

Ansätze zur Modellierung von Schaumströmungen

V. Schütte, F.-H. Wurm, I. Kosmowski

1. Einleitung

Schaum ist ein Gemisch aus zwei Phasen: der dispersen Gasphase in Form von Blasen und der flüssigen Dispersionsphase in Form der die Blasen umschließenden Lamellen. Eine Klassifizierung von Schäumen erfolgt im allgemeinen nach ihrer Struktur, z. B. als Polyeder- oder Kugelschaum. Die Schaumstruktur ist u. a. von der Schaumerzeugung, dem Einsatz grenzflächenaktiver Substanzen und dem Gasvolumenanteil abhängig. Zu ihrer Charakterisierung dient oft die Schaumstabilität, siehe [1].

Schaum und Strömungen von Schaum treten in vielfältigen Erscheinungsformen in den verschiedenen Bereichen der Volkswirtschaft auf. Schaum ist vor allem in einer Reihe von Prozessen der Verfahrenstechnik, in der Lebensmittelindustrie und in der Brandschutztechnik anzutreffen. Veröffentlichte Arbeiten über Schaum beziehen sich meist auf stoffliche Fragen. Sie beinhalten experimentelle Untersuchungen zu speziellen Problemen der Schaumerzeugung, der Schaumstabilität und der rheologischen Eigenschaften sich langsam bewegendere Schäume. Die Schaumströmung gewinnt insbesondere bei der Erdöl- und Erdgasförderung an Bedeutung.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einige Aspekte des strömungsmechanischen Verhaltens von Schaum zu diskutieren und Möglichkeiten der Modellierung von Schaumströmungen aufzuzeigen. Damit soll ein Beitrag zur Systematik der experimentellen Untersuchung von Schaumströmungen geleistet werden.

2. Der Schaum als heterogenes Medium

Eine rationale Theorie der Schaumströmung hat von der Tatsache auszugehen, daß der Schaum ein heterogenes Medium ist. Damit müssen alle Modelle der klassischen Hydromechanik zur Beschreibung als Einphasenströmung, streng genommen, versagen.

Im Gegensatz zum homogenen Fluid, bei dem auftretende Vermischungsvorgänge unterschiedlicher Phasen auf molekularem Niveau ablaufen, sind beim Schaum die Phasen auf „mechanischem“ bzw. makroskopischem Niveau miteinander vermischt, wobei jede Phase ein endliches Volumen einnimmt.

Daher ist die in der Literatur dominierende Auffassung, nach der die Schaumströmung als rheologische Strömung betrachtet werden kann, prinzipiell in Frage zu stellen. Für diese Annahme erscheint ein Nachweis erforderlich, inwieweit sich die Molekularstrukturen, die durch die Schubspannungsansätze der nichtnewtonschen Flüssigkeiten beschrieben werden, mit den Schaumstrukturen bzw. deren Eigenschaften in Übereinstimmung bringen lassen.

Entsprechend dem gegenwärtigen Stand der Theorie zur heterogenen Strömung muß davon ausgegangen werden, daß alle bisher bekannten allgemeingültigen Gesetzmäßigkeiten nur als Orientierung für die Modellierung der speziellen Strömung dienen können. Die daraus resultierende Notwendigkeit der Aufstellung weitgehend eigenständiger Modelle für die unterschiedlichen heterogenen Strömungen trifft insbesondere für die Schaumströmung zu. Bei den gas- oder feststoffbeladenen Flüssigkeitsströmungen beispielsweise kann von der Bewegung der einzelnen Phasen ausgegangen werden, wobei Wechselwirkungseffekte zu berücksichtigen sind. Die besondere Problematik bei der Modellierung des Schaumes besteht darin, daß die Schaumströmung fast ausschließlich nur von den Wechselwirkungseffekten bestimmt wird. Bei den für Schaum üblichen Gasvolumenanteilen (Gasvolumen zu Gesamtvolumen) von $\epsilon = 0,70 \dots 0,99$ unterscheidet sich die Dichte des Schaumes sowohl von der dispersen Phase als auch von der Dispersionsphase um mehrere Größenordnungen. Daraus resultieren andererseits geringere Unterschiede in den Massenanteilen der Phasen, was zusätzlich zu den Schwierigkeiten bei der Erfassung der Wechselwirkungseffekte weitere Fragen der Mittelwertbildung aufwirft, von deren Beantwortung die Güte des Modells wesentlich abhängen kann.

Als grundlegend für die Modellierung der Schaumströmung ist die Klärung des Zusammenhanges zwischen den wirkenden Spannungen und der Deformationsgeschwindigkeit anzusehen. Da sich die Phasengrenzflächen bei der Bewegung verschieben, ist der daraus resultierende Einfluß für jede Phase in einem zusätzlichen Tensor zu berücksichtigen. Die Größe dieser Deformationsgeschwindigkeitstensoren ist abhängig von den Eigenschaften der Phasengrenzflächen, was entscheidend durch die Größe der Grenzflächenspannung und das Verhalten der Strömung der Flüssigkeit in den Lamellen beeinflusst wird. Zu ihrer Bestimmung sind Verträglichkeitsbedingungen zu formulieren, wobei zu beachten ist, daß sie beim Schaum zeitabhängig sein können. Einfachste Arten von Verträglichkeitsbedingungen sind zum Beispiel die Inkompressibilität einer Phase, das kinematische Gleichgewicht der Phasen, ein gleicher Druck der Phasen, konstanter Gasvolumenanteil, unveränderliche Blasenform.

Im folgenden soll in erster Näherung davon ausgegangen werden, daß sich beide Phasen im kinematischen Gleichgewicht befinden, d. h. gleiche Geschwindigkeit haben, womit stabiler Schaum angenommen werden kann. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß sich der Gasvolumenanteil nicht ändert. Damit wird zunächst die Frage der heterogenen Struktur ausgeklammert und der Schaum als homogenes, inkompressibles, viskoses Fluid angesehen.

Eine derart vereinfachte Betrachtung erscheint sinnvoll, um durch Vergleich mit experimentellen Untersuchungen die Anwendbarkeit von Fließgesetzen nichtnewtonscher Flüssigkeiten auf die Schaumströmung zu überprüfen sowie Möglichkeiten der Maßeinheitenanalyse zur Auswertung empirischer Gesetze zu diskutieren.

3. Der Schaum als homogenes Fluid

Für homogene Fluide gilt die Impulserhaltungsgleichung in der allgemeinen Form:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Entsprechend der gleichen Geschwindigkeit der Phasen sind für v^i die Geschwindigkeitskomponenten des Schaumes und für ρ die Dichte des Schaumes zu setzen, die sich aus den Phasendichten und -volumenanteilen nach der Beziehung

$$\rho = (1 - \epsilon) \rho_F + \epsilon \rho_G \quad (2)$$

ergibt. Bei Vernachlässigung der äußeren Massenkräfte \vec{F} , bei konstanter Dichte ρ_F der Flüssigkeit und konstanter Dichte ρ_G des Gases, was einem unveränderlichen Gasvolumenanteil ϵ entspricht, ist der Gleichung (1) nur noch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla_i v^i = 0 \quad (3)$$

hinzuzufügen. Damit konzentriert sich die Frage auf die möglichen Zusammenhänge zwischen dem Spannungstensor σ^{ij} und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor e^{ij} :

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(e^{ij}). \quad (4)$$

Der Spannungstensor wird in die Anteile zerlegt:

$$\sigma^{ij} = -p \delta^{ij} + \tau^{ij}, \quad (5)$$

wobei p den Druck und τ^{ij} den Schubspannungstensor darstellt. Die verschiedenen Modelle homogener Fluide werden in der Regel festgelegt durch den Zusammenhang von Schubspannungstensor und Deformationsgeschwindigkeitstensor:

$$\tau^{ij} = \tau^{ij}(e^{ij}). \quad (6)$$

Bevor eine konkrete Strömung behandelt wird, sollen kurz einige Aspekte der allgemeinen Modellierungsschritte beleuchtet werden. Die Beziehung (6) gibt die allgemeine Hypothese von Stokes wieder, die besagt, daß die Spannung durch die Deformationsgeschwindigkeit bestimmt wird, wobei unter dem Stokesschen Gesetz meist auch speziell der lineare Zusammenhang

$$\tau^{ij} = K_{kl}^{ij} e^{kl} \quad (7)$$

verstanden wird.

Trotz der Allgemeingültigkeit der Beziehung (6) ist unter dem Aspekt der Anwendung auf Schaum zu beachten, daß dieser Ansatz Grenzen hat. Dem Ansatz liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die örtliche Spannung zu einem gegebenen Zeitpunkt vollständig durch die momentan vorliegende örtliche Deformationsgeschwindigkeit

bestimmt wird. Mit der Relation (6) wird zwar keine Beschränkung in bezug auf die Linearität vorgenommen, jedoch wird angenommen, daß die Deformationen, die in einem beliebigen anderem Ort und (oder) zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt stattfinden, keinen Einfluß haben. Bei der Schaumströmung ist jedoch zu vermuten, daß sowohl die zeitliche als auch die örtlichen Beschränkungen aufgegeben werden müssen. Dies führt wieder auf die Notwendigkeit der Modellierung des Schaumes als heterogenes Medium zurück.

Ein weiterer Aspekt allgemeiner Natur betrifft die Druckdefinition. Bei isotropen Newtonschen Fluiden mit dem Ansatz (7) reduziert sich die Zahl der 81 Viskositätskonstanten K_{kl}^{ij} auf zwei unabhängige Größen, die mit η und λ bezeichnet werden sollen, so daß für den Schubspannungstensor

$$\tau^{ij} = \lambda \delta^{ij} e^{mm} + 2 \eta e^{ij} \quad (8)$$

gilt. Neben der dynamischen Viskosität führt man in der Hydromechanik statt des Koeffizienten λ gewöhnlich die Volumenviskosität $\varphi = \lambda + 2/3 \eta$ ein und setzt diese nach der Stokesschen Bedingung gleich Null, was zum Ansatz

$$\tau^{ij} = 2 \eta \bar{e}^{ij} \quad (9)$$

mit $\bar{e}^{ij} = e^{ij} - 1/3 \delta^{ij} e^{mm}$ ($e^{mm} = \text{div } \vec{v}$) führt und mit der Impulserhaltungsgleichung (1) die Navier-Stokessche Bewegungsgleichung liefert. Gleichgelagerte Annahmen werden bei den nichtlinearen Ansätzen entsprechend der Beziehung (6) gemacht. Verschwindende Volumenviskosität bedeutet, daß der thermodynamische Druck des homogenen Systems nur durch die mechanischen Spannungen bestimmt wird. Auch diese Annahme bleibt in bezug auf den Schaum fraglich. Abschließend soll kurz die Möglichkeit der Beschreibung des Schaumes als homogenes Fluid mit plastischen Eigenschaften erörtert werden. Die plastische Deformation eines Kontinuums hängt von der gesamten Vorgeschichte der Belastung ab. Daher werden in der Plastizitätstheorie die Beziehungen zwischen den Spannungen und Deformationen oftmals über die Deformationsverschiebungen formuliert. Nach der Deformationstheorie von Hencky wird ein Zusammenhang zwischen den Spannungen und der vollständigen Deformation hergestellt. Wird wiederum die Volumenviskosität gleich Null gesetzt, so ergibt sich nach Hencky:

$$\bar{e}^{ij} = H \tau^{ij}. \quad (10)$$

Der Hencky-Parameter H läßt sich durch die äquivalenten Schubspannungen τ_u und Deformationsgeschwindigkeiten e_u ausdrücken:

$$H = \frac{e_u}{2 \tau_u} \quad (11)$$

Dieser Parameter führt mit $\tau_u = \sqrt{\tau^{ij} \tau^{ij}/2}$ und

$e_u = \sqrt{2 \bar{e}^{ij} \bar{e}^{ij}}$ auf den allgemeinen Ansatz:

$$\tau^{ij} = 2 \frac{\tau_u}{e_u} \bar{e}^{ij}. \quad (12)$$

Mit den verschiedenen Ansätzen der Funktion

$$\tau_u = \tau_u(e_u) \quad (13)$$

lassen sich die verschiedenen plastischen Eigenschaften modellieren, wobei mit $\tau_u = 2\eta e_u$ das Newtonsche Fluid als Spezialfall enthalten ist.

Mit dem allgemeinen Ansatz (12) ergibt sich aus der Impulserhaltungsgleichung (1), der Kontinuitätsgleichung (4) und dem Spannungstensor (5) das in Zylinderkoordinaten dargestellte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \\ &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}, \\ & \rho \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \\ &= \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r}; \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sigma_{rr} = -p + 2 \frac{\tau_u}{e_u} \frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2 \frac{\tau_u}{e_u} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right),$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2 \frac{\tau_u}{e_u} \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\tau_u}{e_u} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\varphi}{r} \right),$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\tau_u}{e_u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right),$$

$$\sigma_{\varphi z} = \frac{\tau_u}{e_u} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right),$$

$$e_u =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2}$$

Bei der Rohrströmung reduziert sich das System (14) auf Grund der Symmetriebedingungen zu

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{L} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\tau_u}{e_u} \frac{dv_z}{dr} \right) + \frac{\tau_u}{e_u} \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} = \text{konst.} \quad (16)$$

Sowohl der Schubspannungstensor als auch der Deformationsgeschwindigkeitstensor besitzen jeweils nur eine

unabhängige Komponente (viskosimetrische Strömung). Mit den Bezeichnungen

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\tau \quad \text{und} \quad e_{rz} = e_{zr} = \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\dot{\gamma}}{2} \quad (17)$$

folgen aus der Gleichung (11) die Ausdrücke:

$$\tau_u = \sqrt{(\tau_{rz}^2 + \tau_{zr}^2)}/2 = \tau, \quad e_u = \sqrt{2(e_{rz}^2 + e_{zr}^2)} = \dot{\gamma}.$$

Damit läßt sich die Gleichung reduzieren auf die bekannte Beziehung:

$$\tau = \frac{\Delta p}{L} \frac{r}{2}, \quad (19)$$

deren Gültigkeit unabhängig vom Fließgesetz ist.

4. Die Strömung von Schaum als viskoses Fluid in einem Rohr bei der Erfüllung der Haftbedingung

Unter Beachtung der oben erwähnten Probleme bei der Modellierung der Strömung von Schaum als homogenes viskoses Fluid soll nun auf die wesentlichsten Ansätze für das Fließgesetz $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ eingegangen werden. Dabei soll durch Integration der Gleichung (19) die waagerechte Rohrströmung berechnet werden. Als Vergleich dienen experimentelle Untersuchungen [2], bei denen die Druckverluste in Abhängigkeit vom Volumenstrom und vom Rohrdurchmesser bestimmt wurden. In den Bildern 1 und 2 sind einige dieser Meßergebnisse dargestellt.

Über Untersuchungen zu den rheologischen Eigenschaften von Schaum bei anderen Strömungen ist in den Arbeiten [3] bis [8] berichtet worden. Größtenteils wird idealplastisches oder pseudoplastisches Verhalten konstatiert. In [8] wird bei linearem Ansatz $\tau = \eta \dot{\gamma}$ eine Abhängigkeit der Schaumviskosität von dem Gasvolumenanteil bzw. der Verschäumungszahl VZ (Schaumvolumen zu Schaumbildnervolumen) angegeben:

$$\eta = \eta_{20} VZ^n. \quad (20)$$

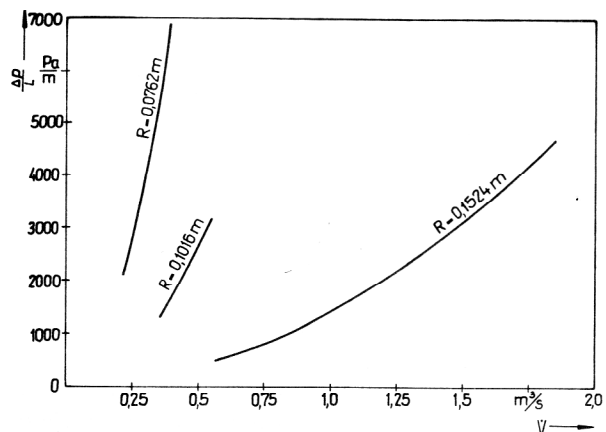


Bild 1
Druckverlustmessungen nach [2]

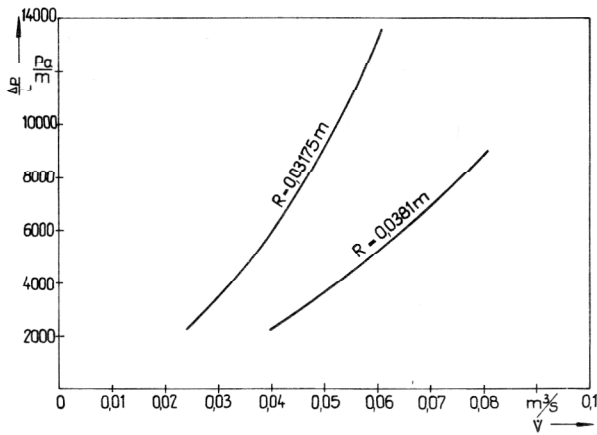


Bild 2
Druckverlustmessungen nach [2]

Hierin bedeutet η_{20} die Viskosität der Flüssigkeit bei 20 °C. Der Exponent n schwankt um Werte nahe Eins, was in [9] zur Berechnung der Schaumströmung in vertikalen Rohren zugrunde gelegt wurde. Eigene experimentelle Untersuchungen [1] führten zu der Auswahl eines modifizierten Ansatzes nach Herschel:

$$\tau = \tau_0 + k \cdot \dot{\gamma}^n \quad (21)$$

Hierin werden τ_0 als Fließgrenze, k als Konsistenzkoeffizient und n als Fließexponent bezeichnet.

Mit den Gleichungen (19) und (21) lautet damit die Aufgabenstellung:

$$\tau_0 + k \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n = \frac{\Delta p}{2L} r \quad \text{für } \tau_0 < \tau \leq \tau_w, \quad (22)$$

$$\frac{dv_z}{dr} = 0 \quad \text{für } \tau \leq \tau_0.$$

Entsprechend der Gleichung (19) wächst der Betrag der Schubspannung linear mit zunehmendem Radius an und erreicht an der Wand den Wert $\tau_w = \Delta p R / 2L$. Mit den Gleichungen (22) folgt, daß sich der Schaum bei $\tau_0 \neq 0$ entlang der Rohrachse wie ein Festkörperstab vom Radius $r_0 = \tau_0 \cdot 2L / \Delta p$ bewegt, wobei die Schubspannung den Wert der Fließgrenze erreicht. Zwischen Stab und Rohrwand fließt der Schaum mit einer scheinbaren Viskosität $(\tau - \tau_0) / \dot{\gamma} = k \dot{\gamma}^{n-1}$. Die Integration der Gleichungen (22) liefert bei Beachtung der Haftbedingung an der Wand für die Geschwindigkeitsverteilung die Beziehungen:

$$v_z(r) = \left(\frac{\Delta p R}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{nR}{1+n} \left[\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1+n}{n}} - \left(\frac{r}{R} - \frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1+n}{n}} \right]$$

für $r_0 < r \leq R$,

$$v_z(r) = v_0 = \left(\frac{\Delta p R}{2kL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{nR}{1+n} \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1+n}{n}} \quad (23)$$

für $r \leq r_0$,

woraus sich für den Volumenstrom die Beziehung ergibt:

$$\frac{4\dot{V}}{\pi R^3} = \frac{1}{k^n} \left(\frac{\Delta p R}{2L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{4n}{1+3n} \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1+n}{n}} \left[1 + \frac{2n}{1+2n} \left(\frac{r_0}{R}\right) + \frac{2n^2}{(1+n)(1+2n)} \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right] \quad (24)$$

Für das Bingham-Medium ($n=1, k=\eta_B$) folgt damit aus der Gleichung (24) die Buckingham-Gleichung:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta_B} \frac{\Delta p}{L} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{R}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right] \quad (25)$$

Für den Potenzansatz nach Ostwald ($\tau_0 = 0$) folgt:

$$\dot{V} = \frac{1}{k^n} \left(\frac{\Delta p R}{2L}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\pi R^3 n}{1+3n} \quad (26)$$

Mit den Gleichungen (25) und (26) lassen sich nun die Meßkurven in den Bildern 1 und 2 auswerten und damit für das Bingham-Medium die scheinbare Viskosität η_B und für die pseudoplastische Flüssigkeit der Konsistenzkoeffizient k und der Fließexponent n bestimmen. Die Auswertung erfolgt jeweils für einen bestimmten Radius und einer repräsentativen Anzahl von Wertepaaren $(\Delta p, \dot{V})$, woraus mittlere Werte für η_B, τ_0, k und n gewonnen werden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 1 zusammengefaßt. Die anschließende Nachrechnung der Kurven $(\Delta p, \dot{V})$ mit den Gleichungen (25) und (26) und den mittleren Werten für η_B, τ_0, k und n ergab für den Ansatz nach Bingham eine mittlere Abweichung von 25 % bei einer maximalen Abweichung von 100 % und beim Ansatz nach Ostwald eine mittlere Abweichung von 5 % bei einer maximalen Abweichung von 20 %.

Gleichzeitig wurden die Kurven in den Bildern 1 und 2 nach der in [9] beschriebenen Methode mit dem Ansatz (20) nachgerechnet, was eine mittlere Abweichung von 21 % und eine maximale Abweichung von 90 % ergab, siehe [1]. Diese Ergebnisse sprechen für eine bessere Eignung des Ostwaldschen Ansatzes und damit ein pseudoplastisches Verhalten des Schaumes. Bei Betrachtung nur eines einzelnen Rohrdurchmessers können die Ergebnisse als durchaus zufriedenstellend betrachtet werden. Auffallend ist jedoch die Abhängigkeit der Indizes vom Radius.

Nach Gleichung (24) bzw. (25) hat der Rohrradius R bei kleinen Fließgrenzen τ_0 nur einen geringen Einfluß auf die Abhängigkeit $(4\dot{V} / \pi R^3)$ von $(\Delta p R / 2L)$. Beim Schubspannungsansatz nach Ostwald müssen die nach der Gleichung (26) ermittelten Kurven für verschiedene Radien sogar zusammenfallen. Tatsächlich ergibt sich

Tabelle 1

R m	k —	n —	τ_0 Pa	η_B Pas
0,1524	$14 \cdot 10^{-4}$	1,96	12,19	0,367
0,1016	$5,41 \cdot 10^{-4}$	1,98	14,22	0,203
0,0762	$14 \cdot 10^{-4}$	1,75	18,48	0,192
0,0381	$1,08 \cdot 10^{-4}$	1,93	—	—
0,03175	$0,855 \cdot 10^{-4}$	1,92	—	—

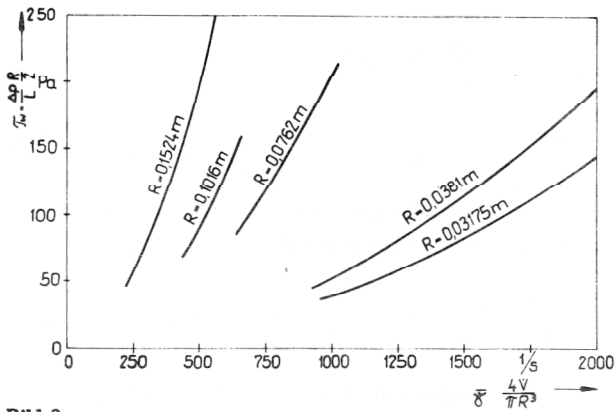


Bild 3
Abhängigkeit der Wandschubspannung von der mittleren Scherung

aber aus den Bildern 1 und 2 eine Abhängigkeit vom Radius, wie das Bild 3 zeigt. Der Widerspruch zwischen den für einzelne Radien erzielten guten Ergebnissen der Nachrechnung mit Hilfe des Ansatzes nach Ostwald und die starke Radiusabhängigkeit der Funktion $(4\dot{V}/\pi R^3)$ von $(\Delta p R/2L)$, die gerade bei diesem Ansatz zu verschwinden hat, ist offensichtlich. Bei Beibehaltung der homogenen Modellvorstellung ergibt sich damit die Frage einer eventuellen Turbulenz der Strömung oder veränderter Randbedingungen an der Wand.

5. Die Strömung von Schaum als viskoses Fluid in einem Rohr mit Wandleitung

Legt man die Viskosität des Wassers zugrunde, so liefern die in den Bildern 1 und 2 dargestellten Strömungen Reynolds-Zahlen im Bereich $5 \cdot 10^5 \lesssim Re \lesssim 6 \cdot 10^6$, was bei der reinen Wasserströmung vollausgebildete Turbulenz bedeutet. Ob nun die Schaumströmung ebenfalls turbulent ist, läßt sich nicht eindeutig beantworten, da bislang keinerlei Untersuchungen zur turbulenten Schaumströmung vorliegen. Offen ist beispielsweise der Charakter einer turbulenten Schaumströmung. Bedingt durch den hohen Gasvolumenanteil sind die Gasblasen relativ kompakt angeordnet und sehr resistent gegenüber Verschiebungen. In der Tat zeigen visuelle Beobachtungen, daß der Schaum sich in der Kernströmung auch bei hohen Geschwindigkeiten schichtenförmig fortbewegt. Gleichzeitig läßt sich an den Rohrwänden ein Flüssigkeitsfilm feststellen, dessen Dicke von der Wandrauigkeit und den Schaumparametern, wie dem Gasvolumenanteil und der Schaumstabilität, abhängt. Teilweise bilden sich an der Wandoberfläche langgezogene Gaspfropfen aus, die sowohl haften als auch gleiten. Hier von ausgehend wäre das Strömungsgebiet entsprechend dem Bild 4 einzuteilen in eine laminare Kernströmung und in eine wandnahe Grenzschicht der Dicke h . In der Kernströmung soll sich der Schaum wie ein homogenes viskoses Fluid bewegen. Die Strömungsvorgänge in der Grenzschicht sind vorerst unbestimmt und müssen zielgerichtet experimentell untersucht werden. Vorstellbar ist, daß die Grenzschicht unter bestimmten Strömungsbedingungen nur aus einem reinen Flüssigkeitsfilm besteht. Anderenfalls könnte sie auch aus einer flüssigen Unterschicht und einer überlagerten Blasen- oder Pfpropfen-

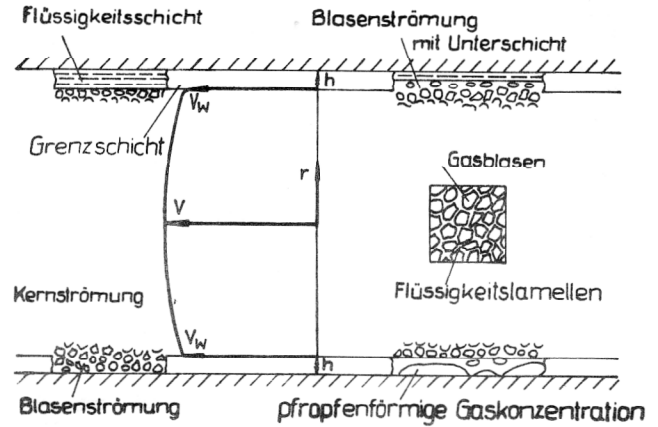


Bild 4
Modelle der Strömung von Schaum im Rohr

strömung bestehen. Hingegen wurden in [10] Grenzschichtströmungen untersucht, bei denen kein Flüssigkeitsfilm existiert. Die Blasen gleiten entlang der Wand. Unter der Grenzschicht der Schaumströmung soll dementsprechend die Strömung im wandnahen Bereich verstanden werden, in der unter dem Wandeinfluß die Struktur des Schaumes zerstört wird. Am äußeren Rand der Grenzschicht liegt eine Geschwindigkeit v_w vor, die sich unter der Annahme einer viskosen Kernströmung von der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} unterscheidet. In diesem Sinne bewegt sich der strukturstable Schaum in der Kernströmung wie ein viskoses Fluid mit Wandleitung.

Im weiteren soll darauf eingegangen werden, wie sich die rheologischen Eigenschaften des in der Kernströmung auftretenden strukturstabilen Schaumes bestimmen lassen.

Unter Berücksichtigung der Gleitbedingung am Grenzschichttrand bei vernachlässigbarer Grenzschichtdicke ergibt sich mit $\dot{\gamma} = -\frac{dv}{dr}$ zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit die Beziehung:

$$\bar{v} = v_w + \frac{1}{R^2} \int_0^R r^2 \dot{\gamma} dr \quad (27)$$

Ausgehend von dem Fließgesetz

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) \quad (28)$$

folgt mit den Ausdrücken

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{L} \frac{R}{2}, \quad \bar{\dot{\gamma}} = \frac{4\bar{v}}{R} = \frac{4\dot{V}}{\pi R^3}, \quad S = \frac{v_w}{\bar{v}}$$

die Beziehung

$$\bar{\dot{\gamma}}(1-S) = \frac{4}{3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \dot{\gamma}(\tau) d\tau \quad (29)$$

Bei gegebenem Fließgesetz gibt die Gleichung (29) eine Beziehung zwischen den leicht meßbaren Größen $\bar{\dot{\gamma}}$ und τ_w an. Ist der Wandschlupf $S = 0$, so muß die mittlere Schergeschwindigkeit $\bar{\dot{\gamma}}$ eine eindeutige Funktion der Wandschubspannung τ_w sein, wie es bereits für den Spezialfall des Potenzansatzes nach Ostwald festgestellt

wurde. Ist $S \neq 0$, so hängt $\bar{\gamma}$ nicht mehr eindeutig von τ_w ab, und es kommt zu einer Verschiebung der Kurven $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\tau_w)$ bzw. $\tau_w = \tau_w(\bar{\gamma})$. Mit dem Bild 3 ist $\bar{\gamma}$ in Abhängigkeit von Δp und R gegeben. Durch Differentiation der Gleichung (29) nach τ_w bei $\Delta p = \text{konst.}$ und bei $R = \text{konst.}$ ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\frac{1}{n} - S \cdot P_n + 3(1 - S) = 4 \frac{\dot{\gamma}_w}{\bar{\gamma}}, \quad (30)$$

$$\frac{1}{m} - S \cdot (P_m - 1) + 3(1 - S) = 4 \frac{\dot{\gamma}_w}{\bar{\gamma}}, \quad (31)$$

mit

$$n = \left. \frac{d \ln \tau_w}{d \ln \bar{\gamma}} \right|_R = \left. \frac{d \ln \tau_w}{d \ln \bar{v}} \right|_R,$$

$$m = \left. \frac{d \ln \tau_w}{d \ln \bar{\gamma}} \right|_{\Delta p} = \left. \frac{d \ln R}{d \ln \bar{\gamma}} \right|_{\Delta p}, \quad (32)$$

$$P_n = \left. \frac{d \ln v_w}{d \ln \tau_w} \right|_R = \left. \frac{d \ln v_w}{d \ln \Delta p} \right|_R,$$

$$P_m = \left. \frac{d \ln v_w}{d \ln \tau_w} \right|_{\Delta p} = \left. \frac{d \ln v_w}{d \ln R} \right|_{\Delta p}.$$

Die beiden Gleichungen nach S umgestellt liefern für den Wandschlupf

$$S = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{P_n - P_m + 1}. \quad (33)$$

Die Auflösung der Gleichungen nach der Schergeschwindigkeit an der Wand ergibt die Beziehung

$$\dot{\gamma}_w = \bar{\gamma} \left[\frac{1 + 3n}{4n} (1 - S) + \frac{S}{4} \left(\frac{1}{n} - P_n \right) \right], \quad (34)$$

die durch Einführung der Gleichung (33) die Form erhält:

$$\dot{\gamma}_w = \bar{\gamma} \left[\frac{1 + 3n}{4n} - \frac{(P_n + 3) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)}{4(P_n - P_m + 1)} \right], \quad (35)$$

woraus sich dann die scheinbare Viskosität η_w berechnen läßt:

$$\eta_w = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w}. \quad (36)$$

Daraus ist zu entnehmen, daß die rheologischen Eigenschaften des strukturstabilen Schaumes in der Kernströmung bei bekannter Gesetzmäßigkeit $v_w = v_w(\Delta p, R)$ durch Auswertung der meßbaren Kurven $\tau_w = \tau_w(\bar{\gamma}, R)$ untersucht werden können. Gleichzeitig folgt aus den Gleichungen (33) bis (35), daß die Wandgeschwindigkeit der Kernströmung v_w , d. h. die Geschwindigkeit am Grenzschichttrand, nicht frei wählbar ist. Dies bedeutet, es existiert ein wechselseitiger Zusammenhang zwischen Kern- und Grenzschichtströmung, der bei der Aufstellung von Beziehungen für v_w zu beachten ist. In der Tat ist zum einen bei waagerechter Strömung zu fordern, daß

$$0 \leq S \leq 1, \quad \dot{\gamma}_w \geq 0. \quad (37)$$

Zum anderen folgt mit der Gleichung (32) und

$$\left. \frac{d \ln S}{d \ln \tau_w} \right|_R = P_n - \frac{1}{n};$$

$$\left. \frac{d \ln S}{d \ln \tau_w} \right|_{\Delta p} = P_m - \frac{1}{m} - 1 \quad (38)$$

aus der Gleichung (33)

$$\Delta p \left. \frac{\partial v_w}{\partial \Delta p} \right|_R - R \left. \frac{\partial v_w}{\partial R} \right|_{\Delta p} + v_w = \bar{v} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right), \quad (39)$$

bzw.

$$\left. \frac{d \ln (1 - S)}{d \ln R} \right|_{\Delta p} - \left. \frac{d \ln (1 - S)}{d \ln \Delta p} \right|_R = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}. \quad (40)$$

Ein einfacher Spezialfall ergibt sich für $S = \text{konst.}$ Dann ist nach der Gleichung (38) $P_n = \frac{1}{n}$ und $P_m = \frac{1}{m} + 1$, so daß entsprechend der Gleichung (33) $S = 1$ sein muß, womit $\dot{\gamma}_w = 0$ wird. Dies entspricht der Bewegung des Schaumes wie ein Festkörper mit Gleitreibung an der Wand, was durch die Strömung in der Grenzschicht bedingt ist. Ist die Grenzschichtströmung homogen, so läßt sich eine Analogie zum Bingham-Medium herstellen.

6. Empirische Beziehungen für die Schaumströmung in einem Rohr

Im Bild 5 sind die den Meßergebnissen aus Bild 1 und 2 entsprechenden Verläufe ($\ln \tau_w, \ln \bar{\gamma}$) für verschiedene Radien dargestellt.

Bild 6 zeigt denselben Zusammenhang bei konstantem Druckverlust. Offensichtlich sind die mit der Gleichung (32) definierten Parameter n und m nahezu konstant. Mit $m = n/(1 - n)$ ergibt sich der Zusammenhang:

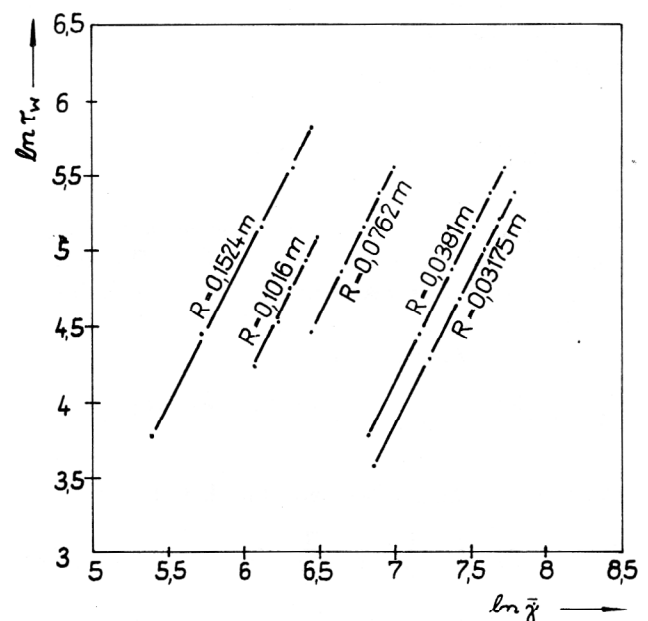


Bild 5
Bestimmung von n nach (32)

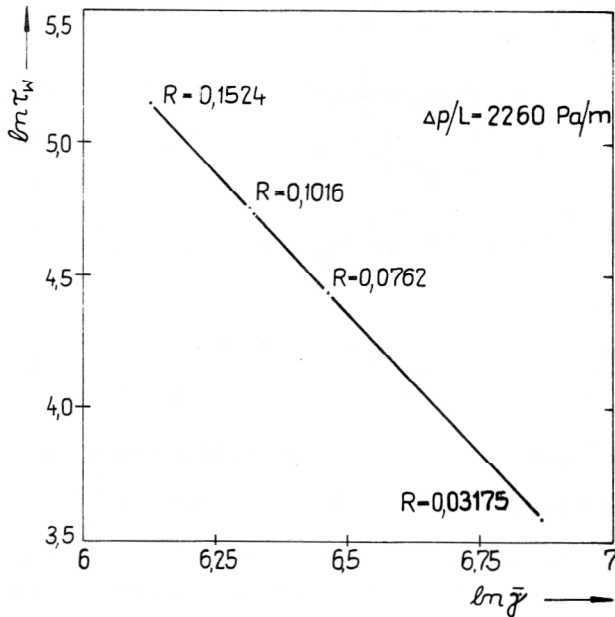


Bild 6
Bestimmung von m nach (32)

$$\tau_w = \bar{\gamma}^n (R \cdot A)^n, \quad (41)$$

wobei $n = 1,92$, $A = 0,21$ sind.

Daraus folgt für die Rohrreibungszahl λ :

$$\lambda = \frac{8 \tau_w}{\rho \bar{v}^2} = \frac{64}{\rho \bar{v}^{2-n} A^{-n} 2^{3-2n}} \quad (42)$$

Die Größe A , für die der Zahlenwert 0,21 ermittelt wurde, ist unabhängig von der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} und dem Radius R , hängt aber von den im Experiment konstant gehaltenen Schaumparametern ab. Diese Abhängigkeit kann nur durch weitere experimentelle Untersuchungen bei veränderlichen Schaumparametern gefunden werden. Dabei sind die Zusammenhänge zu beachten, die sich aus der Maßeinheitenanalyse ergeben. Aus der Gleichung (41) resultiert, daß sich A aus folgender Maßeinheitenkombination zusammensetzt:

$$[A] = [\tau_w]^{\frac{1}{n}} [\bar{\gamma}]^{-1} [R]^{-1} = \text{kg}^{\frac{1}{n}} \cdot \text{m}^{-\frac{1}{n}-1} \cdot \text{s}^{-\frac{2}{n}-1} \quad (43)$$

Wird angenommen, daß die entscheidenden Schaumparameter die Schaumdichte ρ , die Grenzflächenspannung σ und eine charakteristische Länge a , z. B. Durchmesser der Gasblasen oder Dicke der Lamellen, sind, so ergibt sich die Kombination:

$$[A] = [\rho]^{\beta_1} [\sigma]^{\beta_2} [a]^{\beta_3} = \text{kg}^{\beta_1+\beta_2} \cdot \text{m}^{\beta_3-3\beta_1} \cdot \text{s}^{-2\beta_2} \quad (44)$$

Der Vergleich mit der Beziehung (43) liefert:

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}, \quad \beta_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \quad (45)$$

Hieraus folgt für die Größe A :

$$A = \left(B \rho^{\frac{n}{2}} \sigma^{1-\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}-1} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (46)$$

Darin ist die maßeinheitenlose Größe B eine Konstante oder eine Kombination weiterer Einflußgrößen. Wird die Beziehung (46) in den Ausdruck (42) eingesetzt, so ergibt sich für die Rohrreibungszahl:

$$\lambda = B \frac{2^{2n+3}}{\left(\frac{\rho}{\rho_F}\right)^{1-\frac{n}{2}} \text{We}^{1-\frac{n}{2}}} \quad (47)$$

Hierin ist $\text{We} = \bar{v}^2 a \rho_F / \sigma$ die mit der charakteristischen Länge a gebildete Weber-Zahl. Mit den Werten für n zeigt dieses Ergebnis an, daß die Rohrreibungszahl in erster Linie von der Weber-Zahl und dem Gasvolumenanteil bzw. der Verschäumungszahl ($\rho/\rho_F \approx 1 - \epsilon \approx 1/VZ$) abhängt. Je größer die Grenzflächenspannung ist, desto größer ist λ , d. h. desto schlechter sind die Fließeigenschaften.

Wird mit der Rohrreibungszahl

$$\lambda = \frac{64}{\rho 2R\bar{v} \eta_{\text{eff}}} \quad (48)$$

die effektive Viskosität der laminaren Schaumströmung im Rohr definiert, so ergibt der Vergleich der Relationen (47) und (48) die Beziehung für die effektive Viskosität des Schaumes:

$$\eta_{\text{eff}} = \eta_F \left(\frac{\rho}{\rho_F}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot B \cdot 2^{2n-3} \frac{\text{Re}_F}{\text{We}^{1-\frac{n}{2}}} \quad (49)$$

Eine solche Definition kann natürlich nur bedingt die rheologischen Eigenschaften des Schaumes widerspiegeln. Sie wird jedoch in der Praxis angewandt und bestätigt in gewissem Sinne die gebräuchliche Beziehung für die Viskosität eines Gemisches:

$$\eta = (1 - \epsilon) \eta_F + \epsilon \eta_G, \quad (50)$$

zeigt aber auch den Einfluß von Weber-Zahl und Reynolds-Zahl der Flüssigkeit. Endgültige Aussagen können aber nur weitergehende experimentelle Untersuchungen bringen, wofür die durchgeführten Betrachtungen eine Orientierung geben sollen.

Abschließend soll ein einfacher Ansatz für die im Zusammenhang mit der Wandleitung eingeführte Grenzschicht angegeben werden. Wird angenommen, daß die in der Schaumströmung auftretende Grenzschicht aus einem reinen Flüssigkeitsfilm besteht und für die Wandgeschwindigkeit der Kernströmung

$$v_w = \frac{1}{\eta_F} h \tau_w \quad (51)$$

geschrieben werden kann, wobei die Filmdicke als unabhängig von Δp und R betrachtet wird. Dann muß nach der Gleichung (32) $P_n = P_m = 1$ sein. Hieraus folgt mit der Gleichung (33) oder (39) $S = 1$.

Dies bedeutet, der Schaum gleitet entlang des Flüssigkeitsfilmes ohne sich zu deformieren. Damit folgt aus den Gleichungen (51) und (41) mit der Beziehung (46) für die Filmdicke:

$$h = R \frac{We^{1-\frac{n}{2}}}{B \cdot 2^{2n-1} Re_F \left(\frac{\rho}{\rho_F}\right)^{\frac{n}{2}}} \quad (52)$$

Die Dicke des Flüssigkeitsfilmes, der durch das Auslaufen des Schaumes an der rauhen Wand entsteht, ist damit umso größer, je kleiner die Grenzflächenspannung ist.

7. Zusammenfassung

Zur Modellierung von Schaumströmungen sind detaillierte Kenntnisse über die Vorgänge in den Phasen und insbesondere die Wechselwirkungen zwischen den Phasen notwendig. Die Effekte der heterogenen Struktur des Schaumes kommen besonders bei seiner Wechselwirkung mit um- oder durchströmten Körperwänden zum Tragen.

Dies macht bei der Anwendung halbempirischer Methoden die Einführung einer Grenzschichtströmung im wandnahen Bereich notwendig, in der der Schaum seine Struktur verliert bzw. stark verändert. In weiterer Entfernung von der Wand kann der Schaum als homogenes viskoses Fluid mit Gleiteigenschaften in Wandnähe angesehen werden. Derartige halbempirische Ansätze sind durch zielgerichtete experimentelle Untersuchungen zu ergänzen, wobei die aus der Maßeinheitenanalyse erkennbaren Gesetzmäßigkeiten zu beachten sind. Analysen einer gegebenen Schaumströmung in waagerechten Rohren mit größerem Durchmesser zeigen, daß die Fließeigenschaften des Schaumes nicht so sehr von der Viskosität der einen oder der anderen Phase, sondern von den Wechselwirkungen zwischen den Phasen charakterisierenden Größen, wie der Grenzflächenspannung, dem Gasvolumenanteil und der Lamellendicke abhängen.

LITERATUR

- [1] Wurm, F.-H.: Mathematische Modellierung einer Schaumströmung im vertikalen Kanal. Diplomarbeit, TU Magdeburg 1987.
- [2] Foam Extinguishing Systems. National Fire Protection Association, Boston 1978, NFPA-11.
- [3] Sinn, E.: Das Fließverhalten von Gas/Flüssigkeitsdispersionen, insbesondere von Schaum. Dissertation, TH „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg 1970.
- [4] Smith, M. A., Holcomb, D. L.: Foamed Hydrocarbons. Compatible Stimulation and Eleanout Agents. Petrol. Eng. Int. Dallas, 51 (1979) 11, pp. 76 – 86.
- [5] Čarkov, V. P., Šezer, G. M., Bulgakov, U. F., Zasevski, V. P.: Issledovanija reologičeskich svojstv vosdušnomechaničeskoj peny. Gorgučest' vešestv i chimičeskie sredstva požarotušenija, Moskva, VNIPO, 1979, S. 26 – 29.
- [6] Poverchnost'-aktivnije veschestva dlja abrasovanija per, ispolsovannich v nevtegasodobyče. Moskva, Ministerstvo nevtjanaj promyslennosti 1976.
- [7] Volkov, M. P., Malofeev, N. I.: Issledovanie fizičeskich svojstv vosdušno-mechaničeskoj peny. In: Peny, polučenje i primenenie, Moskva, 1974, I, S. 161 – 167.
- [8] Kačulow, A.: Vjaskost' peny. Moskva, VNIPO, 1973.
- [9] Schütte, V.; Hinterland, D.: Schaumströmung in vertikalen Rohren. Wiss. Zeitschrift der TH „Otto von Guericke“ Magdeburg 30 (1986) 7, S. 113 – 115.
- [10] Šarovarnikov, A. F., Reutt, V. C., Kokorew, E. V.: Issledovanie strukturui pograničnovo sloja v pennom potoke. In: Požarnaja tehnika i tušenije požarov, Moskva, VNIPO, 1979, S. 108 – 113.