.: Теория упругих тонких оболочек. — Москва: Наука, 1976. — 512 с.
- [ 10 ] Амбарцумян, С. А.: Общая теория анизотропных оболочек. — Москва: Наука, 1974. — 446 с.
- [ 11 ] Зенкевич, О.: Метод конечных элементов в технике. — Москва: Мир, 1975. — 541 с.
- [ 12 ] Zienkiewicz, O. C., Bauer, J., Morgan, K., Onate, E. A.: A Simple and Efficient Element for Axisymmetric Shells. *Int. Journ. for Numer. Meth. in Engineering* 11 (1977) 1545 — 1558.
- [ 13 ] Green, A. E., Zerna, W.: *Theoretical Elasticity*. — Oxford: Clarendon Press, 1968. — 455 p.
- [ 14 ] Rikards, R. B., Goldmanis, M. V.: A Curved Finite Element of Revolution Shells after Timoshenko's Shear Model. *ZAMM* 65 (1985), 9, 427 — 435.
- [ 15 ] Вибрации в технике. Т. I. Колебания линейных систем. Под ред. В. В. Болотина. — Москва: Машиностроение, 1978. — 352 с.
- [ 16 ] Raju, K. K., Rao, G. V.: Axisymmetric Vibrations of Circular Plates Including The Effects of Geometric Nonlinearity, Shear Deformation and Rotary Inertia. *Journ. of Sound and Vibration* 90 (1976), 179 — 184.
- [ 17 ] Zienkiewicz, O. C., Too, J., Taylor, R. L.: Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells. *Int. Journ. for Numer. Meth. in Engineering* 3 (1971), 575 — 586.
- [ 18 ] Стренг, Г., Фикс, Дж.: Теория метода конечных элементов. — Москва: Мир, 1977. — 349 с.
- [ 19 ] Mead, D. J., Markus, S.: Coupled Flexural, Longitudinal and Shear Wave Motion in Two- and Three-Layered Damped Beams. *Journ. of Sound and Vibration* 99 (1985), 4, 501 — 519.
- [ 20 ] Cohen, G. A.: FASOR — A Program of Stress, Buckling and Vibration of Shells of Revolution. — In: *Finite Element Systems*: Editor C. A. Brebbia. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982. — p. 175 — 197.
- [ 21 ] Бате, К., Вилсон, Э.: Численные методы анализа и метод конечных элементов. — Москва: Стройиздат, 1982. — 448 с.
- [ 22 ] Leissa, A. W.: *Vibration of Plates*. — NASA SP — 160. — Washington D. C., 1969, 353 p.