

# Berechnung von Kastenträgersystemen unter Verwendung von Spline-Superelementen

Ignatjev, V. A.

## 1. Einleitung

Bedingt durch die Entwicklung der EDVA findet die Finite-Elemente-Methode (FEM) auch in der Berechnung von Kastenträgersystemen immer breitere Anwendung [1] bis [3].

Von der rechnerischen Position her ist die Superelementmethode effektiver. Diese Methode gestattet eine abschnittsweise Betrachtung der Konstruktion mit nachfolgender Vereinigung dieser Abschnitte, wodurch eine entscheidende Herabsetzung der Ordnung des zu lösenden Gesamtgleichungssystems erreicht wird [4].

Außerdem wird die Aufstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix wesentlich vereinfacht, insbesondere, wenn die Konstruktion eine regelmäßige Struktur besitzt [5], [6].

Gewöhnlich erfolgt die Berechnung mit der Superelementmethode in mehreren Niveaustufen, die Belastung ist oft sogar bei regelmäßigen und symmetrischen Konstruktionen nichtsymmetrisch. Nach der Lösung des Gesamtsystems ist es erforderlich, auf entgegengesetztem Wege der Superelementenprozedur jedes Superelement des vorangehenden Niveaus einzeln zu berechnen. Dazu müssen die Steifigkeitsmatrizen der Verbindungssuperelemente aller Niveaustufen im Rechner gespeichert werden. Das setzt jedoch die Effektivität einer Berechnung mit der Superelementmethode herab.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Berechnungsmethodik für Kastenträgerkonstruktionen unter Verwendung von Spline-Interpolationen für die Verschiebungen entwickelt, die den Rechenzeitaufwand erheblich herabsetzt und für den entgegengesetzten Weg der Superelementenprozedur keine Speicherung der Steifigkeitsmatrizen der Verbindungssuperelemente erfordert.

## 2. Berechnungsmethodik

### 2.1. Entwicklung der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Jede Ebene, aus der die Kastenträgerkonstruktion besteht, wird in finite Elemente zerlegt, und anschließend werden aus der Gesamtzahl der Knotenpunkte die Berechnungspunkte so ausgewählt, daß sie auf den Ebenen ein verdünntes Netz bilden [7]. Die Feinheit des verdünnten Netzes wird durch folgende Faktoren bestimmt:

1. Durch den Gradienten der wirkenden äußeren Belastung.
2. Durch das Vorhandensein von Ausschnitten und von Sprüngen der Steifigkeitsparameter. Entlang der Ausschnittsgrenzen und der Grenzen der Steifigkeitsparameter werden Berechnungspunkte angeordnet. Die kleinste Seite einer Ausschnittsgrenze soll dabei nicht weniger als 3 Berechnungspunkte aufweisen.

3. Durch den Gesamtumfang des zu lösenden Gleichungssystems, der durch die Speichergröße und die Schnelligkeit der EDVA begrenzt ist.

Ein Superelement, das aus einer oder mehreren Platten besteht und einen Teil einer Kastenträgerkonstruktion darstellt, wird Spline-Super-Element (SSE) genannt, was dadurch begründet ist, daß die Errechnung der Verschiebungen der inneren Knoten mit Hilfe der Splineinterpolation erfolgt. Zur Anwendung gelangt eine zweidimensionale Interpolation mit stückweise bikubischen Splinefunktionen.

Unter den Berechnungspunkten gibt es Grenzpunkte, die sich auf der Kontaktfläche des SSE mit dem Nachbar-SSE befinden. Die übrigen Knoten der finiten Elemente sind innere Punkte des SSE. Die Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen der Berechnungspunkte mit anschließender Zusammensetzung des Superelementes ist in [5], für in einer Richtung regelmäßige Konstruktionen in [6] gezeigt. Hier wird der allgemeinere Fall betrachtet, bei dem die Zusammensetzung der Superelemente in beliebiger Richtung erfolgt. Da Kastenträgersysteme gewöhnlich orthogonal angeordnete Ebenen besitzen, bezeichnet man im SSE 6 Ebenen, an die andere SSE angeschlossen werden können:

- Die obere Ebene, deren Grenzpunkte den Index b tragen und entsprechend
- die untere Ebene mit dem Index h
- die linke Ebene mit dem Index l
- die rechte Ebene mit dem Index n
- die vordere Ebene mit dem Index a
- die hintere Ebene mit dem Index z

Die Berechnungspunkte des SSE liegen sowohl im Inneren als auch auf den Grenzebenen. Die letzteren werden durch den Index p und die inneren durch m gekennzeichnet.

Die Steifigkeitsmatrix des SSE kann dann in der Form

$$R = \begin{bmatrix} R_{bb} & R_{bn} & R_{ba} & R_{bp} & R_{bm} & R_{bz} & R_{bl} & R_{bh} \\ & R_{nn} & R_{na} & R_{np} & R_{nm} & R_{nz} & R_{nl} & R_{nh} \\ & & R_{aa} & R_{ap} & R_{am} & R_{az} & R_{al} & R_{ah} \\ & & & R_{pp} & R_{pm} & R_{pz} & R_{pl} & R_{ph} \\ & & & & R_{mm} & R_{mz} & R_{ml} & R_{mh} \\ \text{symmetrisch} & & & & & R_{zz} & R_{zl} & R_{zh} \\ & & & & & & R_{ll} & R_{lh} \\ & & & & & & & R_{hh} \end{bmatrix} \quad (1)$$

geschrieben werden, worin  $R_{t\lambda}$  die Untermatrizen der Steifigkeitsmatrix des SSE sind, die den Einfluß der Punkte der t-Gruppe auf die der  $\lambda$ -Gruppe ausdrücken. Die Elimination der inneren Punkte des SSE und die Überführung der Belastung der inneren Punkte auf die Grenz- und Berechnungspunkte erfolgt mit den Beziehungen

$$K_{t\lambda} = R_{t\lambda} - R_{tm} \cdot R_{mm}^{-1} R_{m\lambda} \quad (2)$$

$$P_{\lambda} = \bar{P}_{\lambda} - R_{\lambda m} R_{mm}^{-1} \bar{P}_m$$

$$\lambda, t = b, n, a, p, z, l, h$$

mit  $K_{t\lambda}$  als den Untermatrizen der überführten Steifigkeitsmatrix des SSE und  $P_{\lambda}$ ,  $\bar{P}_m$  als Belastungsvektoren der entsprechenden Punkte. Im Anschluß daran erfolgt die Formierung des Gesamtsystems durch reihenfolgegerechte Vereinigung der SSE. Es sei die Aufstellung der Blöcke der Systemsteifigkeitsmatrix betrachtet, wenn an ein SSE des s. Niveaus von oben ein SSE des  $\gamma$ . Niveaus angeschlossen wird und für die oberen SSE bereits die Untermatrizen der überführten Steifigkeitsmatrix nach (2) vorliegen. Die Grenzpunkte der betrachteten SSE, die auf ihrer Berührungsfläche liegen und zu eliminieren sind, werden in dieser Etappe als innere Punkte bezeichnet (Index m). Die Steifigkeitsuntermatrix der zu eliminierenden Punkte ist

$$R_{mm} = K_{bb}^s + K_{hh}^{\gamma} \quad (3)$$

wobei  $K_{bb}^s$ ,  $K_{hh}^{\gamma}$  die entsprechenden Untermatrizen der überführten Steifigkeitsmatrizen des s. und  $\gamma$ . Niveaus sind. Beim Aufstellen der Steifigkeitsuntermatrizen sich berührender SSE  $R_{pp}$  und  $R_{pm}$  ist zu beachten, daß ein Teil der Berechnungspunkte auf der Kontaktfläche dieser SSE liegt und das folgende Schema Anwendung findet,

$$R_{pp} = \begin{bmatrix} K_{pp}^{\gamma} & \\ & K_{pp}^s \end{bmatrix};$$

$$R_{pm} = \begin{bmatrix} K_{ph}^{\gamma} \\ \text{---} \\ K_{pb}^s \end{bmatrix} \quad (4)$$

worin die Quadrate die entsprechenden Untermatrizen der überführten SSE-Steifigkeitsmatrizen darstellen. Ihre gegenseitige Überdeckung bedeutet die Summation der Größen in diesem Teil. Die Untermatrizen  $R_{bb}$  und  $R_{hh}$  sind gleich den entsprechenden Untermatrizen  $K_{t\lambda}$

$$R_{bb} = K_{bb}^{\gamma}; \quad R_{hh} = K_{hh}^s$$

während sich die übrigen diagonalen Untermatrizen nach dem Schema

$$R_{\lambda\lambda} = \begin{bmatrix} K_{\lambda\lambda}^{\gamma} & \\ & K_{\lambda\lambda}^s \end{bmatrix} \quad (5)$$

ergeben. Für die Einflußmatrizen der Berechnungspunkte auf die Grenzpunkte gilt

$$R_{p\lambda} = \begin{bmatrix} K_{p\lambda}^{\gamma} & \\ & K_{p\lambda}^s \end{bmatrix} \quad \lambda = a, z, n, l \quad (6)$$

Hier gibt es kein Überdecken, sondern ein Anliegen in dem Teil, der den Berechnungspunkten auf der Berührungsfläche der SSE entspricht.

Die Untermatrizen  $R_{pb}$  und  $R_{ph}$  bestehen aus den entsprechenden Untermatrizen  $K_{pb}^{\gamma}$  und  $K_{ph}^s$ , ergänzt durch Nullen so, daß ihre Zeilenzahl mit dem Verformungsfreiheitsgrad der Berechnungspunkte im System zweier SSE übereinstimmt.

$$R_{pb} = \begin{bmatrix} K_{pb}^{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R_{ph} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_{ph}^s \end{bmatrix} \quad (7)$$

Die Einflußmatrizen der inneren Punkte auf die oberen und unteren Grenzpunkte entsprechen den Untermatrizen der SSE:  $R_{mh} = K_{bh}^s$ ;  $R_{bm} = K_{bh}^{\gamma}$ , während sich die übrigen nach dem Schema

$$R_{m\lambda} = \begin{bmatrix} K_{h\lambda}^{\gamma} & K_{b\lambda}^s \end{bmatrix} \quad \lambda = a, z, n, l \quad (8)$$

zusammensetzen. Für die Einflußmatrizen der Grenzpunkte der verschiedenen Gruppen aufeinander gilt

$$R_{t\lambda} = \begin{bmatrix} K_{t\lambda}^{\gamma} & 0 \\ 0 & K_{t\lambda}^s \end{bmatrix} \quad t, \lambda = a, z, n, l \quad (9)$$

und für die der oberen und unteren Grenzpunkte auf die übrigen:

$$R_{\lambda b} = \begin{bmatrix} K_{\lambda b}^{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R_{\lambda h} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_{\lambda h}^s \end{bmatrix} \quad \lambda = a, z, n, l \quad (10)$$

Die Untermatrix  $R_{bh}$  wird Null, wenn sich die oberen und unteren Grenzpunkte gegenseitig nicht beeinflussen, indem sie durch die Kontaktfläche des SSE getrennt sind. Alle symmetrisch gelegenen Untermatrizen werden durch Transposition der oberen ermittelt. Nach der Aufstellung aller Untermatrizen wird die Elimination der inneren Punkte nach Gleichung (2) vorgenommen.

Da die Lage der Trennfuge hier willkürlich angenommen war, werden die Untermatrizen der Gesamtsteifigkeitsmatrix bei beliebiger Lage der Trennfuge auch nach den Gleichungen (3 - 10), jedoch mit entsprechendem Indextausch durchgeführt.

Im letzten Niveau  $\mu$  der Konstruktion bei Verbindung mit der Unterlage wird die Elimination aller verbleibenden Randknoten auch der als innere anzunehmenden

vorgenommen. Man erhält als Ergebnis der Elimination die Steifigkeitsmatrix der Berechnungspunkte der Konstruktion

$$K_{pp}^{\mu} = R_{pp}^{\mu} - R_{pm}^{\mu} (R_{mm}^{\mu})^{-1} R_{mp}^{\mu} \quad (11)$$

und die auf die Berechnungspunkte übertragene Belastung

$$P_p^{\mu} = \bar{P}_p^{\mu} - R_{pm}^{\mu} (R_{mm}^{\mu})^{-1} \bar{P}_m^{\mu} \quad (12)$$

Anschließend erfolgt die Berechnung der Verformungen der Berechnungspunkte  $f$  des belasteten Kastenträgersystems aus der Gleichung

$$K_{pp}^{\mu} f_p = P_p^{\mu} \quad (13)$$

## 2.2. Interpolation der Verschiebungen der inneren Punkte

Mit den aus (13) erhaltenen Verformungen der Berechnungspunkte werden die Verschiebungen aller inneren Punkte ermittelt. Für die Platte „i“ des Kastenträgersystems wird dazu der Teilvektor  $f_p^i$  des Gesamtverschiebungsvektors des verdünnten Netzes  $f_p$  herangezogen. Es ist zu bemerken, daß damit der Übergang auf das allererste Niveau, die einzelnen Platten, erfolgt und alle Zwischenniveaus, die zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix der Berechnungspunkte erforderlich waren, übergangen werden. Die Platte „i“ soll in der Ebene  $xoy$  liegen. Zuerst werden die Verschiebungen in  $z$ -Richtung ( $\perp$  zur Plattenebene) interpoliert, anschließend die in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Wir nehmen an, daß das Netz der Platte „i“ in  $x$ -Richtung  $(m+1)$  und in  $y$ -Richtung  $(n+1)$  Linien aufweist.

Der Verformungsvektor jedes Berechnungspunktes, der im Schnittpunkt der Netzlinien „k“ und „j“ der Platte „i“ liegt, hat das folgende Aussehen

$$(f_p^i)_{jk} = [(U_p^i)_{jk} (V_p^i)_{jk} (W_p^i)_{jk} (\varphi_p^i)_{jk} (\chi_p^i)_{jk} (\eta_p^i)_{jk}]^T$$

$$j = 0, \dots, m; k = 0, \dots, n$$

Hierin sind  $(U_p^i)_{jk}$ ,  $(V_p^i)_{jk}$  und  $(W_p^i)_{jk}$  die Projektionen der Verschiebungen des Berechnungspunktes in  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung und  $(\varphi_p^i)_{jk}$ ,  $(\chi_p^i)_{jk}$  und  $(\eta_p^i)_{jk}$  die Drehwinkel um die  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse. Zunächst erfolgt die kubische Splineinterpolation auf den Netzlinien  $y = y_j$  ( $j = 0, \dots, m$ ), indem für jede Linie ein Spline nach den Beziehungen

$$S_y^z(x_k, y_j) = (W_p^i)_{jk} \quad (k = 1, \dots, n; j = 0, \dots, m)$$

für  $x \in (x_{k-1}, x_k)$

$$S_y^z(x, y_j) = (\chi_p^i)_{k-1,j} \cdot \frac{(x_k - x)^2 (x - x_{k-1})}{h_{k-1}^2} - (\chi_p^i)_{k,j} \cdot \frac{(x - x_{k-1})^2 (x_k - x)}{h_{k-1}^2} + (W_p^i)_{k-1,j} \cdot \frac{(x_k - x)^2 [2(x - x_{k-1}) + h_{k-1}]}{h_{k-1}^3}$$

$$+ (W_p^i)_{k,j} \cdot \frac{(x - x_{k-1})^2 [2(x_k - x) + h_{k-1}]}{h_{k-1}^3} \quad (14)$$

$$S_y^z(x_0, y_j) = (W_p^i)_{0,j}; h_k = x_k - x_{k-1}$$

aufgebaut wird, der die Verschiebungen und ihre ersten Ableitungen enthält [8].

Mit diesem Spline werden die Verschiebungen in  $z$ -Richtung aller inneren Knoten bestimmt. Die Drehwinkel dieser inneren Knoten um die  $y$ -Achse erhält man aus der ersten Ableitung des Splines:

$$(S_y^z)'(x, y_j) = (\chi_p^i)_{k-1,j} \cdot \frac{x_k - x}{h_{k-1}} (x_k - 3x + 2x_{k-1}) + (\chi_p^i)_{k,j} \cdot \frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}} (3x - x_{k-1} - 2x_k) + 2(W_p^i)_{k-1,j} \cdot \frac{x_k - x}{h_{k-1}^2} (x_k - 3x + 2x_{k-1} + h_{k-1}) + 2(W_p^i)_{k,j} \cdot \frac{x - x_{k-1}}{h_{k-1}^2} (x_{k-1} - 3x + 2x_k + h_{k-1})$$

$$x \in (x_{k-1}, x_k); k = 1, \dots, n; j = 0, \dots, m \quad (15)$$

Auf jeder Linie  $y = y_j$  ( $j = 0, \dots, m$ ) mögen  $(l+1)$  Knoten liegen:  $(n+1)$  von ihnen sind Berechnungspunkte und  $(l-n)$  innere Punkte. Es erfolgt nun die Interpolation entlang der  $y$ -Achse auf den Netzlinien  $x = x_j$  ( $j = 0, \dots, l$ ), indem für jede Linie ein Spline nach den Beziehungen

$$S_x^z(x_j, y_k) = (W_p^i)_{j,k} \quad (k = 1, \dots, m; j = 0, \dots, l)$$

für  $y \in (y_{k-1}, y_k)$

$$S_x^z(x_j, y) = C_{k-1} \frac{(y_k - y)^3}{6h_k} + C_k \frac{(y - y_{k-1})^3}{6h_k} + [(W_p^i)_{j,k-1} - \frac{C_{k-1} h_k^2}{6}] \frac{y_k - y}{h_k} + [(W_p^i)_{j,k} - \frac{C_k h_k^2}{6}] \frac{y - y_{k-1}}{h_k} \quad (16)$$

mit den Randbedingungen

$$2C_0 + C_1 = B_0; C_{m-1} + 2C_m = B_m$$

$$B_0 = \frac{6}{h_0} \left[ \frac{1}{h_0} ((W_p^i)_{j,1} - (W_p^i)_{j,0}) - (\varphi_p^i)_{j,0} \right]$$

$$B_m = \frac{6}{h_{m-1}} \left[ \varphi_{j,m}^i - \frac{1}{h_{m-1}} ((W_p^i)_{j,m} - (W_p^i)_{j,m-1}) \right]$$

$$h_k = y_k - y_{k-1} \quad (17)$$

Der Spline (16) ist auf den Verschiebungen und ihren zweiten Ableitungen aufgebaut [8].

Die Koeffizienten  $C_k$  des Splines werden aus dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2T_0 \\ d_1 2T_1 \\ \dots \\ d_{m-1} 2T_{m-1} \\ 2d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{m-1} \\ C_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{m-1} \\ P_m \end{bmatrix} \quad (18)$$

bestimmt, in dem

$$T_0 = 1 ; d_m = 1 ; P_0 = B_0 ; P_m = B_m$$

$$T_k = h_k / (h_k + h_{k-1}) ; d_k = 1 - T_k ; (k = 1, \dots, m-1)$$

$$P_k = 6 \frac{[(W_p^i)_{j,k+1} - (W_p^i)_{j,k}] / h_{k+1} - [(W_p^i)_{j,k} - (W_p^i)_{j,k-1}] / h_k}{h_k + h_{k+1}} \quad (19)$$

zu setzen ist.

Mit dem Spline (16) werden die z-Verschiebungen der verbleibenden inneren Punkte auf den Linien  $x = x_j$  ( $j = 0, \dots, l$ ) und die Drehwinkel um die x-Achse mit

$$(S_x^z)'(x_j, y) = -C_{k-1} \cdot \frac{(y_k - y)^2}{2h_k} + C_k \frac{(y - y_{k-1})^2}{2h_k} + \frac{(W_p^i)_{j,k} - (W_p^i)_{j,k-1}}{h_k} - \frac{C_k - C_{k-1}}{6} h_k$$

$$y \in (y_{k-1}, y_k) ; k = 1, \dots, m ; j = 0, \dots, l \quad (20)$$

ermittelt.

Die Verschiebungen in x-Richtung werden in der folgenden Weise bestimmt:

Zunächst wird eine Splineinterpolation entlang der y-Achse auf den Netzlinien  $x = x_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ) durchgeführt. Hierzu wird für jede Linie ein Spline entsprechend Formel (16) aufgebaut, nur, daß anstelle der Verschiebungen  $(W_p^i)_{j,k}$  jetzt die  $(U_p^i)_{j,k}$  zu verwenden sind und die Indizes in den Intervallen  $k = 1, \dots, m ; j = 0, \dots, n$  laufen. Die Drehwinkel werden aus der ersten Ableitung dieses Splines in einer der Gleichung (20) entsprechenden Form erhalten. Weiterhin wird die Splineinterpolation entlang der x-Achse auf den Netzlinien  $y = y_k$  ( $k = 0, \dots, l$ ), wobei l die Zahl der auf jeder Linie  $x = x_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ) liegenden Knoten ist, deren x-Verschiebung in der vorangegangenen Splineinterpolation bereits ermittelt sind, durchgeführt, indem ein linearer Spline  $S_y^x(x, y)$  entsprechend

$$S_y^x(x_k, y_j) = (U_p^i)_{k,j} \quad (k = 1, \dots, n ; j = 0, \dots, l)$$

für  $x \in (x_{k-1}, x_k)$

$$S_y^x(x, y_i) = (U_p^i)_{k-1,j} \frac{x_k - x}{h_k} + (U_p^i)_{k,j} \frac{x - x_{k-1}}{h_k} \quad (21)$$

angesetzt wird.

Die Ermittlung der Verschiebungen in y-Richtung an der Platte „j“ erfolgen in ganz entsprechender Weise.

Im Ergebnis der Durchführung des beschriebenen Vorgehens für alle Platten des Kastenträgersystems ist das vollständige Verschiebungsfeld aus den Verschiebungen der Berechnungspunkte bestimmt. Es ist damit der Übergang von den Berechnungspunkten auf alle inneren Punkte direkt und unter Umgehung der rückläufigen Superelementprozedur erfolgt.

Allen Berechnungen liegt ein Algorithmus zu Grunde, so daß die beschriebene Vorgehensweise leicht programmierbar ist. Mit den bekannten Verschiebungen können dann die inneren Kräfte und Spannungen an erforderlichen Stellen mit Hilfe gewöhnlicher FEM-Prozeduren berechnet werden.

### 2.3. Anwendungsbeispiel

Als Anwendungsbeispiel der Spline-Superelemente wird das Kastenträgersystem nach Bild 1 betrachtet. Jede Ebene des Kastenträgersystems wurde dabei als einzelnes SSE angesehen. Auf der zugewandten Fläche des Sy-

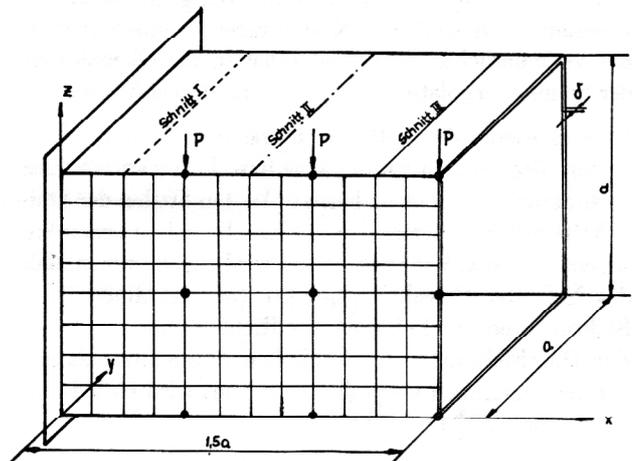


Bild 1  
Berechnungsschema eines Kastenträgersystems

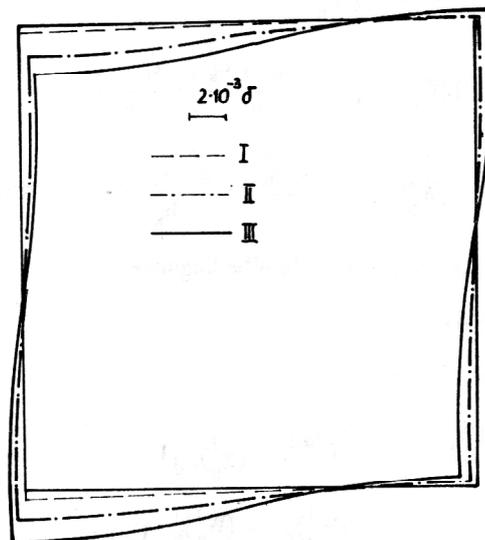


Bild 2  
Verformungen der Querschnittskontur

stems in Bild 1 ist die Zerlegung in einzelne finite Elemente gezeigt. Auch sind in dieser Fläche die Knoten des verdünnten Netzes hervorgehoben.

Als Parameter wurden gewählt:

$$\alpha = a/\delta = 80; \beta = \delta^2 E/P = 5,25; \nu = 0,3$$

Die Verschiebungen in den Schnitten I, II, III in der Ebene  $yoz$  sind in Bild 2 dargestellt. Wie die Ergebnisse zeigen, rufen unsymmetrisch angeordnete Belastungen Verformungen der Querschnittskontur hervor, die in den gleichen Größenordnungen liegen wie die des starren Körpers. Die von verschiedenen Autoren vertretene Annahme einer nicht verformbaren Querschnittskontur derartiger, nicht durch hinreichend viele Schotte ausgesteifter, Kastenträgersysteme bei unsymmetrischen Belastungen erweist sich als unzulässig.

#### 2.4. Anwendung der Berechnungsmethodik auf Systeme mit Steifigkeitssprüngen

Die Berechnungsmethodik nach den Beziehungen (14) – (21) ist nur für Kastenträgersysteme anwendbar, in denen für jede Platte des Systems alle Steifigkeitsparameter unveränderlich sind. Für Kastenträgersysteme mit Platten veränderlicher Steifigkeit erhalten die Gleichungen der Splineinterpolation ein leicht verändertes Aussehen.

Es wird wieder die Platte „i“ betrachtet, die in der Ebene  $xoy$  liegt und über ihre Länge bzw. Breite stufenweise veränderliche Steifigkeit besitzt. An den Stellen der Steifigkeitssprünge müssen unbedingt Berechnungspunkte angeordnet sein. Wie auch vorher wird angenommen, daß das Netz der Berechnungspunkte  $(m+1)$  Linien in  $x$ -Richtung und  $(n+1)$  Linien in  $y$ -Richtung hat.

Zur Durchführung einer kubischen Splineinterpolation auf den Netzlinien  $y = y_j$  ( $j = 0, \dots, m$ ) wird für jede Linie ein Spline  $S_y^z(x, y)$  nach

$$S_y^z(x_k, y_j) = (W_p^i)_{k,j} \quad k = 1, \dots, n; j = 0, \dots, m$$

für  $x \in (x_{k-1}, x_k)$ :

$$\begin{aligned} S_y^z(x, y_j) = & C_{k-1} \frac{(x_k - x)^3}{6 h_k} + C_k \frac{(x - x_{k-1})^3}{6 h_k} \\ & + [(W_p^i)_{k-1,j} - \frac{C_{k-1} h_k^2}{6}] \cdot \frac{x_k - x}{h_k} \\ & + [(W_p^i)_{k,j} - \frac{C_k h_k^2}{6}] \cdot \frac{x - x_{k-1}}{h_k} \end{aligned} \quad (22)$$

in Ansatz gebracht mit den Randbedingungen

$$2 C_0 + C_1 \cdot A_1/A_0 = B_0;$$

$$C_{n-1} + 2 C_n A_n/A_{n-1} = B_n$$

$$B_0 = \frac{6}{h_0} \left[ \frac{(W_p^i)_{1,j} - (W_p^i)_{0,j}}{h_0} - (X_p^i)_{0,j} \right]$$

$$B_n = \frac{6}{h_{n-1}} \left[ (X_p^i)_{n,j} - \frac{(W_p^i)_{n,j} - (W_p^i)_{n-1,j}}{h_{n-1}} \right]$$

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

Die Splinekoeffizienten  $C_k$  erhält man aus einem Gleichungssystem, dessen Aufbau der Beziehung (18) entspricht und in dem

$$T_k = h_k A_{k+1} / [A_k (h_k + h_{k-1} A_k/A_{k-1})]$$

$$d_k = h_{k-1} / (h_k + h_{k-1} A_k/A_{k-1})$$

$$P_k = 6 \frac{[(W_p^i)_{k+1,j} - (W_p^i)_{k,j}] / h_{k+1} - [(W_p^i)_{k,j} - (W_p^i)_{k-1,j}] / h_k}{h_k + h_{k-1} \cdot A_k/A_{k-1}}$$

$$k = 1, \dots, n-1$$

$$T_0 = A_1/A_0; \quad d_n = A_{n-1}/A_n$$

$$P_0 = B_0; \quad P_n = B_n A_{n-1}/A_n$$

(23)

zu setzen ist. Die  $A_0 \dots A_n$  sind darin Wichtungsfaktoren, die der Plattensteifigkeit

$$A_k = \frac{E_k \delta_k^3}{12 (1 - \nu_k^2)} \quad (24)$$

mit  $E_k, \nu_k, \delta_k$  als E-Modul, Querszahl bzw. Dicke des jeweiligen Plattenbereiches entsprechen.

Die weiteren Splines werden nach Beziehungen analog (15) – (21) aufgebaut, wobei die Ermittlung der Koeffizienten nicht nach (19) sondern hier nach (23) unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Steifigkeiten in den einzelnen Plattenbereichen vorzunehmen ist.

#### 2.5. Anwendung der Berechnungsmethodik auf Systeme mit nichtlinearem Materialverhalten

Die Splineinterpolation ist auch bei physikalisch nichtlinearem Materialverhalten einsetzbar. Es ist dabei die Methode der schrittweisen Belastung anzuwenden. Im ersten Schritt wird lineares Materialverhalten vorausgesetzt. Nach Ermittlung der Verschiebungen aller inneren Punkte werden in den finiten Elementen die inneren Kräfte und Spannungen berechnet. In den Bereichen, in denen die Spannungen die Elastizitätsgrenze überschreiten, werden die Steifigkeitsparameter entsprechend dem vorliegenden Materialdiagramm korrigiert. Anschließend wird der folgende Belastungsschritt behandelt und die Interpolation der inneren Verschiebungen unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Steifigkeit entsprechend Abschnitt 2.4. durchgeführt, wobei für die betreffenden Plattenbereiche bei der Ermittlung der  $A_k$  nach (24) anstelle  $E_k$  und  $\nu_k$  die nach dem ersten Schritt korrigierten Größen  $E_k^{(1)}$  und  $\nu_k^{(1)}$  verwendet werden. Die Belastungsschritte werden bis zum Erreichen des Endwertes der gegebenen Belastung fortgesetzt. Interessant erscheint der Fall, wenn die Spannungen bei Wirken der Gesambelastung nahe der Elastizitätsgrenze liegen und wegen eines groben FE-Netzes keine plastische Zone festgelegt werden kann. In diesem Fall wird für die betrachtete Platte eine zusätzliche Splineinterpolation mit einer bedeutend kleineren Schrittweite als die der inneren Knoten durchgeführt. Sofern die Splines nach (15) – (21) aufgebaut sind, bereitet dies wenig zusätzlichen Aufwand. Mit den entsprechend dieser Schrittweite kleineren finiten Elementen werden dann Spannungen berechnet, und es kann so ein nichtelastisches Gebiet abge-

grenzt werden. Dieses Verfahren kann auch zur Abschätzung der Größe des ersten Lastschrittes Anwendung finden. Wie bekannt, ist es wünschenswert, den ersten Lastschritt so zu wählen, daß nichtelastisches Materialverhalten nur in einigen kleinen Teilgebieten hervorgerufen wird. Folgendes Vorgehen wird empfohlen:

Auf dem groben FE-Netz werden die Verformungen des näherungsweise festgelegten ersten Lastschrittes ermittelt. Anschließend werden die Verschiebungen des dichten Netzes mit Hilfe der Splineinterpolation berechnet und damit die Spannungen. Wenn alle Spannungen im elastischen Bereich liegen, wird der Maximalwert bis zur Elastizitätsgrenze vergrößert und im gleichen Verhältnis die Belastung des ersten Schrittes für eine genauere Berechnung. Wenn aber die Spannungen in den nichtelastischen Bereich hineinragen, grenzt man die nichtelastischen Gebiete ab und der erste Lastschritt wird entweder erniedrigt, wenn diese Gebiete groß sind, oder beibehalten und für eine genauere Berechnung verwendet.

### 3. Zusammenfassung

Es wird im vorliegenden Beitrag eine effektive Methodik zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen eines Systems aus Spline-Superelementen sowie eine Methodik zur Ermittlung der Verschiebungen der inneren Knoten aus denen der Berechnungspunkte unter Verwendung der Splineinterpolation dargelegt. Die Anwendung dieser Methodik auf die Berechnung von Kastenträgersystemen wird gezeigt. Die Methodik wird verallgemeinert zur Anwendung auf Kastenträgersysteme mit veränderlichen Steifigkeitsparametern sowie auf physikalisch nichtlineare Systeme. Eine Verallgemeinerung auf thermoelastische Aufgaben und Stabilitätsprobleme von Kastenträgersystemen ist möglich.

### LITERATUR

- [1] Sapozhnikov, N. N.; Volkov, A. S.: Rascet plastinok i korobchatykh konstrukcij metodom konechnykh elementov. In: Issledovaniya po teorii soorushenij, vyp. 22, - M. Strojizdat, 1976.
- [2] Maslennikov, A. M.; Pletnev, V. I.: K rascetu metodom konechnykh elementov mnogojacejstyx korobchatykh sistem s oslablenjami. Stroitel'naja mehanika i rascet soorushenij, 1981 Nr. 4.
- [3] Nemcunov, Ju. I.; Kozyr, V. G.: Rascet tonkostennykh konstrukcij s ucetom momentnogo naprjashennogo sostojanija metodom prostranstvennykh konechnykh elementov. Stroitel'naja mehanika i rascet soorushenij, 1984, No. 2.
- [4] Postnov, V. A.; Dmitrijev, S. A.; Eltysev, B. K.; Radionov, A. A.: Sudostroenie 1979. Metod Superelementov v rascetach inshenernykh soorushenij.
- [5] Sapozhnikov, A. I.; Gorelov, S. F.: Rascet soorushenij metodom konechnykh elementov s poetashnym formirovanijem matricy shestskosti. Stroitel'naja mehanika i rascet soorushenij, 1982, No. 4.
- [6] Gorelov, S. F.: K rascetu po MKE konstrukcij, regularnykh v odnom napravlenii. Izvestija vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura, 1982, No. 7.
- [7] Ignatjev, V. A.: Metody superdiskritizacii v rascetach slozhnykh stershevykh sistem. Saratov: SGU, 1981.
- [8] Steekin, S. B.; Subbotin, Ju. N.: Spline v vychislitel'noj matematike. Nauka, 1976.