

# Ein Finite-Elemente-Programm für ebene und axialsymmetrische Strukturen mit viskoplastischem Materialverhalten

Dirk Sprengel

## 1. Einleitung

Die Berücksichtigung inelastischen Materialverhaltens in FEM-Programmsystemen ist zur Erhöhung der Betriebssicherheit einzelner Baugruppen bzw. zur besseren Materialauslastung notwendig. Anwendungsgebiete sind beispielsweise die Kernenergietechnik, der Chemieanlagen- und der Motorenbau.

Durch den Einsatz der Mikroelektronik in der Informatik setzte eine sprunghafte Hardwareentwicklung ein, welche rechenzeit- und speicherplatzintensive Berechnungen ermöglicht. Wichtiges Beispiel dafür ist die Berechnung von Kriechvorgängen. Eine FEM-Prozedur zur Berücksichtigung von Metallkriechen soll vorgestellt werden, welche am Programm RODVIT mit der Berechnung ebener und rotationssymmetrischer Strukturen getestet wurde. Dazu wurde ein allgemeines nicht-linear-inelastisches Deformationsgesetz (siehe [1]) für viskoplastisches Materialverhalten spezifiziert. Verfestigungseffekte werden berücksichtigt, um die Anwendung auf möglichst viele Materialgruppen zuzulassen.

## 2. Auswahl des Deformationsgesetzes

Bergander schlägt in [1] ein nichtlinear-inelastisches Deformationsgesetz für veränderliche Temperatur vor:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{J} \underline{\dot{\sigma}} + \underline{b} + \underline{b}_T \dot{T}$$

$$\underline{\dot{h}} = \underline{A} \underline{\dot{\sigma}} + \underline{c} + \underline{c}_T \dot{T} \quad (2.1)$$

( $\dot{\quad}$  bedeutet Ableitung nach der Zeit, Vektoren werden einmal, Matrizen zweimal unterstrichen)

Dabei bedeuten:

$\underline{\sigma}$  – Vektor aus Elementen des Spannungstensors,  
 $\underline{\epsilon}$  – Vektor aus Elementen des Dehnungstensors,  
 $\underline{h}$  – Vektor mit Hilfsvariablen, die den internen Zustand des Materials charakterisieren.

$\underline{J}$ ,  $\underline{A}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{b}_T$ ,  $\underline{c}$ ,  $\underline{c}_T$  sind Matrizen und Vektoren, die vom Zustand ( $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}$ ,  $\underline{h}$ ,  $T$ ) abhängig sind. Modifiziert man dieses Deformationsgesetz (2.1) nun für viskoplastisches Materialverhalten, so läßt sich für den viskoplastischen Dehnungsanteil formulieren:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{VP} = \underline{b}(\underline{\sigma}, p)$$

$$\dot{p} = c(\underline{\sigma}, p) \quad (2.2)$$

Durch die skalare Verfestigung  $p$  wird der interne Zustand des Materials (dem Vektor  $\underline{h}$  entsprechend) charakterisiert.

Gl. (2.2) kann nun nach [2] bzw. [4] näher bestimmt werden zu

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{VP} = \frac{3}{2\sigma_v} \cdot f(\sigma_v) \cdot g(p) \cdot \underline{s}$$

$$\dot{p} = f(\sigma_v) \cdot g(p) \quad (2.3)$$

$\underline{s}$  enthält die Anteile aus dem Deviator des Spannungstensors,  $\sigma_v$  entspricht der zweiten Invariante des Deviators. Ein Materialgesetz im engeren Sinne stellt  $f(\sigma_v)$  dar, welches den klassischen Annahmen für das stationäre Kriechen (siehe [5]) ähnelt und u. a. enthalten kann:

$$f(\sigma_v) = \begin{cases} B \cdot \sigma_v^b \\ B \sinh\left(\frac{\sigma_v}{b}\right) \end{cases} \quad (2.4)$$

Um ein schnelleres Kriechen bei höheren Temperaturen wiederzugeben, wird (siehe [2], S. 249) davon ausgegangen, daß der Parameter  $B$  temperaturabhängig ist. In der FEM-Formulierung kann diese Abhängigkeit von Punkt zu Punkt verschieden sein, so daß sich eine temperaturabhängige Änderung des Zeitmaßstabes, wie in [2] vorgeschlagen, nicht anbietet.

Mit Berechnung einer Verfestigung wird die Darstellung instationären Kriechens möglich.

Für die Verfestigungsfunktion kann

$$g(p) = \begin{cases} p^\beta \text{ für } p < p_c \\ p_c^\beta \text{ für } p \geq p_c \end{cases} \quad (2.5)$$

mit  $\beta < 0$  angegeben werden (siehe [2], S. 247).

Gl. (2.5) ermöglicht bei Anwendung auf den einachsigen Spannungszustand die Darstellung des Primär- und des Sekundärbereiches der Kriechkurve (siehe [5], S. 24). Bei Überschreitung des Wertes  $p_c$  bleibt  $g(p)$  konstant,  $\underline{\dot{\epsilon}}^{VP}$  ist nur noch von der Spannung abhängig.

Gl. (2.3) entspricht einem Deformationsgesetz mit Dehnungsverfestigung, bei welchem  $\underline{\dot{\epsilon}}^{VP}$  statt  $p$  verwendet wird, hat gegenüber einem solchen jedoch den Vorteil, daß  $\dot{p}$  immer nichtnegativ ist, so daß auch bei Umbelastungen bzw. bei negativer Dehnungsgeschwindigkeit  $\underline{\dot{\epsilon}}^{VP}$  die Verfestigung des Materials nicht abnimmt. Bei Anwendung des Gesetzes (2.3) wird davon ausgegangen, daß sich der Kriechprozeß bei jeder Spannung, also nicht erst nach Überschreiten einer bestimmten Fließgrenze, einstellt.

### 3. Berechnung der Zustandsänderung

#### 3.1. Programmaufbau

Die zu untersuchende Struktur wird in finite Elemente unterteilt, für die folgenden Erläuterungen soll die Deformationsmethode der FEM genutzt werden.

Aus den u. U. zeitlich veränderlichen Oberflächen- und Volumenkräften wird (für die gesamte Struktur) der Vektor der Knotenkräfte  $\underline{f}$  gebildet.

Die für die „viskoplastische Rechnung“ konstant bleibende Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  wird aufgebaut. Für den Aufbau von  $\underline{K}$  bzw.  $\underline{f}$  können vorhandene „elastische“ Module (in diesem Fall vom Programmsystem ROBDIS – siehe [6]) genutzt werden. Je nach Belastungsverlauf werden sowohl die Zeit als auch der Kraftvektor  $\underline{f}$  in Zeit- bzw. Lastschritte  $\Delta t^n$  bzw.  $\Delta \underline{f}^n$  unterteilt. Wegen der höheren Genauigkeit der Berechnung der Spannungen in den Gaußpunkten wird die Änderung des Zustandes ( $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}^{el}$ ,  $\underline{\epsilon}^{vp}$ ,  $p$ ) nur dort berechnet. Sollen Werte für Knotenpunkte der Struktur ausgegeben werden, wird extrapoliert. In jedem Gaußpunkt beginnt die Änderung der Zustandsgrößen  $\underline{\epsilon}^{vp}$  und  $p$  erst, wenn  $\sigma_v$  ungleich Null ist. Die Modifikation dieses Rechenschrittes wird in 3.2 erläutert. Da viskoplastisches Materialverhalten betrachtet wird, ist die Vermittlung einer Vorgeschichte nicht notwendig, von jedem Zeitschritt wird nur der Zustand ( $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}^{el}$ ,  $\underline{\epsilon}^{vp}$ ,  $p$ ) an den nächsten übergeben. Die der Zuwachsberechnung in jedem Zeitschritt zugrundeliegende FEM-Prozedur wird in 3.3. erläutert, die Auswahl der Intervallängen  $\Delta t^n$  wird in 3.5. beschrieben.

#### 3.2. Anfangsbedingungen

Liegen keine Anfangs- bzw. thermischen Dehnungen vor, welche einen Spannungszustand erzeugen können, sind alle Spannungen Null. Der erste Schritt entspricht dann einer „elastischen Rechnung“, die Berechnung viskoser Dehnungen und Verfestigungen nach (2.3) wird übersprungen. Für eine Verfestigung  $p = 0$  kann mit  $\beta < 0$  die Verfestigungsfunktion nicht nach (2.5) berechnet werden. Um diese Singularität bei der Lösung des Differentialgleichungssystems (2.3) zu umgehen, muß man entweder jedem Verfestigungswert  $p$  zu Beginn der Rechnung einen Anfangswert  $p_0$  zuweisen oder bei  $p = 0$  eine andere Form der Lösung des Systems (2.3) finden. Weist man zu Beginn der Rechnung allen Verfestigungen einen bestimmten Anfangswert  $p_0$  zu, so ist gesichert, daß allen Zeitschritten der gleiche Algorithmus zugrunde liegt. Jedoch ist die Auswahl der Anfangswerte  $p_0$  kritisch, da sie zum einen sehr klein sein sollen, um die Verfestigungen nicht zu verfälschen, zum anderen werden bei zu kleinen Anfangswerten die Geschwindigkeiten  $\dot{p}$  und  $\dot{\underline{\epsilon}}^{vp}$  im ersten Zeitschritt zu groß.

Aus diesem Grunde wurde eine Variante gewählt, welche bei vorliegender Vergleichsspannung ( $\sigma_v^n \neq 0$ ) und  $p^n = 0$  das Differentialgleichungssystem (2.3) exakt integriert. Man erhält für die Verfestigung:

$$p^{n+1} = [(1 - \beta) \cdot f(\sigma_v^n) \cdot \Delta t^n]^{1 - \beta} \quad (3.1)$$

mit  $p^n = 0$

Mit dieser Methode werden in jedem Gaußpunkt die für den Beginn der viskoplastischen Dehnungsberechnung exakten Anfangsbedingungen berechnet.

#### 3.3. FEM-Prozedur

Eine FEM-Prozedur soll vorgestellt werden, welche aus einem Anfangszustand, symbolisiert durch  $A$  ( $\underline{\sigma}_A$ ,  $\underline{\epsilon}_A^{el}$ ,  $\underline{\epsilon}_A^{vp}$ ,  $p_A$ ) und bekannten Geschwindigkeiten  $G$  ( $\dot{\underline{\epsilon}}_G^{vp}$ ,  $\dot{p}_G$ ) in jedem Gaußpunkt sowie bekanntem Kraftvektor  $\Delta \underline{f}$  für die Struktur und einer vorgegebenen Intervallänge  $\Delta t$  den Endzustand  $E$  ( $\underline{\sigma}_E$ ,  $\underline{\epsilon}_E^{el}$ ,  $\underline{\epsilon}_E^{vp}$ ,  $p_E$ ) berechnet. Die Prozedur entspricht einer Modifikation der in [9], S. 278 ff. von Owen und Hinton angegebenen Prozedur, geht jedoch von einer während der gesamten Rechnung konstanten Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  aus.

a) In jedem Gaußpunkt wird der Zuwachs

$$\Delta \underline{\epsilon}^{vp} = \underline{\dot{\epsilon}}_G^{vp} \cdot \Delta t \text{ und } \Delta p = \dot{p}_G \cdot \Delta t \quad (3.2)$$

berechnet.

b) In jedem Element wird, analog dem aus den Anfangsdehnungen resultierenden Kraftvektor (siehe [7], S. 154) ein Knotenkraftvektor  $\Delta \underline{f}_e$  aus den  $\Delta \underline{\epsilon}^{vp}$  gebildet:

$$\Delta \underline{f}_e = \int_{\text{Vol.}} \underline{D}_{Ge}^T \cdot \underline{H}_e \cdot \Delta \underline{\epsilon}_e^{vp} d \text{Vol.} \quad (3.3)$$

$\underline{D}_{Ge}$ ,  $\underline{H}_e$  – auf die Matrix der Verschiebungsansätze angewandte Differentialmatrix sowie Hookesche Matrix im Element.

$\Delta \underline{\epsilon}_e^{vp}$  – Vektor aller  $\Delta \underline{\epsilon}^{vp}$  im Element.

c) Die Vektoren  $\Delta \underline{f}_e$  werden zum Vektor  $\Delta \underline{f}$  addiert:

$$\Delta \underline{f}^* = \sum_{n=1}^{\text{IELEM}} \Delta \underline{f}_e + \Delta \underline{f} \quad (3.4)$$

wobei IELEM die Anzahl der finiten Elemente ist.

d) Mit  $\Delta \underline{u} = \underline{K}^{-1} \cdot \Delta \underline{f}^*$  (3.5)

werden die Gesamtverschiebungszuwächse berechnet.

e) Aus diesen wird elementweise der Gesamtdehnungszuwachs und aus diesem der Zuwachs an elastischen Dehnungen bestimmt:

$$\Delta \underline{\epsilon}_e = \underline{D}_{Ge} \cdot \Delta \underline{u}_e \quad (3.6)$$

$$\Delta \underline{\epsilon}_e^{el} = \Delta \underline{\epsilon}_e - \Delta \underline{\epsilon}_e^{vp} \quad (3.7)$$

woraus der Spannungszuwachs mit

$$\Delta \underline{\sigma}_e = \underline{H}_e \cdot \Delta \underline{\epsilon}_e^{el} \quad (3.8)$$

berechnet werden kann.

f) In allen Gaußpunkten kann nun der Endzustand nach

$$\underline{\sigma}_E = \underline{\sigma}_A + \Delta \underline{\sigma}$$

$$\underline{\epsilon}_E^{el} = \underline{\epsilon}_A^{el} + \Delta \underline{\epsilon}^{el}$$

$$\underline{\epsilon}_E^{VP} = \underline{\epsilon}_A^{VP} + \Delta \underline{\epsilon}^{VP} \quad (3.9)$$

$$p_E = p_A + \Delta p$$

ermittelt werden.

Diese Prozedur soll symbolisch durch

$$E = \text{proz} (A + G \cdot \Delta t) \quad (3.10)$$

dargestellt werden. Die Anwendung des Deformationsgesetzes (2.3) auf den Zustand X werde mit

$$G = \text{defo} (X) \quad (3.11)$$

symbolisiert.

### 3.4. Integrationsverfahren für die Zuwachsberechnung

Im Programm RODVIT wurden das Eulersche Polygonzugverfahren, ein Halbzeitschritt- und ein Iterationsverfahren getestet. Bei allen Verfahren wird vom Nutzer eine feste Intervalllänge (siehe 3.5) vorgegeben. Eine automatische Intervalllängenänderung wurde nicht getestet.

- a) Bei Anwendung des Eulerschen Verfahrens wird der Zuwachs in jedem Zeitschritt mit den aus dem Anfangszustand nach (2.3) berechneten Geschwindigkeiten:

$$G = \text{defo} (A) \quad (3.12)$$

berechnet, und es ergibt sich für den Endzustand in jedem Intervall:

$$E = \text{proz} (A + G \cdot \Delta t) \quad \text{oder} \quad (3.13)$$

$$E = \text{proz} (A + \text{defo} (A) \cdot \Delta t) \quad (3.14)$$

- b) Bei Nutzung des Halbzeitschrittverfahrens wird zunächst (wie bei a)) ein Zustand M in Intervallmitte berechnet:

$$G_A = \text{defo} (A) \quad (3.15)$$

$$M = \text{proz} (A + G_A \cdot \frac{\Delta t}{2}) \quad (3.16)$$

Mit den in Intervallmitte berechneten Geschwindigkeiten

$$G_M = \text{defo} (M) \quad (3.17)$$

wird nun der gesuchte Endzustand bestimmt:

$$E = \text{proz} (A + G_M \cdot \Delta t) \quad (3.18)$$

Das Halbzeitschrittverfahren liefert bei Anwendung auf typische Kriechkurven bessere Ergebnisse als die Eulersche Polygonzugregel (siehe a)).

- c) Beim angewendeten Iterationsverfahren wird zunächst

$$G_0 = \text{defo} (A) \quad (3.19)$$

berechnet.

Dann läuft jeder Iterationsschritt ( $i \geq 1$ ) folgendermaßen ab:

$$\text{Mit } G_{\Theta i} = G_0 (\Theta - 1) + G_{i-1} \cdot \Theta \quad (3.20)$$

werden gemittelte Geschwindigkeiten berechnet. Unter  $G \cdot \Theta$  soll Multiplikation der Geschwindigkeiten  $\underline{\epsilon}_G^{VP}$  und  $\dot{p}_G$  mit  $\Theta$  verstanden werden.

Der i-te Endzustand wird nach

$$E_i = \text{proz} (A + G_{\Theta i} \cdot \Delta t) \quad (3.21)$$

bestimmt.

Es wird  $G_i$  aus

$$G_i = \text{defo} (E_i) \quad (3.22)$$

berechnet und abgefragt, ob

$$\frac{200 \sum_{G.P.} (|G_i - G_{i-1}|)}{\sum_{G.P.} (|G_i + G_{i-1}|)} \leq \text{eps (in \%)} \quad (3.23)$$

ist.

Unter  $\sum_{G.P.} (G_i - G_{i-1})$  soll die Summation der Ge-

schwindigkeitsdifferenzen  $\dot{p}_i - \dot{p}_{i-1}$  über alle Gaußpunkte verstanden werden. Wird (3.23) erfüllt, ist  $E_i$  der gesuchte Endzustand, wird (3.23) nicht erfüllt, erfolgt ein Rücksprung zu (3.20) in den nächsten Iterationsschritt ( $i = i+1$ ). Für das Iterationsverfahren wird gegenüber dem Euler-Verfahren doppelter Speicherplatz für die Speicherung der Zustände A und  $E_i$  und etwa i-fache Rechenzeit (bei i Iterationschleifen) benötigt.

Wird in (3.20)  $\Theta = 0$  gewählt, erhält man das Eulerverfahren, für  $\Theta = \frac{1}{2}$  entsteht ein dem Runge-Kutta-Verfahren mit 2 Stützstellen ähnlicher Algorithmus (siehe auch [8]).

### 3.5. Auswahl der Intervalllänge

Ein Problem bei den vorgestellten Integrationsverfahren ist die Wahl der Zeitschritte  $\Delta t$ . Die Anzahl der Unterteilungen und die Länge der Gesamtzeit müssen vom Nutzer angegeben werden. Sowohl eine gleichmäßige Intervallteilung als auch eine ungleichmäßige mit  $\Delta t^{n+1} = K \cdot \Delta t^n$  können gewählt werden. In [9] wird dazu  $K \leq 1.5$  vorgeschlagen. Die Auswirkung der Fehler in den viskoplastischen Dehnungen auf die Spannungen (siehe FEM-Prozedur) hängt direkt (siehe (3.2)) von der Größe der Schritte  $\Delta t$  ab.

Deshalb wird in jedem Gaußpunkt folgende Abfrage genutzt:

$$\sum_i \left\{ |\epsilon_i^{el}| - \frac{1}{\chi} |\Delta \epsilon_i^{VP}| \right\} \geq 0 \quad (3.24)$$

Summiert wird über alle Komponenten der Vektoren  $\underline{\epsilon}^{el}$  bzw.  $\underline{\epsilon}^{VP}$ . In [9] wird für eine ähnliche Abfrage (siehe S. 276 ff.), bei welcher statt der elastischen die Gesamtdehnungen genutzt werden,  $6 < \chi \leq 100$  empfohlen. In [10] wird allgemein für Kriechprozesse  $\chi > 2$  vorgeschlagen (S. 438). Wird (3.24) nicht erfüllt, erfolgt

ein Abbruch der Rechnung. Sollen umfangreiche Strukturen berechnet werden, bietet sich die Suche nach geeigneten Intervalllängen an einem kleinen Beispiel mit ähnlichen Materialparametern und Belastungen an.

#### 4. Beispiel

Mit dem Programm RODVIT wurde die zeitabhängige Spannungsänderung bei einer rotierenden Kreisscheibe (mit einem Profil nach Bild 1), (siehe [4], S. XXX(9 ff.)) untersucht. Die Scheibe rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 754 \text{ s}^{-1}$ , der Außenrand wird durch Zug  $p_a = 172 \text{ N/mm}^2$  belastet. Als Materialgesetz im engeren Sinne (siehe 2.4.) wurde das Norton'sche:

$$f(\sigma_v) = B \sigma_v^b$$

gewählt. Für den sowjetischen Stahl 3N69 wurden (analog zu [4]) für eine Temperatur  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$  folgende Materialparameter genutzt:

$$E = 1.4 \text{ E}5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,45$$

$$\rho = 7,85 \text{ E-}6 \text{ kg/mm}^3$$

$$B = 1,53 \text{ E-}13 \text{ (N/mm}^2\text{)}^{-b} \text{ h}^{-\beta}$$

$$b = 3$$

$$\beta = -0,343$$

Es wird vorausgesetzt, daß nur Sekundärkriechen auftritt. Die Scheibe wurde (siehe Bild 1) in 37 Rechteck- und 9 Dreieckelemente vernetzt. Die zeitabhängige Spannungsverteilung wird in Bild 2 dargestellt. Die Spannungsumlagerung für zwei Schnitte bei konstantem Radius wird in Bild 3 und 4 gezeigt.

Es ist zu erkennen, daß sich die Spannungsunterschiede (für  $r = \text{const}$ ) durch den Kriechprozeß verringern. Die angegebenen Ergebnisse stimmen prinzipiell mit den in [4] angegebenen überein. Dort wurde der Spannungsverlauf durch Lösung eines Differentialgleichungssystems für Scheiben berechnet.

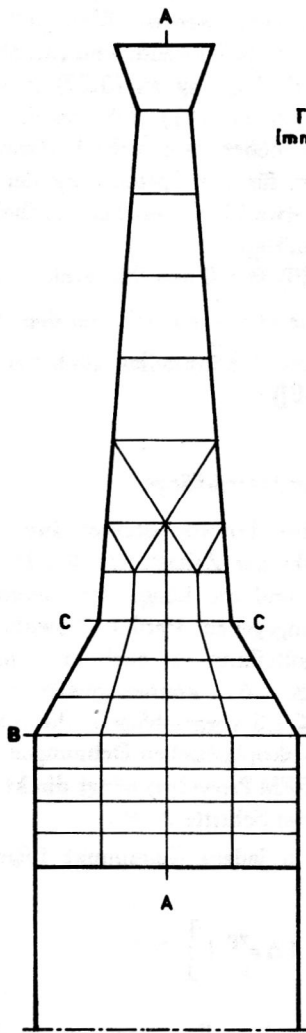


Bild 1  
Profil und Vernetzung der untersuchten Scheibe

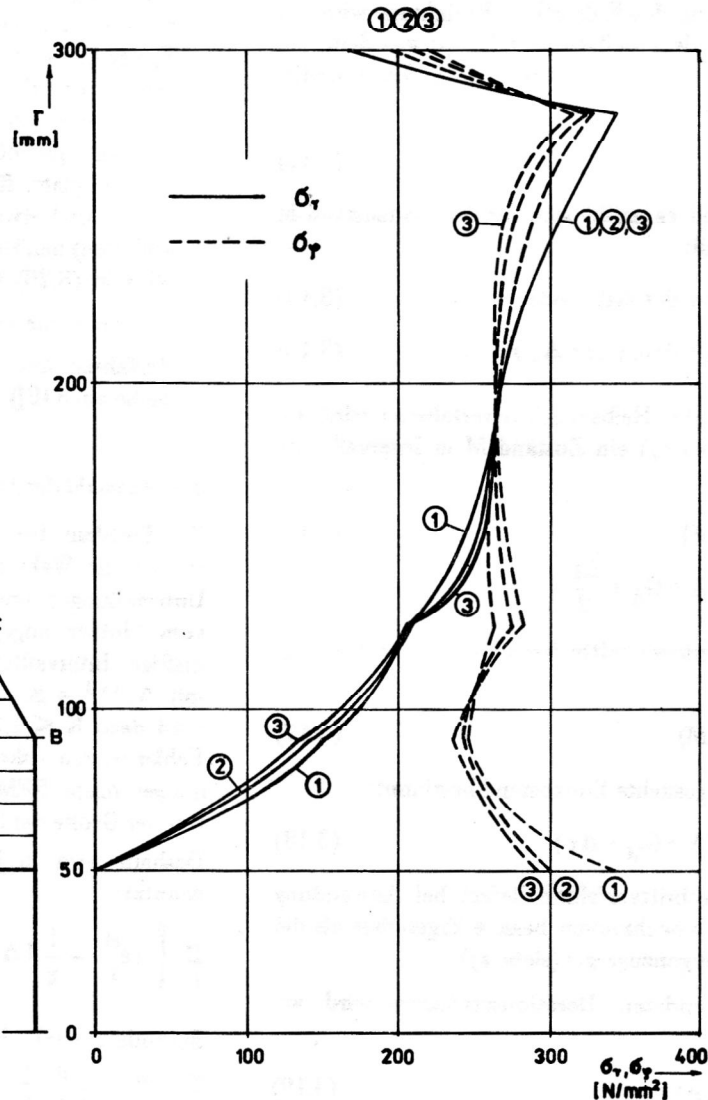
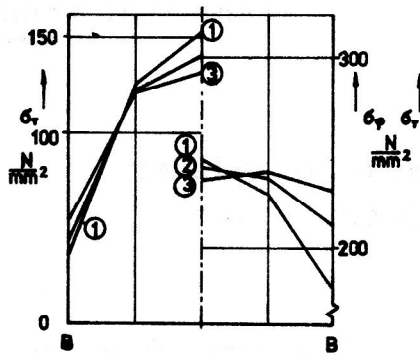
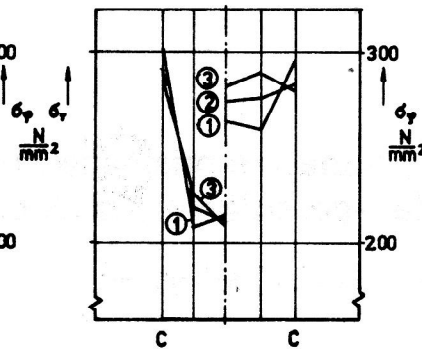


Bild 2  
Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$  im Schnitt A-A für die Zeiten  $T = 0$  (Kurve 1),  $T = 30 \text{ h}$  (2) und  $T = 200 \text{ h}$  (3)



**Bild 3**  
Zeitabhängige Spannungsverteilung  
im Schnitt B-B für  $T = 0$   
(Kurve 1),  $T = 30\text{ h}$  (2) und  
 $T = 200\text{ h}$  (3)



**Bild 4**  
Zeitabhängige Spannungsverteilung  
im Schnitt C-C für  $T = 0$   
(Kurve 1),  $T = 30\text{ h}$  (2) und  
 $T = 200\text{ h}$  (3)

## LITERATUR

- [ 1 ] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen. ZAMM 58 (1978), S. 489 – 499.
- [ 2 ] Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeit. Bd. 2 / Leipzig, Fachbuchverlag 1985.
- [ 3 ] Bergander, H.: Einheitliches Konzept der Gleichungen des nichtlinear-inelastischen Materialverhaltens für FEM-Programmentwicklungen. WBZ FKM, Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz, Vorträge zum Problemseminar Finite Elemente II, Heft 5/77, TU Dresden 1977.
- [ 4 ] Wesselinow, K.; Georgi, G.: Beanspruchung von dickwandigen Hohlkugeln, dünnen Kreisringscheiben, dickwandigen Hohlzylindern und dicken Kreis- und Kreisringplatten bei erhöhten Temperaturen. Tagung Festkörpermechanik, Festigkeitslehre und Materialverhalten, Band B, Dresden 1976, Fachbuchverlag Leipzig 1976.
- [ 5 ] Odqvist, F. K. G.; Hult, J.: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962.
- [ 6 ] Fischer, U.: Finite-Elemente-Programme in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1986.
- [ 7 ] Dankert, J.: Numerische Methoden der Mechanik. Leipzig, Fachbuchverlag 1977.
- [ 8 ] Kamke, E.: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I. gewöhnliche Differentialgleichungen, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Potig K.-G., Leipzig 1961, 7. unveränderte Auflage.
- [ 9 ] Owen, D. R. J.: Finite elements in plasticity: theory and practice. D. R. J. Owen; E. Hinton – Swansea, U. K., Pineridge Press, 1980 – XII, 549 S.
- [ 10 ] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1984.