

Ein numerisches Verfahren zur Ermittlung elastischer Charakteristika von zylindrischen Paneelen aus hochelastischem Material

Teil I: Theoretische Grundlagen

Sergej Anatol'evič Gluchich

1. Einführung

Gummi findet aufgrund seiner spezifischen Eigenschaften (Inkompressibilität, das Vermögen zu großen elastischen Deformationen u. a.) verschiedene Anwendungen in der Technik. Die vorliegende Arbeit erläutert numerische Berechnungsmethoden, die für die Konstruktion und Projektierung von gummiähnlichen (hochelastischen) Materialien mit großen Deformationen notwendig sind.

Die Gebrauchseigenschaften einer Reihe von Erzeugnissen (Schwingungsisolatoren, Schallresonanzabsorber aus Gummi u. a.) werden wesentlich durch die Form des Kraft-Verschiebungs-Diagramms bestimmt. In der Theorie der Schwingungsisolation [4] unterscheidet man harte und weiche Belastungsdiagramme (Bild 1 und 2). Bei realen Konstruktionen, die im Bereich großer Deformationen arbeiten, kommen wesentlich kompliziertere Belastungsdiagramme vor. Beispielsweise haben Kompressionsamortisatoren in konischer bzw. Brückenform Diagramme mit charakteristischen Extrempunkten (Bild 3). Während des Belastungsvorgangs kommt es bei diesen Amortisatoren zum Durchschlagen in einen neuen Gleichgewichtszustand (gestrichelte Linie). Prinzipiell andere Belastungsdiagramme haben elastische Elemente, die die Symmetrie der Deformationskonfiguration bei Erreichen eines bestimmten kritischen Belastungsniveaus ändern (Bild 4). Beide Diagrammvarianten sind typisch für zylindrische Rohre und Paneele bei Belastungen in Form von Flächen- oder Einzelkräften.

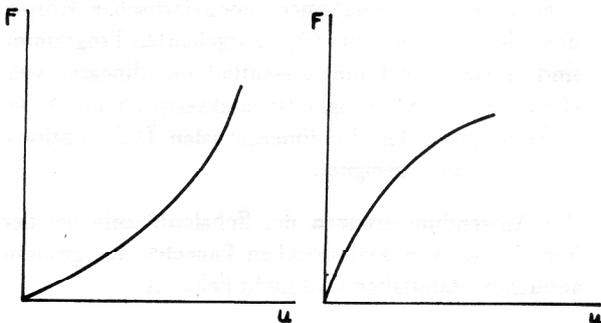


Bild 1
Hartes Belastungsdiagramm

Bild 2
Weiches Belastungsdiagramm

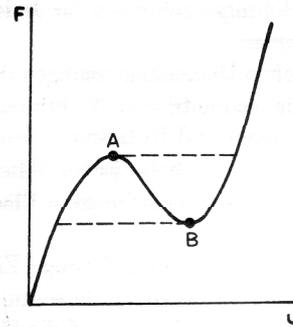


Bild 3
Belastungsdiagramm mit Extrempunkten (Punkt A und B)

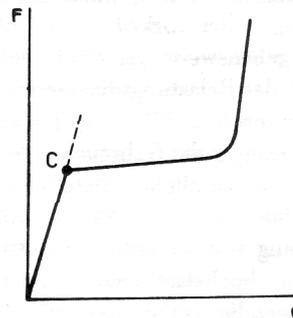


Bild 4
Belastungsdiagramm mit Bifurkationspunkt (Punkt C)

Zylindrische Rohre und Paneele aus gummiähnlichen Materialien werden aufgrund ihrer technologischen Vorteile vielfach als elastische Elemente bei Schwingungs- und Lärmschutzeinrichtungen verwendet.

Hier werden die Aufgaben zur ebenen und zur räumlichen Deformation von hochelastischen zylindrischen Paneelen beliebiger Dicke unter Einwirkung hydrostatischen Drucks betrachtet. Analoge Aufgaben wurden früher für zylindrische Rohre betrachtet [7], [8].

Die Berechnung erfolgt unter folgenden Voraussetzungen: das Material des Paneels ist ideal elastisch und inkompressibel, die Ränder sind unverschieblich starr eingespannt.

Die Besonderheiten der im weiteren betrachteten Aufgaben sind entweder mit dem Auftreten von nichtsymmetrischen Deformationsformen in symmetrischen Konstruktionen bei symmetrischer Belastung aufgrund kleiner Imperfektionen oder mit dem sprunghaften Übergang (Durchschlagen) in einen neuen Gleichgewichtszu-

stand ohne Änderung der Symmetrie der deformierten Konfiguration verbunden. Die Analyse solcher Besonderheiten ist Aufgabe der Stabilitätstheorie bzw. der Untersuchungen des nachkritischen Verhaltens von Konstruktionen [5], [26], wobei die Theorie und die Untersuchungsmethoden am besten für Stäbe, Platten und Schalen ausgearbeitet sind.

Hochelastische Paneele haben in der Regel eine Dickenabmessung, die mit den anderen Abmessungen vergleichbar ist. Daher kann man ihre Berechnung nicht mit der Hilfe der verschiedenen Varianten der technischen Schalentheorie durchführen, ohne vorher eine Abschätzung der Anwendungsgrenzen auf der Grundlage des Vergleichs mit Berechnungsergebnissen für dreidimensionale Modelle vorzunehmen.

Die unterschiedlichen Dickenabmessungen der betrachteten Elemente, die geometrische Nichtlinearität infolge großer Verschiebungen und Rotationen sowie die physikalische Nichtlinearität hochelastischer Materialien erfordern die Anwendung der nichtlinearen Elastizitätstheorie.

In diesem Zusammenhang sei auf einige Einschränkungen der Anwendung existierender Berechnungsverfahren der klassischen Elastizitätstheorie auf die hier betrachteten Aufgaben hingewiesen. Diese, im allgemeinen halb-analytischen Lösungsverfahren, beruhen auf der Überlagerung kleiner Störungen der differentiellen Gleichgewichtsbeziehungen. Sie dienen der Ermittlung der Parameter für das kritische Gleichgewicht bei Beibehaltung der Hauptrichtungen der vorkritischen Deformationen. Eine solche Vorgehensweise gestattet nicht, Aussagen über den Verlauf des Belastungsdiagrammes im überkritischen Bereich zu machen (Bild 3, 4). Dieser Bereich bestimmt jedoch vorrangig die Gebrauchseigenschaften für Erzeugnisse aus gummiähnlichen Materialien, die als elastische Elemente hochelastische Paneele enthalten.

Bei der Berechnung von wesentlich nichtlinearen Belastungsdiagrammen hochelastischer Paneele beliebiger Dicke ist es notwendig, Näherungsmethoden anzuwenden, z. B. direkte Variationsmethoden. An dieser Stelle sei angemerkt, daß die vorhandenen universellen Lösungsmethoden für dreidimensionale Aufgaben (in der überwiegenden Anzahl sind dies heute die Finite-Elemente-Methoden) nicht ausreichend die spezifischen Besonderheiten gummiähnlicher Materialien wie die Inkompressibilität und die physikalische Nichtlinearität bei großen Deformationen berücksichtigen.

Hier wird eine spezielle numerische Berechnungsmethode für dreidimensionale Aufgaben der nichtlinearen Elastostatik vorgestellt. Betrachtet werden zylindrische Paneele beliebiger Dicke aus inkompressiblem, hochelastischen Material bei großen Deformationen.

Als erste Näherung zur Lösung der betrachteten Aufgaben können Ergebnisse dienen, die man nach der Theorie für dünne Schalen unter Verwendung der Kirchhoff-Love-Hypothese enthält. Arbeiten in dieser Richtung sind ausführlich in [9] diskutiert.

Die ebene Deformation eines langen zylindrischen Paneels mit eingespannten Rändern unter Einwirkung gleichmäßigen Druckes stellt eine Aufgabe dar, die im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie für dünne, flache Schalen [17] eine analytische Lösung gestat-

tet. Aus den in der Literatur angeführten Ergebnissen stellt die in der Monografie von M. S. Kornišin und F. S. Isanbajeva [13] angeführte Lösungsform die günstigste dar. Entsprechend dieser Lösung wird der Charakter der Deformation des Paneels vom Wert eines verallgemeinerten, dimensionslosen Krümmungsparameters (s. Gl. 30)) bestimmt. Bei Werten dieses Parameters unter 20.2 verformt sich das Paneel symmetrisch, größeren Werten entspricht das Auftreten von nichtsymmetrischen Deformationsformen.

Eine analytische Lösung für die Aufgabe über die ebene Deformation nichtflacher zylindrischer Paneele erhält man nur bei linearer Formulierung [20]. Die nichtlineare Analyse großer Durchbiegungen solcher Paneele ist unter Verwendung numerischer Methoden in [22], [24] vorgenommen worden.

Ergebnisse, die auf der Basis der Verwendung verbesserter Varianten der Schalentheorie [6] erhalten wurden, kann man als zweite Näherung zur Lösung der betrachteten Aufgaben ansehen.

Die geometrisch nichtlineare Theorie flacher Schalen mittlerer Dicke [2], die auf der Berücksichtigung des Querschubs entsprechend dem Timoschenko-Modell basiert, gestattet eine analytische Lösung für die ebene Deformation des kreiszylindrischen Paneels bei verschiedenen Randbedingungen und Belastungsformen [14]. Es wurde dort festgestellt, daß der Einfluß der Schubdeformationen auf das Belastungsdiagramm bei transversal isotropem Material mit geringer Schubsteifigkeit wesentlich sein kann. Kleiner ist der Einfluß des Querschubs bei isotropen Materialien.

Es kann also festgestellt werden, daß es in der Literatur Ergebnisse gibt, die als erste und zweite Näherung für die hier betrachteten Aufgaben aufgefaßt werden können. Die Frage der Anwendungsgrenzen für solche Lösungen, die ohne genauere Berücksichtigung der Eigenschaften des hochelastischen Materials ermittelt wurden, ist noch nicht untersucht worden.

Folgende Fragen sind gegenwärtig bei der praktischen Berechnung von Gummielementen noch nicht gelöst:

- Es fehlen Untersuchungsergebnisse für das elastische, nachkritische Verhalten von hochelastischen Körpern bei großen Deformationen. Dadurch ist es nicht möglich, eine Reihe von Gummikonstruktionen (Amortisatoren zum Schutz vor Stoßbelastungen, Lärm- und Schwingungsabsorber) zu konstruieren.
- Die existierenden Lösungsverfahren für Aufgaben über große Deformationen hochelastischer Körper und die auf ihrer Grundlage aufgebauten Programme sind für die Berechnung wesentlich nichtlinearer, weicher elastischer Steifigkeitscharakteristika unter Berücksichtigung der dreidimensionalen Deformationsverteilung nicht geeignet.
- Die Anwendungsgrenzen der Schalentheorie bei der Berechnung von zylindrischen Paneelen aus gummiähnlichen Materialien sind nicht bekannt.
- Der Einfluß der Form des elastischen Deformationspotentials für inkompressibles, hochelastisches Material auf die Berechnungsergebnisse ist ungenügend untersucht.

In diesem Zusammenhang ist die Schaffung eines speziellen Verfahrens zur numerischen Analyse nichtlinearer elastischer Steifigkeitscharakteristika für zylindrische Paneele beliebiger Dicke aus hochelastischem inkompressiblem Material bei großen dreidimensionalen statischen Deformationen von besonderer Aktualität. Dieses Ziel wird durch die Lösung folgender Probleme erreicht:

- Erarbeitung eines Lösungsalgorithmus für dreidimensionale nichtlineare Aufgaben mit Hilfe der direkten Variationsmethode von Ritz und der verallgemeinerten Methode der Fortsetzung nach einem Parameter mit iterativer Verbesserung,
- numerische Realisierung des Algorithmus in einem Programmsystem für EDVA der ESER-Klasse,
- Ermittlung der vollständigen statischen Belastungsdiagramme für zylindrische Paneele bei äußerem hydrostatischen Druck für ein großes Intervall der geometrischen Parameter sowie der nachfolgenden Approximation der numerischen Ergebnisse durch analytische Ausdrücke, um den praktischen Gebrauch der Ergebnisse für die Projektierung der Gummierzeugnisse zu erleichtern,
- Abschätzung des Anwendungsgebietes der Theorie dünner Schalen (Kirchhoff-Love-Hypothese) und Schalen mittlerer Dicke (Timošenko-Modell) bei der Berechnung von Gummierzeugnissen am Beispiel einer Gegenüberstellung der numerischen Ergebnisse dieser Arbeit mit bekannten Ergebnissen,
- Analyse der Abhängigkeit der elastischen Steifigkeitscharakteristik von der Form des für die Berechnung zugrundeliegenden Deformationspotentials bei hochelastischem inkompressiblem Material.

2. Ein Lösungsalgorithmus für nichtlineare Elastizitätsaufgaben in Zylinderkoordinaten für Elastomerkörper

Die Grundlage der Lösung der betrachteten Aufgabe der Elastizitätstheorie bildet das Prinzip vom stationären Wert der vollständigen potentiellen Energie für endliche Deformationen [15]. Die numerische Realisierung wird durch die Anwendung der direkten Variationsmethode von Ritz bei hohen Näherungen erreicht. Das nichtlineare algebraische System wird mit Hilfe der Methode der Fortsetzung nach einem verallgemeinerten Parameter [10] und entsprechender iterativer Verbesserung nach Newton-Kantorovič gelöst.

Als elastisches Potential für die endlichen Deformationen des inkompressiblen Materials wurde das Potential von Ogden [25] gewählt, wodurch eine Modifikation des iterativen Lösungsverfahrens notwendig wurde. Die Komponenten der Jacobi-Matrix wurden auf der Basis einfacher Beziehungen für neohookesches Material berechnet, und die Kopplungen zwischen den nichtlinearen Gleichungen wurden aus den vollständigen Beziehungen des Ogdenschen Potentials ermittelt.

Zur Darstellung des Potentials der hydrostatischen Belastung durch die Komponenten des Verschiebungsvektors wurde eine Methode verwendet, die für die Berechnung zylindrischer und konischer Schalen vorgeschlagen wurde [1]. Hier wurde diese Methode auf den Fall dreidi-

mensionaler Körper mit beliebiger glatter Oberfläche in Zylinderkoordinaten verallgemeinert.

Die Approximation der unbekanntenen Funktionen beruht auf dem Separationsverfahren für die Variablen unter Verwendung Čebyševscher Näherungen. Dabei wurden verträgliche Approximationen für die Verschiebungen und den Lagrangeschen Multiplikator, der die Inkompressibilitätsbedingung in das Funktional der vollständigen potentiellen Energie einführt, erzielt.

Der Übergang zum überkritischen Lösungszweig in der nichtlinearen Aufgabe erfolgt mit Hilfe der Störungstheorie. Die Anfangsabweichung von der Symmetrie der Aufgabe wird in die geometrische Form der betrachteten zylindrischen Paneele eingefügt. Zur näherungsweise Ermittlung der Parameter des kritischen Gleichgewichts wird ein Berechnungsverfahren vorgeschlagen, welches auf der numerischen Analyse der Abschätzung der Kondition des zu lösenden Systems beruht.

Der Berechnungsalgorithmus wurde in Form eines Rechenprogramms realisiert.

Das Funktional der inneren potentiellen Energie für endliche Deformationen des ideal-elastischen isotropen, inkompressiblen Körpers läßt sich als Integral über das undeformierte Volumen aufschreiben

$$\Pi_{\epsilon} = \mu \iiint_{(V_0)} [W + S(\Theta - 1)] dV, \quad (1)$$

wobei μ – der Schubmodul bei kleinen Deformationen, W – das Funktional der spezifischen inneren potentiellen Energie (elastisches Potential), $\Theta = V/V_0$ – die relative Volumenänderung sind.

Das in das Integral (1) eingehende Glied $S(\Theta - 1)$ bringt keinen Beitrag zur potentiellen Energie und hat die Bedeutung der Inkompressibilitätsbedingung $\Theta - 1 = 0$, die mit dem Lagrangeschen Multiplikatoren S in das Funktional eingefügt wurde. Im weiteren trägt die Funktion S die Bezeichnung „Funktion des hydrostatischen Drucks“ entsprechend der Terminologie der linearen Elastizitätstheorie [16], wobei S bis auf einen Faktor mit dem Kugeltensoranteil des Spannungstensors zusammenfällt.

Weiterhin werden nur Aufgaben betrachtet, die mit hydrostatischer Belastung verbunden sind. Dabei bleibt die Kontur der belasteten Paneele unverformt oder verformt sich in ihrer Ebene. Die Konservativität der mitgehenden Belastung wurde für diesen Fall in [11] von L. M. Zubov gezeigt.

Das Funktional des hydrostatischen Drucks Π_q wird aus rein geometrischen Überlegungen formuliert

$$\Pi_q = q \Delta V, \quad (2)$$

wobei ΔV – das Volumen darstellt, welches zwischen der deformierten und der undeformierten Lage der Fläche mit der gleichmäßig verteilten, mitgehenden Belastung q eingeschlossen ist.

Bei Anwendung der Prozedur des Ritzschen Verfahrens auf das Funktional der vollständigen Energie

$\Pi = \Pi_{\epsilon} + \Pi_q$ führt die Variationsbedingung $\delta \Pi = 0$ auf ein System von nichtlinearen algebraischen Gleichungen

$$F_i(\beta, q) = \partial \Pi(\beta, q) / \partial \beta_i = 0, \quad (3)$$

wobei mit β_i die Komponenten des Vektors $\underline{\beta}$ der unbestimmten Koeffizienten in der Approximation der Verschiebungen und der Funktion des hydrostatischen Drucks bezeichnet werden.

Der Lösungsalgorithmus der Aufgabe, die sich in der Form des Systems algebraischer Gleichungen (3) darstellen läßt, wird als Schritt-Prozedur der Fortsetzung nach dem natürlichen Parameter q mit iterativer Verbesserung der Lösung in jedem Schritt nach der Methode von Newton-Kantorovič realisiert

$$q = q_{(k)}, \quad \underline{\beta}_{(k)}^{(0)} = \underline{\beta}_{(k-1)}$$

$$\underline{J}(\underline{\beta}_{(k)}) \cdot \Delta \underline{\beta}_{(k)}^{(m+1)} = -\underline{F}(\underline{\beta}_{(k)}^{(m)}), \quad (4)$$

$$\underline{\beta}_{(k)}^{(m+1)} = \underline{\beta}_{(k)}^{(m)} + \Delta \underline{\beta}_{(k)}^{(m+1)},$$

wobei k – die Schrittnummer, m – die Iterationsnummer, (\cdot) – das Symbol für das Skalarprodukt, $\Delta \underline{\beta}$ – der Zuwachs des Koeffizientenvektors sind. Außerdem ist

$$\underline{J} = \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right\} \quad (5)$$

die Jacobische Matrix.

Nach einigen Schritten (zwei bis drei), die zum Erhalt der Anfangsnäherung notwendig sind, wird ein Wechsel des Fortsetzungsparameters vorgenommen. Dabei wird der ursprüngliche Parameter q den variierbaren Größen zugeordnet

$$\underline{\alpha} = \{ \underline{\beta}, q \} \quad (6)$$

Zum Gleichungssystem (3) wird eine neue Gleichung hinzugefügt [10], die den verallgemeinerten Fortsetzungsparameter t mit dem neuen Vektor der Unbekannten $\underline{\alpha}$ verbindet

$$\begin{cases} \underline{F}(\underline{\alpha}) = 0, \\ d \underline{\alpha}_{(k-1)} \cdot \underline{\alpha} - (d \underline{\alpha}_{(k-1)} \cdot \underline{\alpha}_{(k-1)} + t) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

Dabei kann man den Ausdruck für das vollständige Differential $d \underline{\alpha}_{(k-1)}$ als endliche Differenz darstellen

$$d \underline{\alpha}_{(k-1)} \approx \frac{\underline{\alpha}_{(k-1)} - \underline{\alpha}_{(k-2)}}{[(\underline{\alpha}_{(k-1)} - \underline{\alpha}_{(k-2)}) \cdot (\underline{\alpha}_{(k-1)} - \underline{\alpha}_{(k-2)})]^{1/2}} \quad (8)$$

Die Jacobi-Matrix des erweiterten Gleichungssystems (7) lautet

$$\underline{J}_0 = \begin{matrix} \underline{J} & \partial \underline{F} / \partial q \\ d \underline{\alpha}_{(k-1)} & d q_{(k-1)} \end{matrix} \quad (9)$$

Im Gegensatz zu (5) weist diese keine Singularitäten in der Nähe der lokalen Extrema für die Belastung q auf (s. Bild 3). Die Schrittprozedur für das Gleichungssystem (7) auf der Grundlage des Iterationsprozesses von Newton und Kantorovič hat folgendes Aussehen

$$\underline{\alpha}_{(k)}^{(0)} = \underline{\alpha}_{(k-1)} + t d \underline{\alpha}_{(k-1)}$$

$$\underline{J}_0(\underline{\alpha}_{(k)}^{(m)}) \cdot \Delta \underline{\alpha}_{(k)}^{(m+1)} = -\underline{F}'(\underline{\alpha}_{(k)}^{(m)}), \quad (10)$$

$$\underline{\alpha}_{(k)}^{(m+1)} = \underline{\alpha}_{(k)}^{(m)} + \Delta \underline{\alpha}_{(k)}^{(m+1)},$$

wobei \underline{F}' – der Kopplungsvektor für das System (7) ist. Das System der linearen algebraischen Gleichungen (10) besitzt im Gegensatz zu (4) keine Symmetrieeigenschaften.

Eine der allgemeinsten Formen der Darstellung des Potentials W , welches in (1) eingeht, ist die von Ogden vorgeschlagene verallgemeinerte Form [25]

$$W = \sum_{k=1}^{N_p} \hat{\beta}_k (\lambda_1^{\hat{\alpha}_k} + \lambda_2^{\hat{\alpha}_k} + \lambda_3^{\hat{\alpha}_k} - 3), \quad (11)$$

wobei $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ Materialkonstanten und λ_i – die Hauptdehnungen sind, welche ihrerseits mit der Inkompressibilitätsbedingung $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ verbunden sind. In [25] wurde gezeigt, daß man durch die Auswahl der Konstanten ($\hat{\alpha}_1 = 1,3, \hat{\alpha}_2 = 5,0, \hat{\alpha}_3 = -2,0, \hat{\beta}_1 = 1,147, \hat{\beta}_2 = 0,0006, \hat{\beta}_3 = 0,0115$) die klassischen Experimente von Treloar [21] bis zu einem Dehnungsgrad von 5 – 6 beschreiben kann. Praktisch folgen alle bekannten Potentiale, die bisher bei der Lösung von angewandten Statikaufgaben für Elastomerkörper verwendet wurden, als Sonderfälle aus dem Ausdruck (1) (vgl. Tabelle 1). ξ nimmt dabei einen beliebigen Wert aus dem Intervall $[-1, +1]$ an.

Tabelle 1
Bekannte elastische Potentiale, die durch das Potential von Ogden [25] verallgemeinert sind

Autoren	N_p	$\hat{\beta}_k$	$\hat{\alpha}_k$
Treloar [21] Bartenev, Chasanovič [3]	1	0,5	2
Mooney, Rivlin [19]	2	0,25 (1 + ξ) 0,25 (1 - ξ)	2 -2
Cernych, Subina [23]	2	1 + ξ 1 - ξ	1 -1

Das gewählte elastische Potential gestattet die Formulierung der für die weiteren Rechnungen benötigten physikalischen Beziehungen. Beispielsweise lauten die Hauptspannungen des Cauchy-Greenschen Tensors

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{N_p} \hat{\beta}_k \hat{\alpha}_k \lambda_i^{\hat{\alpha}_k} + S, \quad (12)$$

Für die weiteren Ausführungen müssen orthogonale Zylinderkoordinaten r, φ, z und die entsprechenden Komponenten des Verschiebungsvektors u, v, w eingeführt werden.

Die Hauptdehnungen λ_i im Ausdruck für das elastische Potential (11) lassen sich durch die Komponenten des Verschiebungsvektors nur für Aufgaben der ebenen und axialsymmetrischen Deformation darstellen

$$\lambda_1 = \sqrt{g_1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{g_2}, \quad \lambda_3 = 1 + \vartheta \frac{u}{r}, \quad (13)$$

wobei

$$g_{1,2} = \frac{1}{2} (G \pm \sqrt{G^2 - 4\Theta^2})$$

ist. Der Parameter ϑ nimmt den Wert 0 oder 1 an entsprechend dem Charakter der Aufgabe (eben oder axial-symmetrisch).

Die Werte G und Θ werden durch die Verschiebungskomponenten und ihre Ableitungen nach den Koordinaten (\dots),_r = $\partial/\partial r$, (\dots), _{φ} = $\partial/\partial \varphi$, (\dots),_z = $\partial/\partial z$) wie folgt ausgedrückt

$$G = (1 + u_{,r})^2 + v_{,r}^2 + [(v - u_{,r})^2 + (r + u + v_{,\varphi})^2] / r^2, \quad (14)$$

$$\Theta = [(1 + u_{,r})(r + u + v_{,\varphi}) + v_{,r}(v - u_{,\varphi})] / r$$

(für die ebene Deformation),

$$G = (1 + u_{,r})^2 + u_{,z}^2 + w_{,r}^2 + (1 + w_{,z})^2 \quad (15)$$

$$\Theta = (1 + u_{,r})(1 + w_{,z}) - u_{,z} u_{,r}$$

(für die axialsymmetrische Deformation).

Die Komponenten der Jacobischen Matrix J der inneren potentiellen Energie, die durch das Ogden'sche Potential (11) ausgedrückt wird, haben einen überaus großen Umfang, der für die numerische Realisierung nicht geeignet ist. Gleichzeitig muß aber festgestellt werden, daß die analogen Beziehungen für das Ein-Parameter-Potential von Treloar sehr einfach ist. Daher wird folgende Modifikation der betrachteten Iterationsschemata (4) und (10) vorgeschlagen: die Jacobi-Matrix, die dem Ogden'schen Potential entspricht, wird durch die Jacobi-Matrix des neohookeschen Materials (Treloar'sches Potential) ersetzt. Die numerische Konvergenz der modifizierten Iterationsschemata wird durch die nachfolgend angeführten Resultate bestätigt.

Die innere potentielle Energie, die dem Treloar'schen Potential entspricht, läßt sich im allgemeinen Fall der dreidimensionalen Deformation in Zylinderkoordinaten folgendermaßen aufschreiben

$$U = \frac{1}{2} [u_{,r}^2 + v_{,r}^2 + w_{,r}^2 + (\frac{u_{,\varphi} - v}{r})^2 + (\frac{u + v_{,\varphi}}{r})^2 + (\frac{w_{,\varphi}}{r})^2 + u_{,z}^2 + v_{,z}^2 + w_{,z}^2] + S(u_{,r} + \frac{u + v_{,\varphi}}{r} + w_{,z}) + \frac{S-1}{r} \left\{ (u_{,\varphi} - v) [v_{,z} w_{,r} - (1 + w_{,z}) v_{,r}] + \right. \quad (16)$$

$$+ (r + u + v_{,\varphi})(u_{,r} w_{,z} - w_{,r} u_{,z}) + (u + v_{,\varphi})(u_{,r} + w_{,z}) + w_{,\varphi} [u_{,z} v_{,r} - v_{,z} (1 + u_{,r})] \left. \right\}.$$

Jetzt wird ein infinitesimal kleines Element dR der beliebigen, glatten Fläche $R(\varphi, z)$ in seiner Lage vor und nach der Deformation betrachtet. Dieser Weg wurde bereits in [1] verfolgt. Dabei kann man den Ausdruck für die Volumenänderung ΔV , der in das Potential der hydrostatischen Belastung (2) eingeht, ermitteln

$$\Delta V = \iint_R Q \, dR \quad (17)$$

mit

$$Q = R u - R_{,\varphi} v - R_{,z} R w + \frac{1}{2} [u(u + v_{,\varphi}) + v(v - u_{,\varphi}) + R(u w_{,z} - w u_{,z}) + R_{,\varphi}(v_{,z} w - v w_{,z}) + R_{,z}(v w_{,\varphi} - v_{,\varphi} w - u w)] + \frac{1}{3} [u_{,z}(v w_{,\varphi} - w u_{,\varphi} - u w) + v_{,z}(w u_{,\varphi} - u w_{,\varphi} - v w) + w_{,z}(u^2 + v^2 + u v_{,\varphi} - v u_{,\varphi})]. \quad (18)$$

Für eine Kreiszyylinderfläche $R = \text{konst}$ vereinfacht sich der Ausdruck (18) etwas

$$Q = R u + \frac{1}{2} [u(u + v_{,\varphi}) + v(v - u_{,\varphi}) + R(u w_{,z} - w u_{,z})] + \frac{1}{3} [u_{,z}(v w_{,\varphi} - w v_{,\varphi} - u w) + v_{,z}(w u_{,\varphi} - u w_{,\varphi} - v w) + w_{,z}(u^2 + v^2 + u v_{,\varphi} - v u_{,\varphi})]. \quad (19)$$

Hier wurden im Gegensatz zu [1] die Glieder 3. Ordnung beibehalten. Deren Rolle läßt sich leicht am Beispiel der axialsymmetrischen Deformation für den Kreiszyylinder zeigen

$$Q = u(R + \frac{u}{2}) + (R + \frac{u}{3})(u w_{,z} - w u_{,z}). \quad (20)$$

Die Vernachlässigung der Glieder 3. Ordnung ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Verschiebungen klein sind. Für die im weiteren betrachteten Aufgaben zur Deformation von zylindrischen Paneelen aus hochelastischen Materialien sind die Werte der Verschiebungen vergleichbar mit denen des Radius der Paneel-Fläche. Daher wird der vorliegende Algorithmus auf der Basis der vollständigen Beziehungen für das Potential der hydrostatischen Belastung (18) aufgebaut.

Alle bisher eingeführten Beziehungen hingen nicht so wesentlich von der konkreten geometrischen Form der hochelastischen Körper ab. Daher tritt erst jetzt die Notwendigkeit auf, bestimmte Einschränkungen einzuführen.

Nachfolgend werden zylindrische Paneele mit unverschieblichen Rändern betrachtet. Diese sind in der Draufsicht rechteckig und nehmen folgendes Volumen ein

$$r_1 \leq r \leq r_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, z_1 \leq z \leq z_2. \quad (21)$$

Zur bequemerem Schreibweise der Koordinatenfunktionen werden dimensionslose Variablen, die sich im Intervall $[-1, +1]$ ändern, eingeführt

$$\hat{\varphi} = (2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2) / (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (22)$$

\hat{r} und \hat{z} werden analog definiert.

Die Approximation der Verschiebungen und der Funktion des hydrostatischen Drucks werden mit Hilfe der Separation der Variablen auf der Grundlage Čebyševscher Polynome und trigonometrischer Funktionen gebildet

$$u = (1 - \hat{z}^2) \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_{12}} \sum_{k=1}^{n_{13}} A_{ijk} T_i(\hat{r}) \Phi_j(\hat{\varphi}) T_k(\hat{z}),$$

$$v = (1 - \hat{z}^2) \sum_{i=1}^{n_{21}} \sum_{j=1}^{n_{22}} \sum_{k=1}^{n_{23}} B_{ijk} T_i(\hat{r}) \Phi_j(\hat{\varphi}) T_k(\hat{z}),$$

$$w = (1 - \hat{z}^2) \sum_{i=1}^{n_{31}} \sum_{j=1}^{n_{32}} \sum_{k=1}^{n_{33}} C_{ijk} T_i(\hat{r}) \Phi_j(\hat{\varphi}) T_k(\hat{z}),$$

$$S = \sum_{i=1}^{n_{41}} \sum_{j=1}^{n_{42}} \sum_{k=1}^{n_{43}} D_{ijk} T_i(\hat{r}) \Phi_j(\hat{\varphi}) T_k(\hat{z}).$$

Dabei sind A_{ijk} , B_{ijk} , C_{ijk} , D_{ijk} – unbekannte Konstanten, die den bereits früher eingeführten Vektor β bilden, T_i – Čebyšev-Polynome I. Ordnung.

Für Paneele mit festen Längsrändern können die Funktionen Φ_j durch Čebyševsche Polynome ausgedrückt werden

$$\Phi_j = (1 - \hat{\varphi}^2) T_j(\hat{\varphi}). \quad (24)$$

Möglich sind auch trigonometrische Darstellungen

$$\Phi_j = \sin(j \hat{\Psi}) \quad (25)$$

mit

$$\hat{\Psi} = \pi(\varphi - \varphi_1) / (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Die näherungsweise Erfüllung der Inkompressibilitätsbedingung (durch Einführung in das Energiefunktional mit Hilfe des Lagrangschen Multiplikators) erfordert abgestimmte Approximationen der Verschiebungen u , v , w und der Funktion des hydrostatischen Drucks S .

In [18] wird aus der Analyse der Struktur des Ritzschen Gleichungssystems in der linearen Elastizitätstheorie für das inkompressible Material gezeigt, daß die Anzahl der Koordinatenfunktionen in der Approximation für u , v , w und S durch folgende Relation definiert ist

$$(N_1 + N_2 + N_3) / N_4 \geq 2, \quad (26)$$

wobei

$$N_k = \sum_{m=1}^3 n_{km}$$

ist und n_{km} die oberen Summationsgrenzen in (23) darstellen.

Die Verletzung der Ungleichung (26) würde dazu führen, daß im Ritzschen System linear abhängige Gleichungen bzw. nahezu abhängige Gleichungen auftreten, was die Kondition des Gleichungssystems wesentlich verschlechtert. Außer einer unteren Grenze, die durch die Ungleichung (26) definiert ist, soll auch eine obere Grenze existieren. Die Anzahl der variierbaren Konstanten in der Funktion S darf nicht kleiner sein als die größte Anzahl von Konstanten in den Approximationen der Komponenten des Verschiebungsvektors, da sonst nicht alle Konstanten in den Verschiebungen mit Gleichungen verbunden sind, die durch die Inkompressibilitätsbedingung gegeben sind. Damit wäre jedoch eine starke Verzerrung des Verschiebungsfeldes verbunden. Daher sollte bei gleicher bzw. nahezu gleicher Anzahl von Konstanten im Verschiebungsvektor für zweidimensionale Aufgaben der von (26) definierte Grenzwert eingehalten werden. Bei der Lösung von dreidimensionalen Aufgaben muß folgende einschränkende Bedingung bei der Wahl der Koordinatenfunktionen angewendet werden

$$2 \leq (N_1 + N_2 + N_3) / N_4 \leq 3. \quad (27)$$

Die Bedingung (27) ist auch für nichtlineare Aufgaben zu verwenden, da das Auftreten von zusätzlichen nichtlinearen Gliedern keinen wesentlichen Einfluß auf die Kondition des zu lösenden Gleichungssystems bei den iterativen Prozeduren (4), (10) hat.

Die Approximation (23) setzt keine wesentlichen Einschränkungen für die Form des Querschnitts der zylindrischen Paneele voraus. Es können kreisförmige Formen, aber auch andere betrachtet werden.

$$r_1 = r_{o1} f(\hat{\varphi}), r_2 = r_{o2} f(\hat{\varphi}). \quad (28)$$

Damit hat man die Möglichkeit, auch Aufgaben mit Imperfektionen zu analysieren. Diese werden als kleine Anfangunsymmetrien des Paneels vorgegeben

$$f(\hat{\varphi}) = (1 - e \sin 2 \hat{\Psi})^{-1} \quad (29)$$

e ist der Parameter der Imperfektion und $\hat{\Psi}$ wird durch die Beziehung (25) definiert.

Der Lösungsalgorithmus für statische nichtlineare Aufgaben der Elastomerpaneelle ist als speziell zusammengestelltes Programmsystem „VOLUME“ realisiert.

Allgemeine Programmcharakteristika sind:

- das Programmsystem ist in Fortran IV für das Betriebssystem OS/ES geschrieben und besteht aus 30 Unterprogrammen,
- notwendiger Operationsspeicherplatz ist 400 kB,
- alle Rechnungen werden mit doppelter Genauigkeit ausgeführt,

- die maximale Anzahl der Unbekannten muß ≤ 250 sein,
- bei der numerischen Integration über das Volumen des Körpers werden maximal 600 Integrationspunkte zugelassen (Gauß-Formel),
- die Basis der Koordinatenfunktionen, die die Čebyševschen Polynome 1. Ordnung und die trigonometrischen Funktionen beinhalten, ist zylindrisch,
- das nichtlineare Gleichungssystem wird mit dem iterativen Verfahren von Newton-Kantorovič mit verschiedenen Integrationsnetzen gelöst: bei der Berechnung der Jacobi-Matrix wird ein grobes Netz verwendet, bei den modifizierten Schritten – ein verfeinertes Netz,
- der Aufbau einer vollständigen nichtlinearen Lösung wird mit einem Schrittverfahren mit dem Belastungsparameter und einem verallgemeinerten Parameter realisiert, wobei eine automatische Änderung des Fortsetzungsparameters in Abhängigkeit von der Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsprozesses erfolgt,
- das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren für eine vollbesetzte nichtsymmetrische Matrix gelöst,
- die Eingabe der Anfangsinformationen erfolgt durch Datenwahl, die aus 30 Zahlen besteht,
- die Ausgabe erfolgt in Form von Tabellen und Grafiken für Verschiebungs-, Deformations- und Spannungsfelder sowie als Belastungsdiagramme.

LITERATUR:¹⁾

- [1.] Алфутов, Н. А.: Основы расчета на устойчивость упругих систем. – Москва: Машиностроение, 1978. – 311 с.
- [2.] Амбарцумян, С. А.: Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
- [3.] Бартенев, Г. М., Хазанович, Т. Н.: О законе высокоэластичных деформаций сетчатых полимеров. В кн.: Высокомолекулярные соединения, т. 2, № 1, 1960. – с. 20 – 28
- [4.] Вибрации в технике. Т. 6: Защита от вибраций и ударов / под ред. К. В. Фролова. – Москва: Машиностроение, 1981. – 456 с.
- [5.] Вольмир, А. С.: Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
- [6.] Галинъш, А. К.: Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям / Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань. 1967. – № 5. – с. 66 – 92
- [7.] Глухих, С. А., Гозман, Е. А.: Закритическое равновесие длинной резиновой трубы под наружным давлением. – Рижский политехнический институт: Рук. деп. в ВИНТИ 24. 06. 82, № 3264 – 82 Деп. – 27 с.
- [8.] Глухих, С. А., Стыцына, В. К., Печников, В. П.: Численно-экспериментальное исследование гидростатического нагружения толстостенной резиновой трубы. – Рижский политехнический институт: Рук. деп. в Латв. НИИНТИ, 30. 06. 83 № 41 Ла – Д. 83.
- [9.] Григолюк, Э. И., Кабанов, В. В.: Устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1978. – 359 с.
- [10.] Григолюк, Э. И., Шалашилин, В. Н.: О некоторых формах метода продолжения по параметру в нелинейных задачах упругости. – Журн. прикл. мех. и теор. физ. /ПМТФ/. – 1980. – № 5. – с. 158 – 161
- [11.] Зубов, Л. М.: Об условиях консервативности гидростатической нагрузки на оболочку / Тр. 10-ой Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – Тбилиси, 1975. – с. 129 – 134
- [12.] Керр, А., Сойфер, М.: Линеаризация докритического состояния и ее влияние на определение критической нагрузки. – Тр. амер.-об-ва инженеров-механиков. – Серия Е. – 1969. т. 36. – № 4. – с. 125 – 133
- [13.] Корнишин, М. С., Исанбаева, Ф. С.: Гибкие пластины и панели. – Москва, Наука, 1968. – 260 с.
- [14.] Корнишин, М. С., Ганеева, М. С.: Устойчивость и большие прогибы ортотропной длинной цилиндрической панели под действием равномерного внешнего давления. / Теория пластин и оболочек. – Москва: Наука, 1971. – с. 161 – 166
- [15.] Лурье, А. И.: Нелинейная теория упругости. – Москва, Наука, 1980. – 512 с.
- [16.] Лурье, А. И.: Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 939 с.
- [17.] Муштарн, Х. М., Галимов, К. Э.: Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткинигиздат, 1957. – 431 с.
- [18.] Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / С. И. Дымников, Э. Э. Лавендел, А.-М. А. Павловскис, М. И. Снегс, под ред. Э. Э. Лавендела. – Рига: Зинатне, 1980. – 238 с.
- [19.] Ривлин, Р. С.: Большие упругие деформации / Реология. Теория и приложения под ред. Ф. М. Эйриха. – Москва: 1962. – с. 421 – 459
- [20.] Тимошенко, С. П.: Устойчивость упругих систем. – Ленинград – Москва: Гостехиздат, 1946. – 532 с.
- [21.] Трелоар, Л.: Физика упругости каучука. – Москва. – ИЛ, 1963. – 240 с.
- [22.] Хаддлетон, Дж.: Конечные перемещения и прощелкивание круглых арок / Тр. амер. об-ва инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1968. – т. 35. – № 4. – с. 153
- [23.] Черных, К. Ф., Шубина, И. М.: Законы упругости для несжимаемых материалов / Механика эластомеров. – 1977. – т. 1. – с. 54 – 64
- [24.] Шалашилин, В. И.: Метод продолжения по параметру и его применение к задаче больших прогибов непологой круговой арки – Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – № 4. – с. 178 – 184.
- [25.] Ogden, R. W.: Large deformation isotropic elasticity on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. – Proc. Roy. Soc. – London, 1972. – A 326. – p. 565 – 584
- [26.] Thompson, J. M.; Hunt, G. W.: A general theory of elastic stability. – New York: Wiley, 1973. – 317 p.

1) Das hier angeführte Literaturverzeichnis bezieht sich auf die Teile I und II der Arbeit.