

Eigenschwingungsanalyse prismatischer Stabschalen mit gemischt offen-geschlossenen Querschnitten

Johannes Altenbach, Frank Schneider, Michael Zwicke

1. Einführung

Im Interesse der Materialökonomie und eines günstigen Masse-Leistungsverhältnisses werden in vielen Bereichen der Technik zunehmend dünnwandige, mehrfach ausgesteifte Konstruktionen eingesetzt. Die Optimierung derartiger Bauteile erfordert genaue Kenntnisse über den Spannungs- und Verformungszustand unter Betriebsbedingungen sowie über das dynamische Verhalten. Mit Hilfe leistungsfähiger numerischer Verfahren, insbesondere der Methode der finiten Elemente (FEM), ist es möglich, die gewünschten Aussagen zu erhalten. Damit ist jedoch wegen der oft komplizierten Struktur ein hoher rechentechnischer Aufwand verbunden.

Im Stadium der Projektierung genügt es dagegen häufig, Voraussagen über das globale Verhalten einer solchen Konstruktion treffen zu können. Für ausgeprägt stabförmige Bauteile dieser Art kann man sich die dazu erforderlichen Kenntnisse in vielen Fällen unter Verwendung von Stabmodellen verschaffen. Die klassischen Stabmodelle nach Bernoulli und Vlasov sind hierzu nur bedingt geeignet, da sie nicht allen bei dünnwandigen Stäben auftretenden Verformungseffekten Rechnung tragen. Daher wurden in den letzten Jahren umfangreiche Untersuchungen zum Einfluß der Querschnittsverwölbung, der Schubverzerrungen der Schalenmittelfläche und der Profilkonturdeformation (vgl. [2]) sowie Vergleiche zwischen den verschiedenen verallgemeinerten Stabmodellen durchgeführt.

Häufig sind in der Praxis – z. B. im Schiffbau – stabförmige Konstruktionen anzutreffen, die aus mehreren Abschnitten mit unterschiedlichen Querschnittsformen bestehen. In einem solchen Fall stößt die Verwendung verallgemeinerter Stabmodelle auf Schwierigkeiten, da der Behandlung von Stäben mit unterschiedlichen Querschnittsformen oft auch unterschiedliche Annahmen über die Verformungskinetik zugrunde liegen. Dies trifft insbesondere auf Konstruktionen zu, die offene und geschlossene Abschnitte aufweisen.

Bei der Eigenschwingungsanalyse von dünnwandigen Bauteilen ist festzustellen, daß unter den zu den niedrigsten Eigenfrequenzen gehörenden Schwingungsformen neben Ganzkörperschwingungen auch ausgeprägte Wandschwingungen, d. h. Schwingungen einzelner Blechfelder, sowie gemischte Formen auftreten können. Für den Ingenieur ergibt sich daraus die Frage, inwieweit solche lokalen Effekte für den Entwurf und die Dimensionierung einer dünnwandigen Konstruktion von Bedeutung sind. Vor allem aber ist es wichtig zu wissen, welche Erscheinungen die verschiedenen möglichen Berechnungsmodelle hinreichend genau wiedergeben können bzw. welche

Einschränkungen für die Anwendbarkeit der einzelnen Modelle zu beachten sind. Diese Problematik steht im Mittelpunkt des vorliegenden Beitrages.

2. Berechnungsmodelle für dünnwandige, stabähnliche Konstruktionen

Es werden dünnwandige, abschnittsweise prismatische Konstruktionen, im folgenden auch als prismatische Stabschalen bezeichnet, betrachtet. Sie bestehen aus ebenen, an den Längskanten im allgemeinen biegesteif verbundenen, rechteckigen Schalenstreifen (Bild 1). Es wird

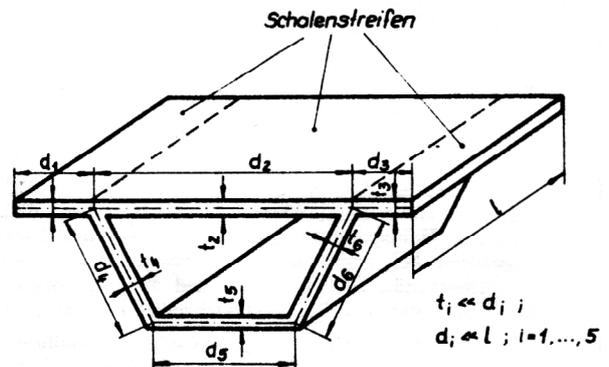


Bild 1
Beispiel einer prismatischen Stabschale

vorausgesetzt, daß alle Annahmen der linearen Elastizitätstheorie gelten, außerdem wird von einem isotropen Materialverhalten ausgegangen. Zur Berechnung derartiger Bauteile sind prinzipiell zwei verschiedene Herangehensweisen denkbar:

- a) die Benutzung eines Stabmodells oder
- b) die Anwendung einer Theorie für dünne Schalen.

Das universelle FEM-Programmsystem COSAR (vgl. z. B. [11]) bietet beide Möglichkeiten, worauf im folgenden eingegangen werden soll.

2.1. Das Stabschalenelement

Es handelt sich um ein quasi-eindimensionales finites Element, welches speziell für die globale statische und dynamische Strukturanalyse dünnwandiger, stabähnlicher Konstruktionen entwickelt wurde. Dieses Element gestattet die Untersuchung aller für die betrachteten Bauformen wesentlichen Erscheinungen (u. a. Querschnittsverwölbung, Profilkonturdeformation, mittragende Breite) und eignet sich sowohl für offene als auch für

geschlossene Querschnitte ([2], [3], [9]). Das ihm zugrundeliegende mechanische Modell verzichtet gegenüber dem vollständigen Scheiben-/Plattenspannungszustand in den Schalenstreifen nur auf die Längsbiegemomente und den Einfluß der Längskrümmungen auf die Querbiegemomente. Diese Vernachlässigung entsprechend der Vlasovschen halbmomentenfreien Schalentheorie ([8]) führt bei dünnwandigen Schalenkonstruktionen mittlerer und großer Länge nur zu geringen Verlusten in der Aussagefähigkeit des Modells. Andererseits wird die Aufstellung der Elementgleichungen erheblich vereinfacht, da eine C^1 -Stetigkeit der Verschiebungen entlang der Stabachse z nicht erforderlich ist. Die Kenntnis dieser Zusammenhänge erweist sich gerade bei dynamischen Untersuchungen als wichtig für die Beurteilung der Ergebnisse.

Das Stabschalenelement unterscheidet sich von den auf den klassischen Theorien beruhenden finiten Balkenelementen vor allem dadurch, daß es wesentlich komplexere Knotenverschiebungsvektoren aufweist. In diesen Vektoren sind die Verschiebungen der sogenannten Profilhaupt- und -nebenknoten enthalten (siehe Bild 2). Der

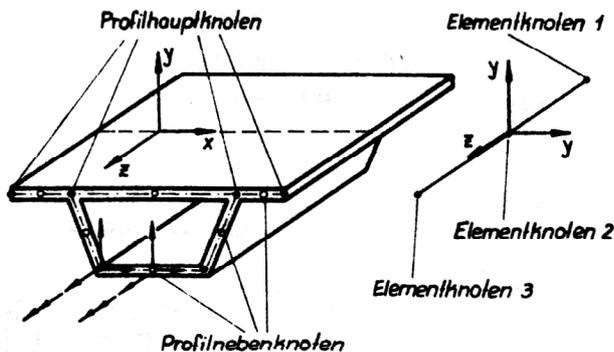


Bild 2
Das Stabschalenelement nach [9]

Elementfreiheitsgrad ist daher abhängig von der Profilform, d. h. von der Anzahl der Profilhaupt- und -nebenknoten. Ferner hat der Nutzer die Möglichkeit, auf den Freiheitsgrad Einfluß zu nehmen. Er kann auf die Berücksichtigung einzelner oder auch aller Profilnebenknotenverschiebungsansätze verzichten und somit die Verformungskinematik des Querschnitts den Belastungen bzw. den zu erwartenden Verformungen anpassen. Die Einführung der Knotenverschiebungsvektoren in dieser Form gestattet eine problemlose Koppelung unterschiedlicher Querschnitte.

Obwohl das mechanische Modell auf einer Theorie für prismatische Stäbe basiert, ist das Stabschalenelement auch zur näherungsweise Berechnung schwach nicht-prismatischer (konischer) Konstruktionen geeignet (vgl. [9]).

2.2. Das Semiloof-Schalenelement

Das Semiloof-Schalenelement ist im Elementkatalog des PS COSAR in Form eines Acht-Knoten-Viereckelementes und eines Sechs-Knoten-Dreieckelementes verfügbar (Bild 3). Es handelt sich um inkompatible finite Ele-

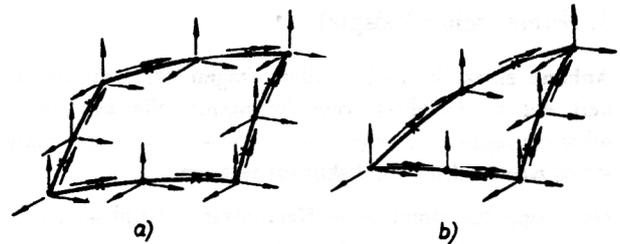


Bild 3
Das Semiloof-Schalenelement
a) Viereckelement
b) Dreieckelement

mente, die insbesondere zur Berechnung dünner, doppelt gekrümmter Schalen geeignet sind (vgl. [13]). Während die Kontinuität der Verschiebungen zweier aneinander grenzender Elemente über die gesamte Kante gewährleistet ist, trifft dies für die Verdrehungen um eine Achse tangential zur Kante im allgemeinen nur an zwei Punkten zu. Die Lage dieser sogenannten Loof-Knoten entspricht der der Gauss-Punkte zweiter Ordnung auf der Kante. Die Verschiebungsvektoren der Elementeckknoten enthalten die Verschiebungen der Knoten in Richtung der Achsen des globalen kartesischen Koordinatensystems. Den Seitenmittenknoten werden außer ihren drei Verschiebungen auch die Verdrehungen der Schalenmittelfläche in den Loof-Knoten zugeordnet. Das Element hat damit den Freiheitsgrad 32 (Viereckelement) bzw. 24 (Dreieckelement). Aufgrund dieser Konfiguration dürfen zwei Elementkanten unter einem beliebigen Winkel zusammenstoßen. Dadurch ist das Semiloof-Schalenelement im Gegensatz zu anderen finiten Schalenelementen auch zur Berechnung der im vorliegenden Beitrag betrachteten Konstruktionen geeignet (vgl. [11], [12]).

2.3. Koppelung von Stabschalenelement und Semiloof-Schalenelement

Das Stabschalenelement wurde für die Strukturanalyse abschnittsweise prismatischer, regelmäßig ausgesteifter Konstruktionen konzipiert. Die Nutzung dieses Elementens bei der Berechnung komplexer dünnwandiger Tragwerke, d. h. die Berücksichtigung von Verzweigungen, diskreten Querversteifungen und Verbindungen von Stabschalen mit anderen dünnwandigen Strukturen, ist nicht ohne besondere Hilfsmittel möglich.

Ein solches Mittel wurde in COSAR mit der Realisierung einer Koppelung zwischen Stabschalenelement und Semiloof-Schalenelementen geschaffen [7]. Durch die Formulierung von Zwangsbedingungen und deren Einarbeitung mit Hilfe der Penalty-Funktion-Methode (siehe dazu [4]) wird auf der Koopelfläche eine punktweise Übereinstimmung der Verschiebungen gewährleistet. Eine Herstellung der Kontinuität der Biegewinkel ist aufgrund der Tatsache, daß das Stabschalenelement auf einer halbmomentenfreien Theorie beruht, nicht sinnvoll.

3. Numerisches Beispiel

Anhand eines Beispiels sollen Fragen der Anwendbarkeit der vorgestellten Berechnungsmodelle zur Eigenkreisfrequenzberechnung von dünnwandigen prismatischen Konstruktionen diskutiert werden.

Der doppelsymmetrische Kastenträger (Bild 4) wurde von Jensen, Pedersen [5] einer numerischen Analyse unterzogen, wobei ausschließlich die Biegedrillschwingungen des nicht gefesselten Systems untersucht wurden. Den Berechnungen lag ein Stabmodell zugrunde, das von einer starren Querschnittskontur und einem linearen Verwölbungsverlauf zwischen den Längskanten sowohl für den offenen als auch die geschlossenen Abschnitte ausgeht. Wegen der unterschiedlichen Verwölbungsfunktion für beide Querschnittsformen mußten zusätzliche Kontinuitätsbedingungen berücksichtigt werden (vgl. [6]). Das Ziel dieser Untersuchungen bestand darin, ein Stabmodell bereitzustellen, welches zur dynamischen Analyse von Schiffskörpern geeignet ist. Wegen der in realen Schiffen vielfach vorhandenen Aussteifungen wurde die Profilkontur im Beispiel als starr idealisiert.

Die in [6] angeführten Ergebnisse konnten durch Nachrechnungen mit den gleichen Modellannahmen bestätigt und ergänzt werden (vgl. [10], siehe Tabelle 1).

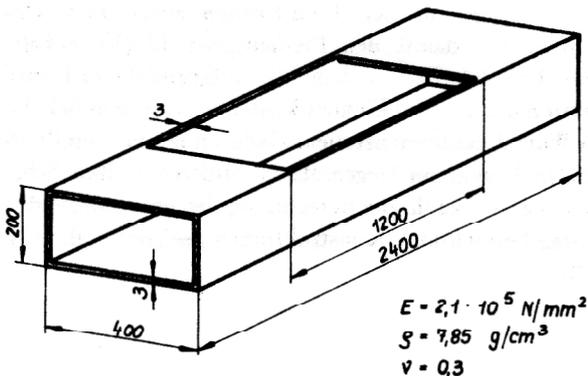


Bild 4
Der offen-geschlossene Kastenträger nach [5/]

Tabelle 1
Eigenkreisfrequenzen für den offen-geschlossenen Kastenträger unter Annahme einer starren Querschnittskontur (Biegedrillschwingungen wurden mit „BD“ gekennzeichnet)

Lfd.Nr.	Modell	Eigenkreisfrequenzen [in s ⁻¹]									
		antimetrische Formen					symmetrische Formen				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	Stabmodell nach [5/]	862,1BD						2359,3BD	3845,3BD		
2	FEM-Formulierung nach [5/]	866,5BD						2376,3BD	3827,1BD		
3	FEM-Lösung nach [10/]	878,7BD	3243,3	5599,3	7878,3	9672,4	1133,2	2411,7BD	3915,7BD	5837,2	6303,7

Das Zulassen der Profilkonturdeformation führte selbst bei Berücksichtigung diskreter starrer Querschotte auf qualitativ neue Resultate. Die Ursache dafür liegt in der extremen Dünnwandigkeit der betrachteten Konstruktion.

Es wurden Berechnungen unter Verwendung von Semi-loof-Schalenelementen und Stabschalenelementen durchgeführt, wobei die Symmetrie des Bauteils ausgenutzt wurde (Bild 5). Durch die Vorgabe entsprechender Randbedingungen für den Symmetrieschnitt konnten bezüglich der Schnittebene symmetrische und antisymmetrische Eigenformen getrennt ermittelt werden. Starre Querschotte wurden durch das Einfügen einzelner Semi-loof-Schalenelemente in die betreffenden Querschnitte realisiert. Im Falle des Stabschalensmodells erfolgte dies mit Hilfe der erwähnten Zwangskoppelung.

Im Interesse der Vergleichbarkeit der Ergebnisse sollten die Schotte den örtlichen Querschnittserhalt garantieren, aber keine weiteren Einflüsse ausüben (z. B. durch den Massezuwachs und eine Behinderung der Verwölbung). Diese Forderung zwang zur Annahme unrealistischer Materialwerte für die Schotte:

Elastizitätsmodul $E = 10^9 \text{ N/mm}^2$
 Dichte $\rho = 0,1 \text{ g/cm}^3$
 Wanddicke $t = 0,1 \text{ mm}$

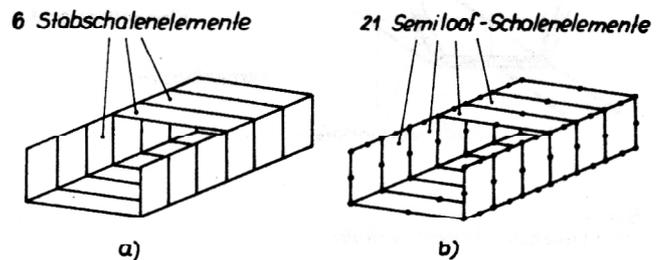


Bild 5
Die Vernetzung des Kastenträgers (unter Ausnutzung der Symmetrie)
 a) Stabschalensmodell
 b) Schalensmodell

Tabelle 2

Eigenkreisfrequenzen für den offen-geschlossenen Kastenträger unter Berücksichtigung der Profilkonturdeformation (Ganzkörperschwingungen wurden mit „G“ gekennzeichnet.)

Lfd.Nr.	Schottanordnung	Modell	Eigenkreisfrequenzen (in s^{-1})									
			antimetrische Formen					symmetrische Formen				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	ohne Schotte	Stabschalenmodell	84,7G	314,9G	320,2	409,3	510,2	213,3	268,6G	336,0	438,7	513,9
2		Schalensmodell	86,7G	337,1G	365,8	382,7	453,8	218,4	277,0G	351,6	375,1	426,5
3	Endschotte	Stabschalenmodell	117,4G	320,2	409,4	533,9	577,7	213,3	311,6	438,8	534,5	550,6
4		Schalensmodell	117,4G	368,7	411,9	484,9	537,8	218,6	320,0	395,2	464,2	474,7
5	Mitten- und Endschotte	Stabschalenmodell	117,4G	320,2	409,4	533,9	577,7	324,9	418,9	533,6	576,9	610,8
6		Schalensmodell	117,5G	368,7	411,9	484,9	537,8	349,5	406,3	451,6	512,6	538,2
7	Mitten-, End- und zusätzliche Schotte an den Übergängen vom offenen zu den geschlossenen Abschnitten	Stabschalenmodell	323,8	409,0	577,6	585,3	666,5	328,0	427,9	576,8	585,3	664,7
8		Schalensmodell	406,7	459,5	482,1	583,3	668,4	369,7	457,8	469,7	525,0	665,3

In Tabelle 2 sind alle mit den vorgestellten Modellen berechneten Eigenkreisfrequenzen, getrennt nach bezüglich des Symmetrieschnittes antimetrischen und symmetrischen Eigenformen, zusammengestellt. Wegen der recht groben Vernetzung ist es nicht sinnvoll, auch höhere Eigenkreisfrequenzen als die angegebenen in die Betrachtungen einzubeziehen.

Die bereits erwähnten qualitativen Unterschiede zu den Ergebnissen aus [5] bzw. [10] ergeben sich daraus, daß nahezu alle Eigenformen mit einer deutlichen Profilkonturdeformation verbunden sind. Daher bewirkt das Einfügen der Endschotte und insbesondere der Schotte an den Übergangstellen vom offenen zu den geschlossenen Abschnitten ein erhebliches Ansteigen der ersten Eigenkreisfrequenz. Diese liegt jedoch in allen Fällen erheblich unter den Werten aus [5] bzw. [10]. Bild 6 vermittelt einen Eindruck von der Vielfalt der auftretenden Schwingungsformen.

Eine gute Übereinstimmung der mit beiden Modellen erzielten Ergebnisse ist – mit Ausnahme der ersten symmetrischen Eigenform der unverschotteten Konstruktion – nur dort zu erkennen, wo es sich um Ganzkörperschwingungen handelt (in Tabelle 2 mit „G“ gekennzeichnet). Das wegen der Halbmomentenfreiheit weichere Stabschalenmodell liefert dabei erwartungsgemäß die kleineren Eigenkreisfrequenzen.

Es ist ferner festzustellen, daß in allen untersuchten Fällen, d. h. unabhängig von der Verschottung, im Bereich ab $\omega = 320 s^{-1}$ unter den zu den angegebenen Eigenkreisfrequenzen gehörenden Formen keine ausgeprägten Ganzkörperschwingungen mehr zu beobachten sind. Dies ist die Grenze für die Vergleichbarkeit der beiden Berechnungsmodelle und gleichzeitig die Grenze für die

Verwendbarkeit des Stabschalenmodells. Zur Illustration des Sachverhaltes soll die zweite antimetrische Eigenform des Systems mit Endschotten dienen. Obwohl die mit beiden Modellen ermittelten Eigenformen einander offensichtlich entsprechen (siehe Bild 6e, f)), differieren die zugehörigen Eigenkreisfrequenzen um etwa 15 %. Eine gegenseitige Zuordnung höherer Eigenformen ist bereits nicht mehr möglich.

Die Ursache dafür liegt darin, daß die Annahme der Halbmomentenfreiheit den tatsächlichen Gegebenheiten nicht mehr gerecht wird. Deutlich wird das angesichts der Tatsache, daß das Stabschalenmodell für unterschiedliche Schottanzahlen zum Teil identische Eigenkreisfrequenzen liefert (siehe Tabelle 2). Die zugehörigen Eigenformen weisen an den Elementgrenzen, insbesondere an den Übergängen vom offenen zu den geschlossenen Abschnitten, ausgeprägte Knicke auf. Diese Erscheinung ist eine Folge der fehlenden C^1 -Stetigkeit und entspricht praktisch der Wirkung einer gelenkigen Verbindung zwischen den Schalenstreifen der aneinandergrenzenden Elemente. Die angegebenen Eigenkreisfrequenzen spiegeln also nicht Eigenschaften des realen Systems, sondern des diskreten mechanischen Modells wider. Eine solche Eigenform ist in Bild 6h dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, daß eine feinere Diskretisierung hierbei keine Abhilfe schafft.

Das Stabschalenelement gestattet die näherungsweise Berücksichtigung der in vielen Konstruktionen vorhandenen, regelmäßig angeordneten Queraussteifungen. Dazu werden deren Steifigkeiten gleichmäßig auf die Längeneinheit verteilt und in dieser Form in die Berechnung der Querschnittswerte einbezogen (vgl. [1]).

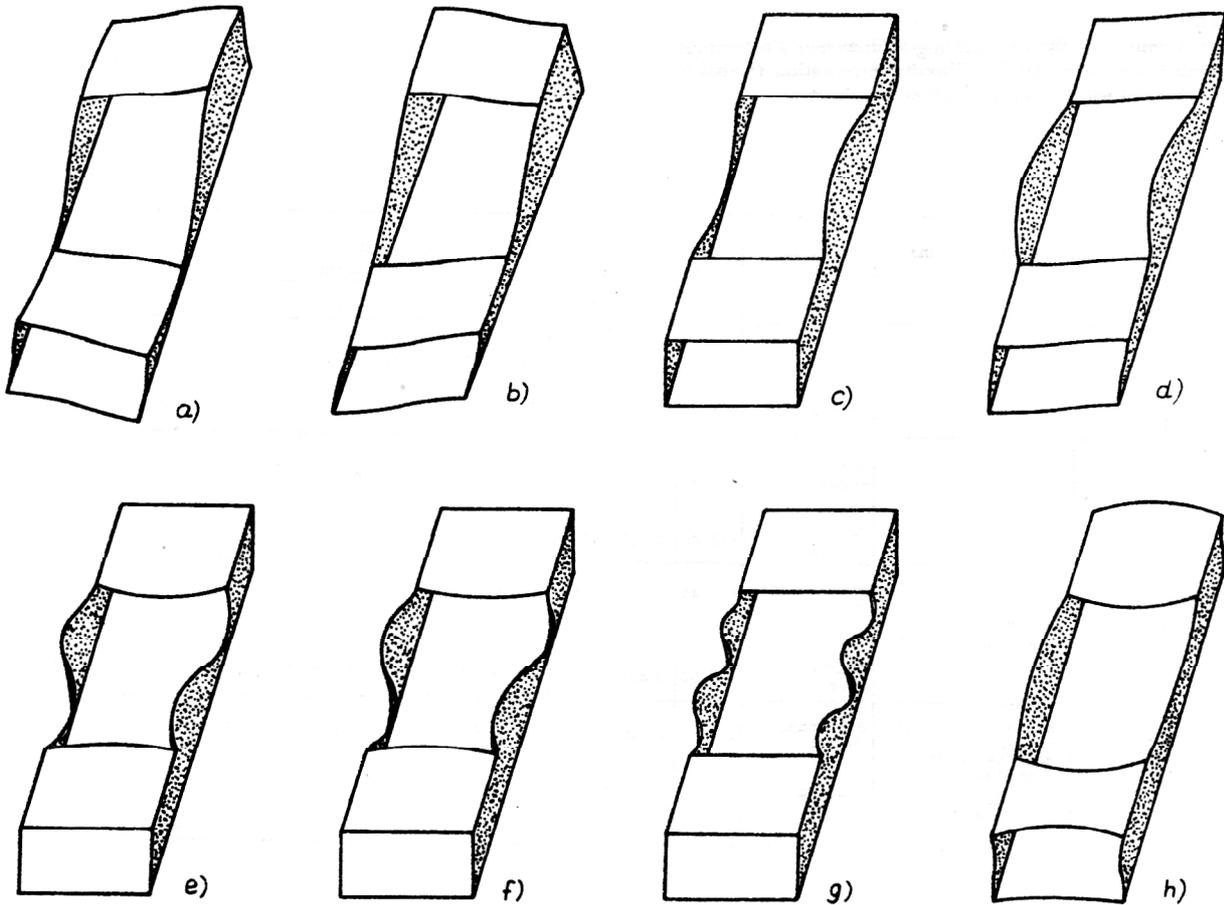


Bild 6

Ausgewählte Eigenformen des offen-geschlossenen Kastenträgers

- a) 1. antimetrische Eigenform des unverschotteten Trägers, Schalenmodell, $\omega = 86,7 \text{ s}^{-1}$
- b) 2. antimetrische Eigenform des unverschotteten Trägers, Schalenmodell, $\omega = 337,1 \text{ s}^{-1}$
- c) 1. symmetrische Eigenform des unverschotteten Trägers, Schalenmodell, $\omega = 218,4 \text{ s}^{-1}$
- d) 2. symmetrische Eigenform des unverschotteten Trägers, Schalenmodell, $\omega = 277,0 \text{ s}^{-1}$

- e) 2. antimetrische Eigenform des Trägers mit Endschotten, Stabschalenmodell, $\omega = 320,2 \text{ s}^{-1}$
- f) 2. antimetrische Eigenform des Trägers mit Endschotten, Schalenmodell, $\omega = 368,7 \text{ s}^{-1}$
- g) 5. antimetrische Eigenform des Trägers mit Endschotten, Stabschalenmodell, $\omega = 577,7 \text{ s}^{-1}$
- h) 5. symmetrische Eigenform des unverschotteten Trägers, Schalenmodell, $\omega = 456,8 \text{ s}^{-1}$

Unter Nutzung dieser Möglichkeiten wurden weitere Beispielrechnungen durchgeführt, wobei das Vorhandensein von Queraussteifungen gemäß Bild 7 angenommen wurde. Der durch die Verrippung verursachte Massezuwachs fand aus Gründen der Vergleichbarkeit der Ergebnisse keine Berücksichtigung.

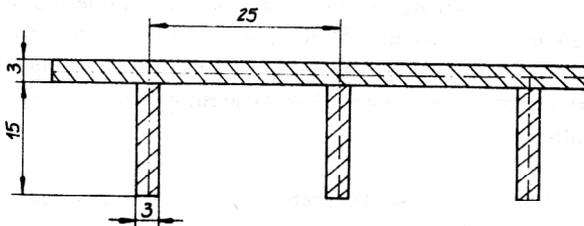


Bild 7

Regelmäßig angeordnete Querversteifungen

Tabelle 3 und Bild 8 zeigen, daß die Erhöhung der Querbiegesteifigkeit einen beträchtlichen Anstieg der niedrigsten Eigenkreisfrequenzen bewirkt, ohne jedoch die Eigenschaften des Berechnungsmodells zu verändern. Auch hier treten wieder starke Plattenschwingungen und gleiche Eigenkreisfrequenzen bei unterschiedlicher Schottanordnung auf.

4. Schlußfolgerungen

In der Literatur sind sehr unterschiedliche verallgemeinerte Stabmodelle für die dynamische Analyse dünnwandiger, stabähnlicher Konstruktionen zu finden. Die Berücksichtigung der Querschnittskonturdeformation führt im Vergleich zu den mit den klassischen Modellen erzielten Ergebnissen häufig zu einer entscheidenden Verbesserung der Aussagequalität (vgl. [3]).

Der Verwendbarkeit verallgemeinerter Stabmodelle sind jedoch konzeptionsbedingt dort Grenzen gesetzt, wo vielfältige lokale Schwingungseffekte auftreten. Das ist insbesondere bei kurzen Stabschalen und bei extrem

Tabelle 3

Eigenfrequenzen für den offen-geschlossenen Kastenträger mit regelmäßig angeordneten Queraussteifungen (Ganzkörperschwingungen wurden mit „G“ gekennzeichnet.)

Lfd.Nr.	Schottanordnung	Modell	Eigenkreisfrequenzen [in s^{-1}]									
			antimetrische Formen					symmetrische Formen				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	ohne Schotte	Stab-schalenmodell	329,4G	1065,9	1179,9	1343,3	1625,2	985,8	1026,5	1113,6	1222,7	1265,9
2	Endschotte	Stab-schalenmodell	469,4G	1065,9	1179,9	1343,4	1639,8	986,0	1063,6	1113,6	1223,4	1266,0
3	Mitten- und Endschotte	Stab-schalenmodell	469,4G	1065,9	1179,9	1343,4	1639,1	1010,5	1069,5	1169,9	1226,7	1356,1
4	Mitten-, End- und zusätzliche Schotte an den Übergängen vom offenen zu den geschlossenen Abschnitten	Stab-schalenmodell	795,3G	1066,0	1180,2	1343,9	1662,1	1010,5	1170,0	1227,0	1356,5	1428,7

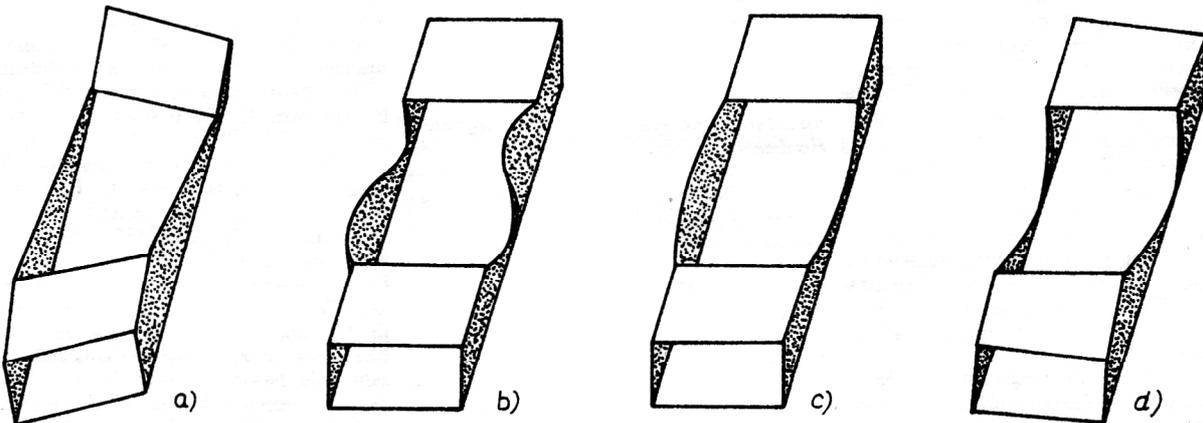


Bild 8

Ausgewählte Eigenformen des unverschotteten offen-geschlossenen Kastenträgers mit regelmäßig angeordneten Queraussteifungen

- a) 1. antimetrische Eigenform $\omega = 329,4 \text{ s}^{-1}$
- b) 2. antimetrische Eigenform, $\omega = 1065,9 \text{ s}^{-1}$
- c) 1. symmetrische Eigenform, $\omega = 985,8 \text{ s}^{-1}$
- d) 2. symmetrische Eigenform, $\omega = 1026,5 \text{ s}^{-1}$

dünnwandigen Konstruktionen der Fall. Je nach Qualität des verwendeten Stabmodells werden diese Erscheinungen überhaupt nicht oder nur unzureichend erfasst. In einem solchen Fall ist die Anwendung eines allgemeineren Berechnungsmodells – im Beispiel also einer vollständigen Schalentheorie – unumgänglich. Daraus ergibt sich, daß die Qualität der Ergebnisse einer dynamischen Analyse mit Hilfe der FEM keineswegs nur von der Diskretisierung abhängt, sondern in entscheidendem Maße vom mechanischen Modell bestimmt wird. Es ist zu erwarten, daß die beschriebenen Effekte in ähnlicher Form auch bei Stabilitätsuntersuchungen an dünnwandigen Strukturen auftreten.

LITERATUR

- [1] Altenbach, J., Kissing, W.: Finite Elemente auf der Grundlage einer verallgemeinerten Vlasovschen halbmomentenfreien Schalentheorie. Technische Mechanik 3 (1982), Heft 3, S. 27 – 48.
- [2] Altenbach, J., Zwicke, M.: Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die statische Strukturanalyse dünnwandiger komplexer Konstruktionen. Technische Mechanik 7 (1986), Heft 3, S. 52 – 64.
- [3] Altenbach, J., Zwicke, M.: Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die Eigenschwingungsanalyse dünnwandiger Konstruktionen. Technische Mechanik 7 (1986), Heft 4, S. 5 – 14.
- [4] Gabbert, U.: Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion-Methode. Technische Mechanik 4 (1983), Heft 2, S. 40 – 45.
- [5] Jensen, J. J., Pedersen, P. T.: Recent advances in beam models used for ship hull vibration analysis. Presented at the International Symposium on Ship Vibrations, Genova, 22 – 24 May 1984.

