

Die Eigenspannungen in der Umgebung der kaltverfestigten Bohrung bei nichtlinearer Verfestigung

Udo Gamer

1. Einleitung

Unter Kaltverfestigung einer Bohrung versteht man die Erzeugung eines sich auf die Schwingfestigkeit günstig auswirkenden Eigenspannungszustandes in der Umgebung der Bohrung. Diese erfolgt durch Aufweitung der Bohrung mit Hilfe eines Dorns, wobei es zu plastischer Deformation kommt (Bild 1). Nach dem Herausziehen des Dorns verbleibt an der Bohrung eine Druckeigenspannung in Umfangsrichtung, welche die Entstehung und die Ausbreitung von Rissen behindert.

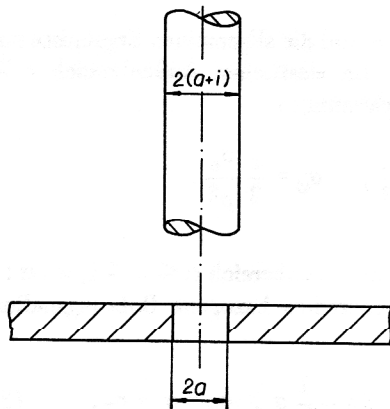


Bild 1
Scheibe und Dorn vor dem Aufweitvorgang

Die theoretischen Untersuchungen der Kaltverfestigung fußen zumeist auf der von Misesschen Fließbedingung und liegen deshalb nur in numerischer Form vor. Einen Literaturüberblick und einen kritischen Vergleich mit eigenen Experimenten bietet [1]. Legt man der mathematischen Beschreibung des Aufweitvorgangs die Trescasche Fließbedingung samt zugeordneter Fließregel zugrunde, dann lassen sich die mit dem Aufweiten verbundenen Spannungen und die nach dem Entfernen des Dorns in der Scheibe zurückbleibenden Eigenspannungen sowohl für idealplastisches Verhalten als auch für einen Werkstoff mit linearer Verfestigung analytisch berechnen [2], [3]. Auch die Berücksichtigung einer beliebigen nichtlinearen isotropen Verfestigung ist nur mit geringem numerischen Aufwand verbunden [4], [5].

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich ebenfalls mit den Spannungen an der kaltverfestigten Bohrung. Sie gründet sich auf dem speziellen Verfestigungsgesetz

$$\sigma_F = \sigma_0 (1 + \eta \epsilon_V^k) \quad (1)$$

Diese Verallgemeinerung der linearen Verfestigung, in welcher σ_0 die ursprüngliche Fließgrenze, ϵ_V die plastische Vergleichsdehnung und σ_F die Fließspannung bedeuten, wird gerne von Experimentatoren verwendet. Die Materialparameter k und η lassen sich unschwer ermitteln, indem man die graphische Darstellung der Messergebnisse auf doppeltlogarithmischem Papier durch eine Gerade annähert [6]. Das Verfestigungsgesetz (1) hat die interessante Eigenschaft, daß es bei rotationssymmetrischen ebenen Problemen zu stetigen Tangenten von Spannungen und Dehnungen führt, wenn der Exponent im Bereich (0; 1) liegt [7]. Dies wird im folgenden gezeigt.

2. Die Anstiege der Spannungen und der Dehnungen an der elastisch-plastischen Grenze

Die Stetigkeit von Radialspannung und Umfangsspannung hat die Stetigkeit des Anstiegs der Radialspannung zur Folge, wie man der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2.1)$$

unmittelbar entnimmt. Eine weitere Folge der Stetigkeit der beiden Spannungen ist die Stetigkeit der elastischen Dehnungen. Da an der elastisch-plastischen Grenze die Verschiebung stetig ist und die plastischen Dehnungsanteile verschwinden, sind dort die gesamten Dehnungen stetig. Wegen

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (2.2)$$

hat somit auch die Verschiebung eine stetige Tangente. Aus der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{d\epsilon_\varphi}{dr} + \frac{\epsilon_\varphi - \epsilon_r}{r} = 0 \quad (2.3)$$

ergibt sich schließlich eine weitere stetige Tangente für die Umfangsdehnung. Im allgemeinen besitzen also die Radialspannung, die Verschiebung und die Umfangsdehnung stetige Anstiege an der elastisch-plastischen Grenze. Bei Zugrundelegung des Verfestigungsgesetzes (1) mit $0 < k < 1$ verlaufen auch die Tangenten der Umfangsspannung, der Radialdehnung und der Axialdehnung stetig.

Wenn es in axialer Richtung nicht zu plastischem Fließen kommt, dann lautet die plastische Vergleichsdehnung

$$E\epsilon_V = -\sigma_F + \frac{\sigma_0}{\rho^2} \quad (2.4)$$

Diese stimmt mit der plastischen Umfangsdehnung überein. $\rho := r/z$ ist der auf die elastisch-plastische Grenze bezogene Radius. Nach (2.4) und (1) ist die Abhängigkeit der plastischen Vergleichsdehnung vom Radius gegeben durch

$$E \epsilon_V + \sigma_0 (1 + \eta \epsilon_V^k) - \frac{\sigma_0}{\rho^2} = 0. \quad (2.5)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach ρ liefert

$$\frac{d\epsilon_V}{d\rho} = - \frac{2\sigma_0}{E + \sigma_0 \eta k \epsilon_V^{k-1}} \frac{1}{\rho^3} = - \frac{2\sigma_0 \epsilon_V^{1-k}}{E \epsilon_V^{1-k} + \sigma_0 \eta k} \frac{1}{\rho^3} \quad (2.6)$$

Für lineare Verfestigung, $k = 1$, findet man

$$\frac{d\epsilon_V}{d\rho} = - \frac{2\sigma_0}{E + \sigma_0 \eta} \frac{1}{\rho^3}, \quad (2.7)$$

und für idealplastisches Verhalten, $\eta = 0$, ergibt sich

$$\frac{d\epsilon_V}{d\rho} = - \frac{2\sigma_0}{E} \frac{1}{\rho^3}. \quad (2.8)$$

Unter Verwendung dieser Anstiege erhält man die Neigungen der zugehörigen Fließspannungen. Allgemein gilt

$$\frac{d\sigma_F}{d\rho} = - \frac{2\sigma_0^2 \eta k \epsilon_V^{k-1}}{E + \sigma_0 \eta k \epsilon_V^{k-1}} \frac{1}{\rho^3} = - \frac{2\sigma_0^2 \eta k}{E \epsilon_V^{1-k} + \sigma_0 \eta k} \frac{1}{\rho^3}. \quad (2.9)$$

Für lineare Verfestigung und idealplastisches Material folgt daraus

$$\frac{d\sigma_F}{d\rho} = - \frac{2\sigma_0^2 \eta}{E + \sigma_0 \eta} \frac{1}{\rho^3}, \quad \frac{d\sigma_F}{d\rho} = 0. \quad (2.10), (2.11)$$

An der Bereichsgrenze $\rho = 1$ verschwindet die plastische Dehnung. Für $k > 1$ ergeben sich dort die Anstiege

$$\frac{d\epsilon_V}{d\rho} = - \frac{2\sigma_0}{E}, \quad \frac{d\sigma_F}{d\rho} = 0 \quad (2.12), (2.13)$$

wie beim idealplastischen Material. Für $k < 1$ findet man

$$\frac{d\epsilon_V}{d\rho} = 0, \quad \frac{d\sigma_F}{d\rho} = - 2\sigma_0. \quad (2.14), (2.15)$$

Die Steigungen der plastischen Vergleichsdehnung und der Fließspannung an der elastisch-plastischen Grenze hängen also unstetig von den Materialparametern k und η ab.

Aus dem im Falle $k < 1$ an der Stelle $\rho = 1$ auftretenden Verschwinden des Anstiegs der plastischen Vergleichsdehnung folgt die Stetigkeit des Anstiegs der Umfangsspannung. Man bestätigt dies durch Untersuchung der Vergleichsspannung im elastischen Bereich,

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{\sigma_0}{\rho^2} \quad (2.16)$$

(vgl. (3.1) und (3.2)). Sie hat an der Bereichsgrenze die Steigung

$$\frac{d}{d\rho} (\sigma_\varphi - \sigma_r) = - 2\sigma_0 \quad (2.17)$$

wie die Fließspannung im angrenzenden plastischen Bereich. Wegen des stetigen Anstiegs der Radialspannung verläuft auch die Umfangsspannung mit stetiger Tangente und ebenso die Dehnungen in radialer und in axialer Richtung.

3. Die Spannungen nach Einführen des Dorns

Im folgenden sind die allgemeinen Ergebnisse zusammengestellt [4]. Im elastischen Außenbereich $\rho \geq 1$ herrschen die Spannungen

$$\sigma_r = - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\rho^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\rho^2}. \quad (3.1), (3.2)$$

Im plastischen Innenbereich $\alpha \leq \rho \leq 1$, wo $\alpha := a/z$ der auf den Grenzradius bezogene Bohrungsradius ist, gilt

$$\sigma_r = - \int \frac{\sigma_F}{\rho} d\rho - \frac{1}{2} \sigma_0, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + \sigma_F. \quad (3.3), (3.4)$$

Die Radialspannung erhält man mit Hilfe der Fließbedingung (3.4) durch Integration der Gleichgewichtsbedingung (2.1). Die dabei benötigte Abhängigkeit der Fließspannung vom Radius muß i. a. numerisch durch Elimination der plastischen Vergleichsdehnung aus dem Verfestigungsgesetz (1) mit Hilfe von (2.4) berechnet werden. Durch

$$p = \int \frac{\sigma_F}{\rho} d\rho + \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (3.5)$$

und

$$\frac{Ei}{\sigma_0 a} = \frac{1}{\alpha^2} - [1 - \nu - (1 - \nu_D) \frac{E}{E_D}] \frac{p}{\sigma_0} \quad (3.6)$$

ist die Parameterdarstellung der Abhängigkeit des an der Bohrung angreifenden Drucks vom Dornübermaß i gegeben; der Index D bezieht sich auf den Dorn. $1/\alpha$ läßt sich als auf den Bohrungsradius bezogene Eindringtiefe des plastischen Bereichs deuten.

Wenn an einer Stelle $r = y > a$ die Umfangsspannung verschwindet und der Anstieg $d\sigma_\varphi/d\rho$ dort positiv ist, dann gelten die Spannungen (3.3) und (3.4) nur im Bereich $y/z \leq \rho \leq 1$. In diesem Falle liegt ein überkritisches Dornübermaß vor. Für Werkstoffe mit linearer Verfestigung wurden die Spannungen im Bereich $\alpha \leq \rho \leq y/z$ untersucht [8], [9].

4. Die Spannungen im plastischen Bereich bei spezieller Verfestigung

Die Spannungen im plastischen Bereich werden nun ermittelt für das Verfestigungsgesetz (1) mit dem Exponenten $k = 1/2$. Zuerst berechnet man die Abhängigkeit der Fließspannung vom Radius,

$$\bar{\sigma}_F = 1 - \frac{H^2}{2} + H \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - L^2} \quad (4.1)$$

mit $\bar{\sigma}_{ij} := \sigma_{ij}/\sigma_0$, $H := \eta \sqrt{\sigma_0/E}$ und $L^2 := 1 - H^2/4$. Weiter unten wird $P^2 := -L^2$ benötigt.

Für $H < 2$ oder $L > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = & \left(1 - \frac{H^2}{2}\right) \log \rho - H \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - L^2} - H L \arcsin(L\rho) + \\ & + H L \arcsin L + \frac{1}{2} (H^2 - 1), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \left(1 - \frac{H^2}{2}\right) \log \rho - H L \arcsin(L\rho) + H L \arcsin L + \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

Zu $H = 2$ gehören die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = -\log \rho - \frac{2}{\rho} + \frac{3}{2}, \quad \bar{\sigma}_\varphi = -\log \rho + \frac{1}{2}. \quad (4.4), (4.5)$$

Für $H > 2$ oder $P > 0$ findet man schließlich

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = & \left(1 - \frac{H^2}{2}\right) \log \rho - H \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + P^2} \\ & + H P \log \frac{P\rho + \sqrt{1 + P^2 \rho^2}}{P + \frac{H}{2}} + \frac{1}{2} (H^2 - 1), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \left(1 - \frac{H^2}{2}\right) \log \rho + H P \log \frac{P\rho + \sqrt{1 + P^2 \rho^2}}{P + \frac{H}{2}} + \frac{1}{2}. \quad (4.7)$$

5. Numerische Ergebnisse

Es stellt sich die Frage, für welche Parameter H ein kritisches Übermaß existiert. Aus der Ableitung $d\bar{\sigma}_\varphi/d\rho$ nach (4.3) findet man ein Extremum an der Stelle

$$\rho^* = \frac{1}{L} \left(1 - \frac{H^2}{2}\right). \quad (5.1)$$

Bei diesem handelt es sich um ein Maximum der Größe

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varphi^{\max} = & \left(1 - \frac{H^2}{2}\right) \log \left[\frac{1}{L} \left(1 - \frac{H^2}{2}\right)\right] - H L \arcsin \left(1 - \frac{H^2}{2}\right) + \\ & + H L \arcsin L + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Bei $H = \sqrt{2}$ ergibt sich an der Stelle $\rho^* = 0$ das Maximum

$$\bar{\sigma}_\varphi^{\max} = 1.29.$$

Für $H > \sqrt{2}$ besteht kein Extremum; für $H < \sqrt{2}$ hat die Funktion (4.3) ein Extremum und eine Nullstelle (Bild 2). Wegen der Linearisierung ist jedoch die hier ge-

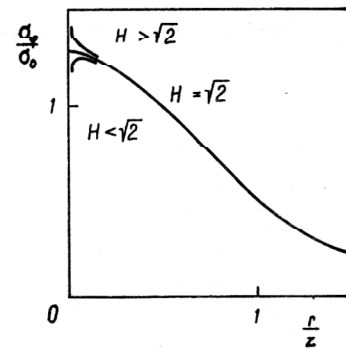


Bild 2

Einfluß des Verfestigungsparameters auf den Verlauf der Umfangsspannung

botene Theorie nicht bei beliebig kleinen Radien ρ gültig; entscheidend für die Anwendbarkeit der Ergebnisse ist die Größe der Dehnungen. Zu $H = 0.5$ beispielsweise gehört die (reziproke) kritische Eindringtiefe $a/z = 0.325$ und der kritische Druck $p/\sigma_0 = 2.33$ (Bilder 3 und 4). Nach

$$\frac{E}{\sigma_0} \epsilon_r = (1-\nu) \bar{\sigma}_\varphi - \frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{E}{\sigma_0} \epsilon_\varphi = (1-\nu) \bar{\sigma}_r + \frac{1}{\rho^2} \quad (5.3)$$

treten dabei am Rande der Bohrung die Gesamtdehnungen $E\epsilon_r/\sigma_0 = -9.46$ und $E\epsilon_\varphi/\sigma_0 = 7.90$ auf. Bei größeren Verfestigungen muß der kritische Fall, wenn ein solcher existiert, mit Hilfe einer geometrisch nichtlinearen Theorie untersucht werden.

Die nach (4.2) bis (4.7) berechneten Spannungen sind über $\log \rho$ aufgetragen. Bild 3 zeigt die Radialspannung und Bild 4 die Umfangsspannung. Für $H = 0$ hat die (reziproke) kritische Eindringtiefe den Wert $a/z = 1/\sqrt{e} = 0.607$. Diese Eindringtiefe wird vom kritischen Druck $p/\sigma_0 = 1$ erzeugt.

$H \rightarrow \infty$ entspricht dem elastischen Verhalten, und zwar bei beliebigen endlichen Exponenten k . Man zeigt dies mit Hilfe von (2.5). Nach Umformung kommt daraus

$$\epsilon_V^k = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 - \frac{E}{\sigma_0} \epsilon_V\right). \quad (5.5)$$

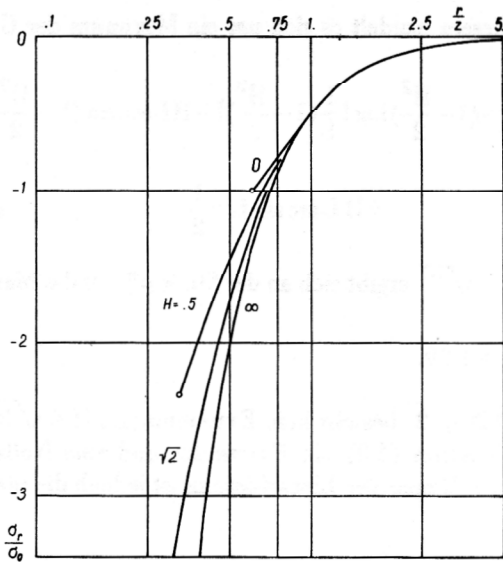


Bild 3
Radialspannung σ_r/σ_0 als Funktion von r/z mit H als Scharparameter

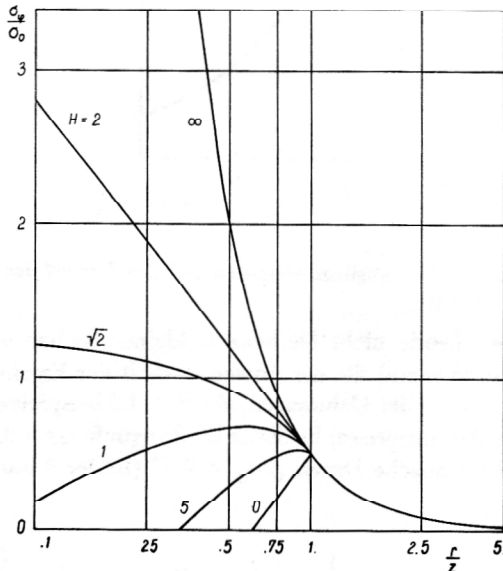


Bild 4
Umfangsspannung σ_ϕ/σ_0 als Funktion von r/z mit H als Scharparameter

Für $n \rightarrow \infty$ verschwindet die plastische Dehnung; der Werkstoff verhält sich elastisch.

Auf Bild 5 sind die Spannungen und die nach dem Entfernen des Dorns in der Scheibe verbleibenden Eigenspannungen als Funktion von r/a für den Verfestigungsparameter $H = 0.75$ und die (reziproke) Eindringtiefe $a/z = 0.5$ dargestellt. Nach (4.2) greift an der Bohrung der Druck $p/\sigma_0 = 1.56$ an. Für $\nu = \nu_D = 1/3$ und $E/E_D = 1/3$ benötigt man nach (3.6) zur Erzeugung dieses Drucks das Obermaß $Ei/(\sigma_0 a) = 3.31$.

Bei der Entlastung, also beim Herausziehen des Dorns, kommt es nicht zu sekundärem Fließen. In diesem Fall erhält man bekanntlich die Restspannungen σ_{ij}^0 durch Subtraktion des fiktiven elastischen Spannungszustandes, der durch den Druck p an der Bohrung hervorgeru-

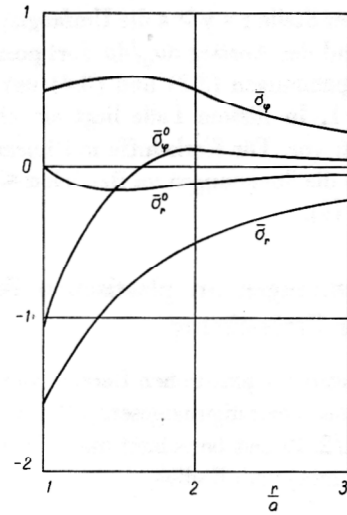


Bild 5
Spannungen unter Last und Eigenspannungen als Funktion von r/a für $H = 0.75$ und $a/z = 0.5$

fen wird, von den Spannungen unter Last (L), also bei eingeführtem Dorn,

$$\sigma_r^0 = \sigma_r^L + p \frac{a^2}{r^2}, \quad \sigma_\phi^0 = \sigma_\phi^L - p \frac{a^2}{r^2}. \quad (5.6), (5.7)$$

Selbstverständlich besitzen auch die Restspannungen stetige Tangenten.

LITERATUR

- [1] Sharpe, W. N. Jr.: Residual strains around coldworked fastener holes. *Journal of Engineering Materials and Technology* 100 (1978) No. 7, pp. 310 – 312.
- [2] Gamer, U.: Die Restspannungen in der Umgebung der kaltverfestigten Bohrung. *Forsch. Ing.-Wes.* 53 (1987).
- [3] Gamer, U.: Die Erzeugung der Eigenspannungen an der kaltverfestigten Bohrung. *Forsch. Ing.-Wes.* 53 (1987).
- [4] Gamer, U.: Residual stress around coldworked holes for nonlinear hardening. (submitted for publication).
- [5] Gamer, U.: Die Eigenspannungen in der Umgebung der kaltverfestigten Bohrung. *ZAMM* 68 (1988).
- [6] Rees, D. W. A.: An experimental appraisal of the equi-strain multi-surface hardening model. *Acta Mechanica* (in print).
- [7] Gamer, U.: The effect of a special hardening law on continuity in elastic-plastic problems with rotational symmetry. (submitted for publication).
- [8] Gamer, U.: Die Eigenspannungen an der kaltverfestigten Bohrung bei überkritischem Dornübermaß. *Technische Mechanik* 8 (1987), 3.
- [9] Gamer, U.: Die elastisch-plastische Scheibe mit druckbelasteter Bohrung: (zur Veröffentlichung eingereicht).