

Verbesserte Spannungsanalyse für Rand- und Übergangselemente eines FE-Strukturmodells

Johannes Altenbach, Eckhard Scholz

1. Einleitung

Die Berechnung hinreichend genauer Spannungen bei Finite-Elemente-Modellen auf der Grundlage der Verschiebungsgrößenmethode ist im allgemeinen mit einem sehr viel höheren Aufwand verbunden als die Verschiebungsberechnung. Die Ursache dafür liegt im wesentlichen in der niedrigeren Konvergenzordnung der FE-Approximation der Spannungen gegenüber den Verschiebungen. Insbesondere in Gebieten mit hohen Spannungsgradienten und an Bereichsrändern treten größere Genauigkeitsverluste auf. Aber gerade in diesen Bereichen befinden sich häufig Spannungsspitzen, die für den Ingenieur von besonderem Interesse sind.

Die Genauigkeit der Wiedergabe eines Spannungszustandes ist bei finiten Verschiebungselementen im Element ortsabhängig. Eine Möglichkeit, die Spannungslösung zu verbessern, auf die später noch eingegangen wird, besteht daher in der Suche nach speziellen Elementpunkten, in denen die Spannungen einen höheren Genauigkeitsgrad aufweisen. Mit dieser Problematik beschäftigen sich z. B. die Arbeiten [1] bis [7]. Ein anderer Gedanke geht von der Tatsache aus, daß für das Lösungsverhalten eines FE-Netzes entscheidend ist, ob das Netz entsprechend seiner Geometrie und den Elementabmessungen in der Lage ist, sich dem realen Lösungsverhalten gut anzupassen. In diesem Zusammenhang kommt der Netzverfeinerung lokaler Teilbereiche besondere Bedeutung zu. Lokale Netzverfeinerungen, die sich bei 2D-Modellen mit den vorherrschenden Dreiecks- und Rechteckelementen noch relativ problemlos realisieren lassen, führen jedoch bei 3D-Modellen und bei Verwendung konventioneller Elementformen häufig zu unvermeidbarem Aufwand oder zu starken Distorsionen der Elementform. Daher kommt der Entwicklung spezieller kompatibler Übergangselemente, die problemlos den Übergang von einem auf mehrere Elemente ermöglichen, besondere Bedeutung zu. Detaillierte Ausführungen zur Entwicklung dieser Elemente und ihrer Ansatzfunktionen befinden sich u. a. in den Arbeiten [8] bis [12] und [14]. Eine Möglichkeit der Verbesserung der Spannungslösung speziell an definiert belasteten Bauteiloberflächen ist in [11] und [13] angegeben. Sie geht von dem Gedanken aus, daß bei einer Vielzahl der Probleme der linearen Elastizitätstheorie die Spannungsmaxima an der Bauteiloberfläche auftreten. In den beiden Arbeiten wird die Möglichkeit einer verbesserten Oberflächenspannungsberechnung mit Hilfe fiktiver Randmembranelemente untersucht und getestet. Da sich die drei genannten Möglichkeiten der Lösungsverbesserung (die Suche nach speziellen Elementpunkten; die

Entwicklung spezieller Übergangselemente; die Verwendung fiktiver Randmembranelemente) einander sinnvoll ergänzen können, soll eine gleichzeitige Anwendung dieser Methode untersucht werden. Dies erfolgt am Beispiel von isoparametrischen Verschiebungselementen der Serendipity-Klasse mit quadratischen Randverschiebungsansätzen, ist jedoch auf andere Elementfamilien durchaus übertragbar.

2. Kompatible Übergangselemente zur Erzielung starker lokaler Netzverfeinerungen

Mit der Entwicklung kompatibler Übergangselemente haben sich u. a. die Arbeiten [8] bis [12] sowie [14] und [15] befaßt, so daß an dieser Stelle auf die Entwicklung von Grundlagen verzichtet werden kann. Gegenstand der weiteren Betrachtungen sollen die in [11], [12], [14] und [15] vorgestellten isoparametrischen Verschiebungselemente mit stückweise quadratischen Verschiebungsansätzen auf den Rändern sein, die für die mechanischen Modelle Scheibe, Rotationskörper, dicke Platte, dicke Schale und dreidimensionaler Vollkörper entwickelt wurden. Bild 2.1. zeigt beispielhaft zwei dieser Übergangselemente.

Der Einsatz dieser Elemente in den Problemklassen Elastostatik, Elastodynamik und Temperaturfeldberechnung zur Realisierung starker, lokaler Netzverfeinerungen hat sich im Rahmen der Programmzweige COSAR/E, COSAR/D und COSAR/T des universellen FE-PS-COSAR bewährt [11]. Es wird jetzt untersucht, ob sich der in den Arbeiten [1] bis [7] entwickelte Gedanke von Elementpunkten höherer Genauigkeit auf kompatible

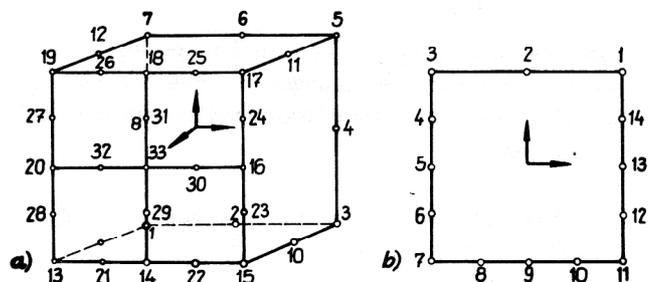


Bild 2.1.
Kompatible Übergangselemente mit stückweise differenzierbaren Randverschiebungsansätzen 2. Ordnung:
a) 3D-Übergangselement HK99 mit einer Netzverdichtungsrichtung
b) 2D-Übergangselement SRK28 mit drei Netzverdichtungsrichtungen

Übergangselemente übertragen läßt. Da Interpolationsfunktionen bezüglich ihrer Ableitungen an den Rändern des Interpolationsgebietes im allgemeinen schlechte Werte liefern, wurde in den genannten Arbeiten nach inneren Punkten gesucht, in denen die Spannungen einen höheren Genauigkeitsgrad aufweisen. Die Elementknotenpunkte sind somit aufgrund ihrer Lage am Rand des Interpolationsgebietes zur Bildung der Verschiebungsableitungen nicht geeignet. Die Angabe der Spannungen in diesen Punkten ist jedoch erstrebenswert, da die „Korrespondenz“ zwischen Nutzer und FE-Modell am einfachsten über diese Punkte stattfindet.

In [4] und [5] wird theoretisch nachgewiesen, daß es im Element Punkte gibt, in denen die Spannungen den gleichen Genauigkeitsgrad aufweisen wie die Knotenverschiebungen, vgl. auch [1]. Ebenfalls wird gezeigt, daß diese Punkte gerade die Stützstellen der Gauß-Integration darstellen, die minimal erforderlich sind, um ein Verschiebungspolynom n-ter Ordnung zu approximieren. Für die bekannten Brickelemente der Serendipity-Klasse mit quadratischem Verschiebungsansatz sind dies die Stützstellen der $2 \times 2 \times 2$ -Gauß-Integration, vgl. dazu [2]. Für eine Ermittlung verbesserter Knotenspannungen werden in [6] verschiedene Extrapolationsalgorithmen mit Stützstellen in den $2 \times 2 \times 2$ -Gauß-Punkten und in den $3 \times 3 \times 3$ -Gauß-Punkten untersucht und die extrapolierten Knotenspannungen den direkt berechneten Knotenspannungswerten gegenübergestellt. Dabei zeigte sich, daß die linearen Extrapolationsformeln mit den $2 \times 2 \times 2$ -Gauß-Punkten als Stützstellen den quadratischen und multilinearen Extrapolationsformeln mit den $3 \times 3 \times 3$ -Gauß-Punkten als Stützstellen überlegen sind und gegenüber den direkt berechneten Knotenspannungen verbesserte Werte ergeben. Deshalb beschränken sich die weiteren Untersuchungen auf diese Stützstellen, deren Lage in einem dreidimensionalen Integrationsgebiet $-1 \leq \xi_i \leq +1$ durch die Gl. (2.1) festgelegt ist

$$\xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Damit ergibt sich die trilineare Extrapolationsformel

$$\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^8 \sigma_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i}) G_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (2.2)$$

wobei die $\sigma_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i})$ die an den jeweiligen Stützstellen berechneten Spannungswerte und die $G_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ trilinearen Extrapolationsansätze entsprechend Gl. (2.3) sind

$$G_i = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{\xi_{1i}} \xi_1\right) \left(1 + \frac{1}{\xi_{2i}} \xi_2\right) \left(1 + \frac{1}{\xi_{3i}} \xi_3\right); \quad (2.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

Für das 2D-Rechteckelement gelten entsprechend die bilineare Extrapolationsgleichung (2.4) und die bilinearen Extrapolationsansätze Gl. (2.5)

$$\sigma(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^4 \sigma_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) G_i(\xi_1, \xi_2); \quad (2.4)$$

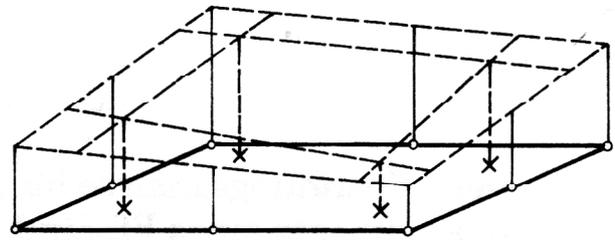


Bild 2.2. Bilineare Spannungsextrapolation für ein Standard-Rechteckelement SRK16:
● Elementknoten, * 2x2 Gaußpunkte

$$G_i = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\xi_{1i}} \xi_1\right) \left(1 + \frac{1}{\xi_{2i}} \xi_2\right) \quad (2.5)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

Bild 2.2. veranschaulicht die lineare Extrapolation anhand eines Standardrechteckelementes.

Der Gültigkeitsbereich der hierzu in den Arbeiten [1] bis [7] gemachten Aussagen erstreckt sich auf die bekannten Standardelemente der Lagrangeschen und der Serendipity-Klasse. Wenn sich auch die in den Arbeiten [11], [12] und [14] beschriebenen kompatiblen Übergangselemente nicht direkt der Serendipity-Klasse zuordnen lassen, so bestehen doch folgende wesentliche Gemeinsamkeiten mit den Serendipity-Elementen 2. Ordnung. Die Ansatzfunktionen sind ausschließlich von Werten der auf den Elementrändern liegenden Knoten abhängig, (vgl. [1]), d. h., es wird auf innere Knoten und knotenlose Variable verzichtet. Die Polynomordnung der Serendipity-Elemente entspricht der Polynomordnung der in Bild 2.3. dargestellten Teilbereiche der Übergangselemente. Dies läßt die Vermutung zu, daß die schon für die numerische Integration erforderlichen Teilbereiche eines Übergangselementes, vgl. [11], bezüglich der Lage der optimalen Punkte für die Spannungsberechnung gleiche Eigenschaften aufweisen, wie ein Serendipity-Element. Bei den verwendeten Polynomansätzen 2. Ordnung werden daher wieder die $2 \times 2 \times 2$ -Gauß-Punkte der Teilbereiche als Stützstellen für eine lineare Spannungsextrapolation, wie es in Bild 2.3. dargestellt ist, gewählt.

Über die Grenzen der Teilbereiche ist dann analog zu Elementgrenzen eine Spannungsmittelung erforderlich. Bild 2.3. zeigt einen möglichen Spannungsverlauf als Ergebnis einer bereichsweisen linearen Spannungsextra-

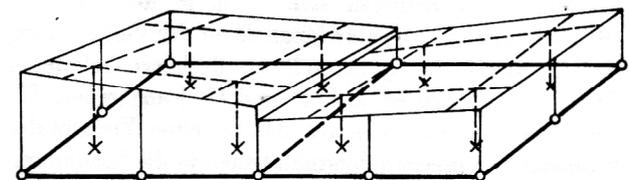


Bild 2.3. Bereichsweise bilineare Spannungsextrapolation für ein Übergangselement SRK20:
● Elementknoten, * 2x2 Gaußpunkte für Teilbereiche

pulation an einem zweidimensionalen Übergangselement. Die Extrapolationsansätze sind mit denen in Gln. (2.4) und (2.5) beschriebenen Ansätzen identisch, die hierbei jedoch nur im entsprechenden Teilbereich des Elementes Gültigkeit besitzen.

Die ausgesprochene Vermutung der Möglichkeit der Übertragung der Extrapolationstechniken für Standard-Serendipity-Elemente auf Übergangselemente soll an einem einfachen Beispiel numerisch überprüft werden. Betrachtet wird eine Kreisringscheibe unter Innendruck. Das mechanische Modell ist in Bild 2.4. dargestellt. Es wurde ein Viertel der Scheibe grob mit nur vier Elementen vernetzt (2 Standard- und 2 Übergangselemente).

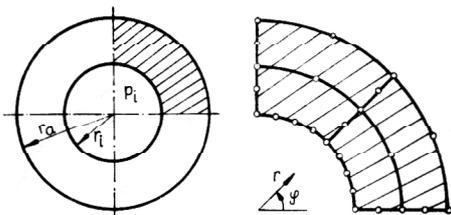


Bild 2.4.
Kreisringscheibe unter Innendruck: $r_i = 50 \text{ mm}$, $r_a = 100 \text{ mm}$,
 $E = 210\,000 \text{ Nmm}^{-2}$, $\nu = 0,3$, $p_i = 200 \text{ Nmm}^{-2}$

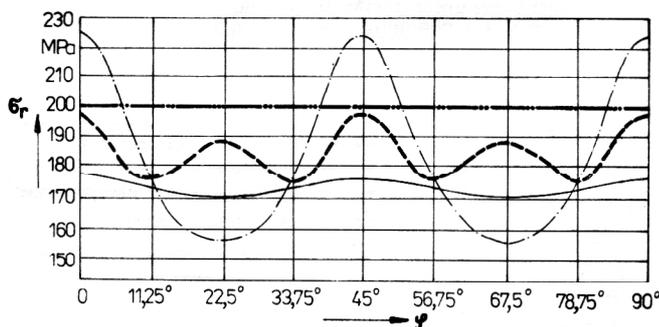


Bild 2.5.
Vergleich der Werte für die Normalspannungskomponente σ_φ (über den Innenrand der Kreisringscheibe aufgetragen):
— konventionell berechnete Knotenspannungswerte
- - - extrapolierte Knotenspannungswerte aus den Werten für die 2×2 Gaußpunkte des Gesamtelementes
- - - extrapolierte Knotenspannungswerte aus den Werten für die 2×2 Gaußpunkte der Teilbereiche
- - - analytische Referenzlösung

Anhand dieses Beispiels wird eine spezielle Anwendungsmöglichkeit der Übergangselemente deutlich. Die beiden Übergangselemente am Innenrand haben hier nicht die Funktion, eine lokale Netzverfeinerung durch den Anschluß kleinerer Nachbarelemente zu ermöglichen, sie dienen lediglich der Knotenverdichtung an der Oberfläche, um eine Erhöhung der Lösungsqualität der Randspannungen zu erzielen. Dies ist besonders in Verbindung mit der Membranspannungsberechnung, auf die im folgenden Abschnitt noch eingegangen wird, interessant. In Bild 2.5. werden die verschiedenen Möglichkeiten der Spannungsberechnung anhand ihrer Fehler

verglichen. Dargestellt ist die maximale Normalspannungskomponente σ_φ , die über den Innenrand aufgetragen ist.

Die Ergebnisse zeigen, daß der Extrapolationsalgorithmus für Standardelemente unter Nichtbeachtung der Teilbereiche eines Übergangselementes Werte liefert, die deutlich schlechter sind als die der direkten Knotenspannungsberechnung. Die Extrapolation unter Beachtung der Teilbereiche zeigt dagegen einen Genauigkeitsgewinn gegenüber den Knotenspannungswerten.

3. Eine Verbesserung der Randspannungsberechnung durch fiktive Randmembranelemente

Der einleitend beschriebene Genauigkeitsverlust bei der Spannungsberechnung wirkt sich an Oberflächen von Strukturen besonders negativ aus, da eine Verbesserung der Spannungslösung in diesen Bereichen schwer zu erzielen ist. Die einfachsten Verfahren einer Verbesserung der Knotenspannungswerte, die Mittelbildung und gewichtete Mittelbildung, vgl. [2], liefern im Innern eines Bauteiles gute Ergebnisse, sind jedoch an Bauteiloberflächen nicht sehr effektiv, da nur entlang der Oberfläche gemittelt werden kann. Aufgrund dieser Problematik wird in [11] und [13] ein Verfahren vorgestellt, welches unter Ausnutzung der statischen Randbedingungen eine verbesserte Normalspannungsberechnung ermöglicht. Das Prinzip der Membranspannungsberechnung soll an dieser Stelle nur kurz beschrieben werden. Aus Zweckmäßigkeitsgründen verwendet man fiktive Randmembranelemente ohne eigene Steifigkeit, die auf die interessierenden Ränder aufgebracht werden können. Die konventionelle Spannungsberechnung für 3D-Vollkörperelemente erfolgt aus den Verschiebungsableitungen entsprechend Gln. (3.1).

$$\sigma_n = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_n + \nu(\epsilon_t + \epsilon_s)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_t + \nu(\epsilon_s + \epsilon_n)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

$$\sigma_s = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_s + \nu(\epsilon_n + \epsilon_t)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

$$\tau_{nt} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{nt}$$

$$\tau_{ns} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ns} \quad (3.1)$$

$$\tau_{st} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{st}$$

Da die senkrecht auf der Oberfläche stehende Spannungskomponente auf den Oberflächen mit statischen Randbedingungen bekannt ist, läßt sich durch Eliminierung von σ_n und Einsetzen der bekannten Größe der Belastung p die Berechnungsvorschrift für die verbleibenden beiden Normalspannungskomponenten ableiten.

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_t + \nu \epsilon_s] + \frac{\nu}{1-\nu} p - \frac{E \alpha T}{1-\nu}$$

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_s + \nu \epsilon_t] + \frac{\nu}{1-\nu} p - \frac{E \alpha T}{1-\nu}$$
(3.2)

Anschaulich betrachtet, wird auf die Verwendung der fehlerhaften Dehnung ϵ_n zugunsten der bekannten statischen Randbedingungen verzichtet. Daß diese Form der Spannungsberechnung verbesserte Werte liefert, konnte in [11] und [13] gezeigt werden.

Da das Randmembranelement ebenfalls ein isoparametrisches Interpolationsgebiet ist, erscheint die Anwendung der in Abschnitt 2. behandelten Gauß-Punktextrapolation auf das Randmembranelement sinnvoll. Bild 3.1. zeigt ein Scheibenelement mit dem zugehörigen Randmembranelement auf dem Rand.

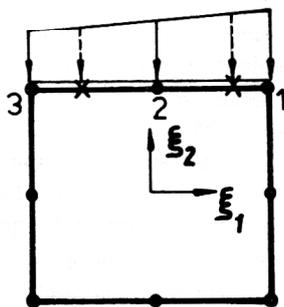


Bild 3.1.
Scheibenelement mit Membranelement auf dem Rand Extrapolation der Membranspannungswerte in den Gaußpunkten * auf die Elementknoten

	Kerbzahl $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$	Abw. in %
analytische Referenzlösung (Neuber)	2,04	0,00
konventionelle Spannungsberechnung	2,098	2,87
Membranspannungsberechnung	2,007	-1,60
Extrapolation d. Membranspannungswerte in den Gaußpunkten	2,027	-0,62

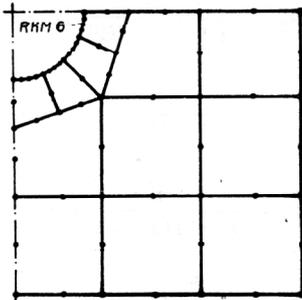


Bild 3.2.
Kugelförmige Kerbe im einachsigen Zugfeld (Leon-Problem): axialsymmetrische Modellierung

Die Spannungsextrapolation reduziert sich dabei um eine Dimension und wird nur entlang des Randes ausgeführt. Als numerisches Beispiel soll das sogenannte Leon-Problem, die kugelförmige Kerbe im einachsigen Zugfeld, vorgestellt werden. Die Vernetzung mit rotationssymmetrischen Elementen ist in Bild 3.2. dargestellt. An diesem Beispiel ist die Doppelfunktion der kompatiblen Übergangselemente sehr anschaulich.

Einmal wird die Netzverfeinerung in Richtung der Kerbe effektiv möglich. Zusätzlich ermöglichen die Übergangselemente an der Kerbe eine Freiheitsgraderhöhung der

Kerboberfläche derart, daß an der Stelle, an der die Kerbzahl berechnet wird, ein sehr kleines Randmembranelement angebracht werden kann. Die berechneten Kerbzahlen, vgl. Bild 3.2., zeigen deutlich den erzielbaren Effekt. Die konventionelle Spannungsberechnung liegt mit einem prozentualen Fehler von +2,87 % deutlich über dem analytischen Wert von Neuber. Die Membranspannungsberechnung am Eckknoten zeigt mit -1,6 % Fehler ein deutlich besseres Fehlverhalten. Die Spannungsberechnung in den zwei Gauß-Punkten des Randmembranelementes und die anschließende Extrapolation auf die Kerbstelle trifft mit -0,62 % Fehler den analytischen Wert am besten.

Als zweites Testbeispiel wird ein Kreisbogenträger unter Querkraftbelastung entsprechend Bild 3.3. untersucht.

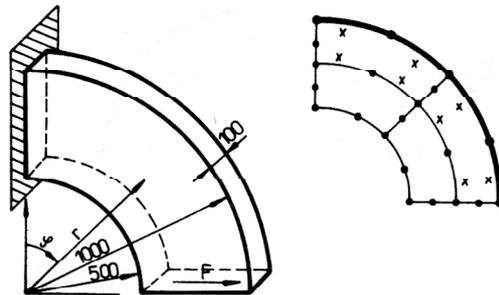


Bild 3.3.
Kreisbogenträger unter Querkraftbelastung:
 $F = 10\,000\text{ N}$, $E = 200\,000\text{ Nmm}^{-2}$, $\nu = 0,3$

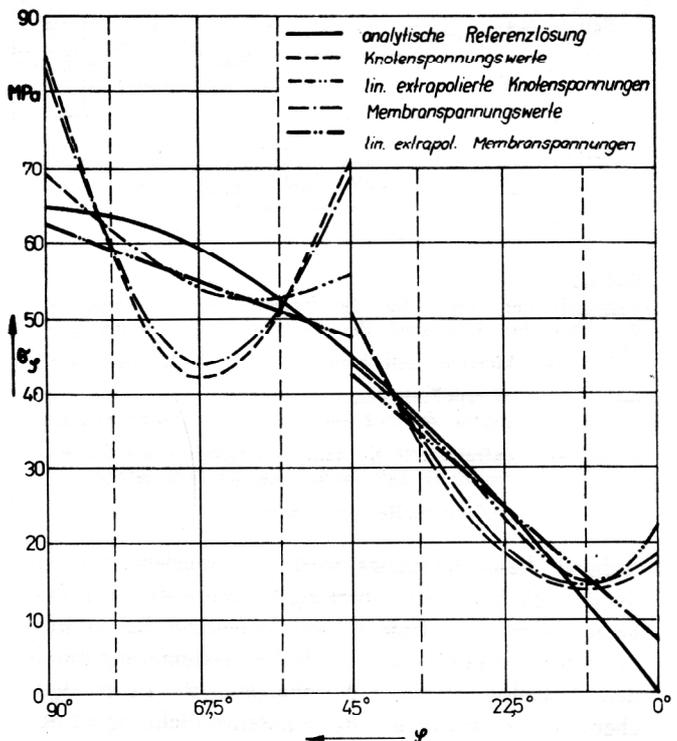


Bild 3.4.
Vergleich der Biegespannung $\sigma_\phi(\phi)$ entlang des Außenrandes $r = 1000$ für direkte und extrapolierte Berechnung der Spannungswerte in den Elementknoten

Die Belastung ist entsprechend der analytischen Referenzlösung als Schubspannung eingetragen.

Die Vernetzung ist relativ grob gewählt. Der stark ausgezogene Außenrand soll die Membranelemente verdeutlichen. In Bild 3.4. ist der berechnete Biegespannungsverlauf $\sigma_\varphi(\varphi)$ entlang des Außenrandes dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die Spannungsberechnung in den Knotenpunkten die schlechtesten Werte liefert.

Die Membranspannungsberechnung in den Knotenpunkten verbessert das Ergebnis bei diesem Beispiel nur geringfügig. Deutlich besser sind die Ergebnisse aus den mit (x) gekennzeichneten Gauß-Punkten. Die besten Ergebnisse liefert jedoch die eindimensionale Extrapolation der auf dem Rand gelegenen Gauß-Punkte der Membranelemente.

4. Zusammenfassung

Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit Möglichkeiten einer lokalen Lösungsverbesserung auf der Grundlage von finiten Verschiebungselementen. Die auf der Grundlage der gemischten Interpolation entwickelten kompatiblen Übergangselemente ermöglichen sowohl starke Netzverfeinerungen als auch Knotenverdichtungen an Gebietsrändern. Der relativ unproblematische Aufbau dieser Elemente gestattet eine problemlose Integration in bereits vorhandene Elementkataloge.

Speziell für die Spannungsberechnung an definiert belasteten Oberflächen von Bauteilen eignet sich die Spannungsberechnung auf der Grundlage fiktiver Randmembranelemente, die unter Einbeziehung bekannter Randbedingungen deutlich bessere Werte liefert. Wie anhand der Testbeispiele deutlich wird, lassen sich beide Verfahren günstig miteinander kombinieren. Ebenso ist eine Spannungsextrapolation mit den Gauß-Punkten als Stützstellen mit beiden Verfahren kombinierbar und erfolgversprechend. Die programmtechnische Erprobung erfolgte im Rahmen des PS COSAR. Eine Übertragung auf andere FE-Programmsysteme ist prinzipiell möglich.

LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- [2] Berger, H.: Beitrag zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage von dreidimensionalen Verschiebungsmodellen. Dissertation A, TH Magdeburg 1982.
- [3] Klöhn, C.: Alternative Spannungsberechnung bei Finite-Element-Verschiebungsmodellen. Dissertation 1982, Universität Hannover.
- [4] Zlamal, M.: Superconvergence and reduced integration in the finite element method, Math. of Comp., Vol. 32 (1978), No 143, S. 663 – 685.
- [5] Zlamal, M.: Superconvergence of the gradient of finite element solutions. Weimar, Berichte des VIII. IKM, WZ HAB 4 (1978), S. 378 – 380.
- [6] Berger, H.; Altenbach, J.: Berechnung verbesserter Spannungswerte für dreidimensionale finite Elemente, Technische Mechanik 5 (1984) Heft 2, S. 28 – 35.
- [7] Berger, H.; Altenbach, J.: Optimale Punkte für die Spannungsberechnung bei finiten 3D-Verschiebungselementen. Technische Mechanik 4 (1983) Heft 3, S. 24 – 32.
- [8] Cavendish, J. C.; Hall, C. A.: A new class of transitional blended finite elements for the analysis of solid structures. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20 (1984), S. 241 – 253.
- [9] Cavendish, J. C.: Local mesh refinements using rectangular blended finite elements. J. Comp. Phys., Vol. 19 (1975), S. 211 – 228.
- [10] Roehr, U.: Lokale finite Elementnetzverfeinerungen bei Platten- und Scheibenaufgaben mittels gemischter Interpolation. Schiffbauforschung 24 (1985), Heft 1, S. 39 – 50.
- [11] Scholz, E.: Kompatible finite Übergangs-, Rand- und Standardstrukturelemente zur effektiven mechanischen Strukturanalyse von Rand- und Übergangsbereichen. TH Magdeburg, Dissertation A 1986.
- [12] Scholz, E.; Altenbach, J.: Kompatible Übergangselemente für lokale Netzverfeinerungen bei 2D- und 3D-Finite-Elemente-Modellen. Technische Mechanik 6 (1985) Heft 2, S. 72 – 78.
- [13] Scholz, E.; Altenbach, J.: Fiktive Randmembranelemente als Grundlage einer verbesserten Spannungsberechnung. Technische Mechanik 6 (1985) Heft 3, S. 36 – 43.
- [14] Altenbach, J.; Scholz, E.: Ableitung von Formfunktionen für finite Standard- und Übergangselemente auf der Grundlage der gemischten Interpolation. Technische Mechanik 8 (1987) Heft 2, S. 18 – 30.
- [15] Altenbach, J.; Scholz, E.: Local mesh refinements and macro transition elements in stress analysis, in Mathematics of Finite Elements and Applications VI., Ed. J. R. Whiteman, Academic Press Inc. Ltd. 1987.