

# Statische und dynamische Analyse für prismatische und nichtprismatische Kastenträger

Johannes Altenbach, Wolfgang Kissing

## 1. Einleitung

Die halbmomentenfreie Schalentheorie von Wlassow hat sich vielfach für die strukturmechanische Analyse von Tragwerken bewährt. In [1] wurde eine Erweiterung des halbmomentenfreien Schalenmodells vorgenommen und auf die statische Analyse prismatischer Kastenträger angewendet.

Der vorliegende Beitrag ist eine Weiterführung der in [1] vorgenommenen Erweiterung in folgender Richtung:

- Formulierung der allgemeinen Gleichungen für die statische Analyse nichtprismatischer Kastenträger
- Anwendung des Modells der halbmomentenfreien Schale auf die Eigenschwingungsanalyse prismatischer Kastenträger
- Verallgemeinerung der Lösungskonzepte

Es werden die problemrelevanten Differentialgleichungssysteme und die zugehörigen Lösungsansätze angegeben, auf die Diskussion ausgewählter Beispiele wird hier verzichtet.

## 2. Erweiterungen der verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie auf die statische Analyse konischer Kastenträger

Betrachtet werden schwachkonische einzellige Kastenträger nach Bild 1. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie beim prismatischen Kastenträger [1]. Auf die Berücksichtigung der Querdehnungen  $\epsilon_s$  der Wandelemente wird hier jedoch verzichtet, ebenso auf das Einbeziehen der Biegesteifigkeit  $I_y$  möglicher Querversteifungen um deren Hauptachse normal zur Blechwand.

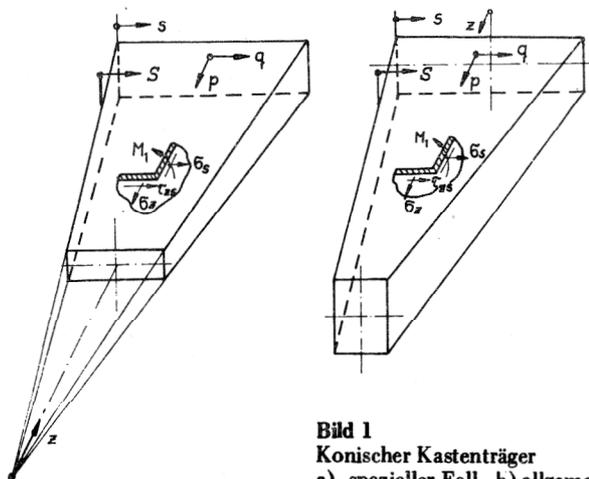


Bild 1  
Konischer Kastenträger  
a) spezieller Fall, b) allgemeiner Fall

Beim speziellen Fall (Bild 1 a) schneiden sich alle Kanten des Kastenträgers im Ursprung der Koordinate z. Durch diese geometrische Einschränkung der Konizität ist es möglich, die Umlaufkoordinate S des Querschnittes an einer beliebigen Stelle z durch eine lineare Funktion auf die Koordinate s in einem beliebigen Bezugsquerschnitt des Kastenträgers zu beziehen

$$S(z) = s \cdot \frac{z}{l} = s \cdot \xi \quad (1a)$$

Für den allgemeinen Fall (Bild 1 b) sind hierfür zwei lineare Funktionen erforderlich, um die unterschiedliche Veränderlichkeit von Höhe und Breite zu beschreiben.

$$S(z) = f_i(z) \cdot s, \quad i = 1, 2 \quad (1b)$$

In Analogie zum prismatischen Kastenträger können die zugeordneten DGL-Systeme entweder aus dem elastischen Potential oder durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleitet werden (siehe auch [2]).

Für den speziellen Fall erhält man

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{d}{d\xi} [\xi^{\alpha_i + \alpha_j + 1} U_i'(\xi)] \\ & - \sum_{i=1}^m b_{ij} \xi^{\alpha_i + \alpha_j - 1} U_i(\xi) \\ & - \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n c_{kj} \xi^{\alpha_j + \beta_k} V_k'(\xi) \\ & + \frac{1}{G} \cdot \xi^{\alpha_j + 1} p_j^*(\xi) = 0 \\ & j = 1, 2, \dots, m \\ & + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^m e_{ih} \frac{d}{d\xi} [\xi^{\alpha_i + \beta_h} U_i(\xi)] \\ & + \frac{1}{l^2} \sum_{k=1}^n r_{kh} \frac{d}{d\xi} [\xi^{\beta_k + \beta_h + 1} V_k(\xi)] \\ & - \gamma \sum_{k=1}^n s_{kh} \xi^{\beta_k + \beta_h - 3} V_k(\xi) \\ & + \frac{1}{G} \xi^{\beta_h + 1} q_h(\xi) = 0 \\ & h = 1, 2, \dots, n \\ & \gamma = E/G \end{aligned} \quad (2)$$

Die verallgemeinerten Koordinaten  $\varphi_i(S)$  und  $\psi_k(S)$  der Produktansätze für die Verschiebungen u und v

$$u(z, S) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i(S)$$

$$v(z, S) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(S) \quad (3)$$

und die Querbiegemomente  $M_k(S)$  infolge  $V_k = 1$  des Produktansatzes der Querbiegemomente  $M$

$$M(z, S) = \sum_{k=1}^n V_k(z) M_k(S) \quad (4)$$

können für diesen Fall mit Hilfe der Werte im Bezugsquerschnitt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \varphi_i(S) &= \zeta^{\alpha_i} \varphi_i(s) \\ \psi_k(S) &= \zeta^{\beta_k} \psi_k(s) \\ M_k(S) &= \zeta^{\beta_k - 2} M_k(s) \end{aligned} \quad (5)$$

Die konstanten Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{kj}$ ,  $e_{ih}$ ,  $r_{kh}$  und  $s_{kh}$  entsprechen den in [1] definierten verallgemeinerten Querschnittswerten für den Bezugsquerschnitt, ebenso die verallgemeinerten Längs- und Querbelastrungen  $p_j$  und  $q_h$ . Für  $s_{kh} = 0$  erhält man die Gleichungen für das entsprechende Gelenkfaltwerk.

Der allgemeine Fall nach Bild 1 b führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\gamma \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^m \frac{d}{d\zeta} [a_{ij}(\zeta) U_i'(\zeta)] \\ &- \sum_{i=1}^m b_{ij}(\zeta) U_i(\zeta) \\ &- \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n c_{kj}(\zeta) V_k'(\zeta) + \frac{1}{G} p_j^*(\zeta) = 0 \\ &\quad j = 1, 2, \dots, m \\ &\frac{1}{l} \sum_{i=1}^m \frac{d}{d\zeta} [e_{ih}(\zeta) U_i(\zeta)] \\ &+ \frac{1}{l^2} \sum_{k=1}^n \frac{d}{d\zeta} [r_{kh}(\zeta) V_k'(\zeta)] \\ &- \gamma \sum_{k=1}^n s_{kh}(\zeta) V_k(\zeta) + \frac{1}{G} q_h(\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$h = 1, 2, \dots, n$

Die verallgemeinerten Querschnittswerte sind hier Funktionen der Koordinate  $\xi$ .

Von Obraszow [3] wurden die Gleichungen (2) sinngemäß angegeben.

### 3. Anwendung des Berechnungsmodells auf die Eigenschwingungsanalyse prismatischer Konstruktionen

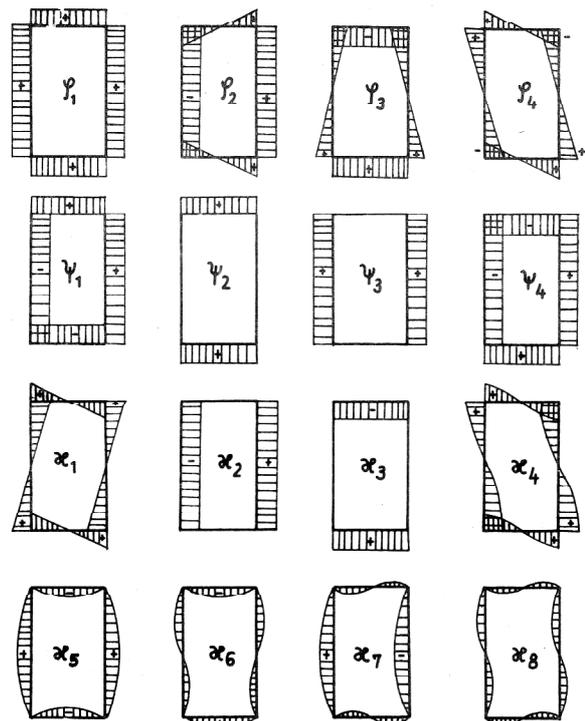
Die Anwendung des Wlassowmodells auf Eigenschwingungsberechnungen erfordert die zusätzliche Berücksichtigung der Verschiebungskomponente  $w$  normal zur Blechwand und die Einbeziehung der Zeitabhängigkeit.

$$u(z, s, t) = \sum_{i=1}^m U_i(z, t) \varphi_i(s)$$

$$v(z, s, t) = \sum_{k=1}^n V_k(z, t) \psi_k(s)$$

$$w(z, s, t) = \sum_{k=1}^N V_k(z, t) \kappa_k(s) \quad (7)$$

Es treten damit die neuen verallgemeinerten Koordinaten  $\kappa_k(s)$  auf. Sie kennzeichnen  $N$  Normalverschiebungszustände. Die ersten  $n$  Normalverschiebungszustände hängen unmittelbar mit den Querverschiebungen zusammen, die restlichen  $(N-n)$  resultieren allein aus Drehungen der Querschnittskanten und sind nicht von Querverschiebungen begleitet. Bild 2 zeigt einen möglichen Satz verallgemeinerter Koordinaten für den einzelligen doppelsymmetrischen Kastenquerschnitt.



**Bild 2**  
Auswahl verallgemeinerter Koordinaten für einen einzelligen Kastenträger

Das entsprechende DGL-System erhält man jetzt bei Vernachlässigung der Dämpfungseinflüsse in folgender Form

$$\begin{aligned} &\gamma \sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 U_i(z, t)}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^m b_{ij} U_i(z, t) \\ &+ \sum_{k=1}^n c_{kj} \frac{\partial V_k(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{G} \sum_{i=1}^m \bar{a}_{ij} \frac{\partial^2 U_i(z, t)}{\partial t^2} = 0 \\ &\quad j = 1, \dots, m \\ &\sum_{i=1}^m e_{ih} \frac{\partial U_i(z, t)}{\partial z} + \sum_{k=1}^n r_{kh} \frac{\partial^2 V_k(z, t)}{\partial z^2} \\ &- \gamma \sum_{k=1}^N s_{kh} V_k(z, t) - \frac{1}{G} \sum_{k=1}^n \bar{r}_{kh} \frac{\partial^2 V_k(z, t)}{\partial t^2} \\ &- \frac{1}{G} \sum_{k=1}^N \bar{g}_{kh} \frac{\partial^2 V_k(z, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$h = 1, \dots, n$$

$$E \sum_{k=1}^N s_{kh} V_k(z, t) + \sum_{k=1}^N \bar{g}_{kh} \frac{\partial^2 V_k(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

$$h = n+1, \dots, N$$

Dabei wurden  $\bar{a}_{ij}$ ,  $\bar{r}_{kh}$  und  $\bar{g}_{kh}$  als verallgemeinerte Massenträgheiten eingeführt

$$\bar{a}_{ij} = \int \mu \varphi_i \varphi_j ds$$

$$\bar{r}_{kh} = \int \mu \psi_k \psi_h ds$$

$$\bar{g}_{kh} = \int \mu \kappa_k \kappa_h ds \quad (9)$$

$\mu$  ist hierin die auf die Fläche bezogene Masse ( $dm = \mu dzds$ ). Das partielle DGL-System (8) wird mit den Ansätzen

$$U_i(z, t) = U_i(z) \sin \omega t$$

$$V_k(z, t) = V_k(z) \sin \omega t$$

in ein System gewöhnlicher DGLn. überführt.

$$\frac{\gamma}{l^2} \sum_{i=1}^m a_{ij} U_i''(\xi) - \sum_{i=1}^m (b_{ij} - \frac{\omega^2}{G} \bar{a}_{ij}) U_i(\xi) - \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n c_{kj} V_k'(\xi) = 0$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\frac{1}{l} \sum_{i=1}^m e_{ih} U_i'(\xi) + \frac{1}{l^2} \sum_{k=1}^n r_{kh} V_k''(\xi) - \sum_{k=1}^N (\gamma s_{kh} - \frac{\omega^2}{G} \bar{g}_{kh}) V_k(\xi) + \sum_{k=1}^n \frac{\omega^2}{G} \bar{r}_{kh} V_k(\xi) = 0 \quad (10)$$

$$h = 1, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^N (E s_{kh} - \omega^2 \bar{g}_{kh}) V_k(\xi) = 0$$

$$h = n+1, \dots, N$$

Die letzten  $(N-n)$  partiellen DGLn. aus (8) gehen dabei in homogene Gleichungen für  $V_k$  über.

#### 4. Verallgemeinerung des Lösungsansatzes

Analytische Lösungsmethoden, wie sie u. a. in [1] beschrieben wurden, sind bei der hier vorgenommenen Erweiterung der Modellklasse nur für wenige Sonderfälle anwendbar.

Aus umfangreichen Untersuchungen über die Anwendung numerischer Lösungsverfahren resultiert die Aussage, daß entweder die Reduktion der DGL-Systeme auf kanonische Systeme bzw. eine Finite-Elemente-Formulierung zu effektiven numerischen Lösungen führt. Die beiden Wege werden im folgenden kurz beschrieben.

In beiden Fällen ist es erforderlich, zur Festlegung dynamischer Randbedingungen noch verallgemeinerte Schnittgrößen einzuführen

$$P_j = \int \sigma_z \cdot \varphi_j \delta ds \quad (11)$$

$$Q_h = \int \tau_{zs} \psi_h \delta ds$$

Die daraus folgenden Darstellungen mit den verallgemeinerten Verschiebungen  $U_i$  und  $V_k$  können [1] entnommen werden.

#### 4.1. Reduktion auf kanonische DGL-Systeme

Zur Überführung der DGL-Systeme (6) in ein System kanonischer DGL n. werden die folgenden Vektoren und Matrizen definiert

$$\begin{aligned} \underline{u}_m^T &= [U_1 \dots U_m]; & \underline{u}_n^T &= [V_1 \dots V_n] \\ \underline{p}^T &= [P_1 \dots P_m]; & \underline{q}^T &= [Q_1 \dots Q_n] \\ \underline{p}^{*T} &= [p_1^* \dots p_m^*]; & \underline{q}^T &= [q_1 \dots q_n] \\ \underline{A} &= [a_{ij}]; & \underline{B} &= [b_{ij}]; & \underline{C} &= [c_{kj}] \\ \underline{E} &= \underline{C}^T; & \underline{R} &= [r_{kh}]; & \underline{S} &= [s_{kh}] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} i, j &= 1, \dots, m \\ k, h &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Man erhält das kanonische System

$$\underline{y}' = \underline{\mathcal{L}} \cdot \underline{y} \quad (13)$$

mit

$$\underline{y}^T = [\underline{u}_m^T \quad \underline{u}_n^T \quad \underline{p}^T \quad \underline{q}^T \quad 1]$$

$$\underline{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \frac{1}{E} \underline{A}^{-1} & \underline{0} & \underline{0} \\ -1 \underline{R}^{-1} \underline{C}^T & \underline{0} & \underline{0} & \frac{1}{G} \underline{R}^{-1} & \underline{0} \\ G l [\underline{B} - \underline{C} \underline{R}^{-1} \underline{C}^T] & \underline{0} & \underline{0} & l \underline{C} \underline{R}^{-1} & -1 \underline{p}^* \\ \underline{0} & E l \underline{S} & \underline{0} & \underline{0} & -1 \underline{q} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Der Vektor  $\underline{y}$  hat  $2(m+n)+1$  Komponenten und die Matrix  $\underline{\mathcal{L}}$  somit das Format  $[2(m+n)+1, 2(m+n)+1]$ .

Zur Überführung der Gleichungen (10) in ein kanonisches System müssen in Ergänzung zu (12) noch folgende Matrizen definiert werden.

$$\underline{\bar{A}} = [\bar{a}_{ij}]; \quad \underline{\bar{R}} = [\bar{r}_{kh}]; \quad \underline{\bar{G}} = [\bar{g}_{kh}] \quad (15)$$

Ferner ist zu beachten, daß die Matrix  $\underline{S}$  jetzt das Format  $[N, N]$  hat, ebenso wie die Matrix  $\underline{\bar{G}}$ .

Man erhält für die Schwingungsanalyse das kanonische System in Form

$$\underline{y}' - \underline{\mathcal{L}}^* (\omega^2) \cdot \underline{y} \quad (16)$$

mit

$$\underline{y}^T = [\underline{u}_m^T \quad \underline{u}_n^T \quad \underline{p}^T \quad \underline{q}^T]$$

$$\underline{\mathcal{L}}^*(\omega^2) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \frac{1}{E} \underline{A}^{-1} & \underline{0} \\ -1 \underline{R}^{-1} \underline{C}^T & \underline{0} & \underline{0} & \frac{1}{G} \underline{R}^{-1} \\ \underline{L}_1(\omega^2) & \underline{0} & \underline{0} & 1 \underline{C} \underline{R}^{-1} \\ \underline{0} & \underline{L}_2(\omega^2) & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

In Gleichung (17) hat der Vektor  $\underline{y}$   $2(m+n)$  Komponenten und die Matrix  $\underline{\mathcal{L}}^*$  das Format  $[2(m+n), 2(m+n)]$ . Ferner wurden die Abkürzungen  $\underline{L}_1$  und  $\underline{L}_2$  eingeführt.

$$\begin{aligned} \underline{L}_1(\omega^2) &= 1[\underline{G}(\underline{B} - \underline{C} \underline{R}^{-1} \underline{C}^T) - \omega^2 \underline{A}] \\ \underline{L}_2(\omega^2) &= 1[E \underline{S}_{11} - \omega^2(\underline{G}_{11} + \underline{R})] \end{aligned} \quad (18)$$

$$- (E \underline{S}_{12} - \omega^2 \underline{G}_{12})(E \underline{S}_{22} - \omega^2 \underline{G}_{22})^{-1} (E \underline{S}_{12} - \omega^2 \underline{G}_{12})^T ]$$

Die Matrizen  $\underline{S}$  und  $\underline{G}$  wurden dazu in Untermatrizen mit den angegebenen Formaten zerlegt.

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & | & \underline{S}_{12} \\ \hline \underline{S}_{21} & | & \underline{S}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_{11} [n, n]$$

$$\underline{S}_{22} [(N-n), (N-n)]$$

$$\underline{S}_{12} [n, (N-n)]$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{S}_{12}^T$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} & | & \underline{G}_{12} \\ \hline \underline{G}_{21} & | & \underline{G}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_{11} [n, n]$$

$$\underline{G}_{22} [(N-n), (N-n)]$$

$$\underline{G}_{12} [n, (N-n)] \quad (19)$$

$$\underline{G}_{21} = \underline{G}_{12}$$

Für die Lösung der kanonischen Systeme (13) und (16) sind effektive numerische Algorithmen vorhanden (siehe z. B. [4]).

#### 4.2. Finite-Elemente-Formulierung

Ausgangspunkt für die Finite-Elemente-Formulierung ist das elastische Potential des betrachteten Modells. Gegenüber der Darstellung in [1] müssen Erweiterungen in zweifacher Hinsicht vorgenommen werden.

- Bei nichtprismatischen Kastenträgern ist die Abhängigkeit der Umlaufkoordinate  $S$  von der Längskoordinate  $z$  zu berücksichtigen [5].
- Bei der Berechnung der Eigenschwingung ist der Anteil der kinetischen Energie zu berücksichtigen und daher die Variationsformulierung entsprechend zu erweitern (Hamiltonprinzip).

Für ein eindimensionales Schalenelement mit  $N$  Knoten nach Bild 3 wird das Verschiebungsfeld näherungsweise durch den Interpolationsansatz

$$\underline{u}(\xi) = \underline{G}(\xi) \cdot \underline{v} \quad (20)$$

beschrieben. In (20) sind  $\underline{u}(\xi)$  der Vektor des Verschiebungsfeldes,  $\underline{v}$  der Vektor der Knotenverschiebungen und  $\underline{G}(\xi)$  die Matrix der Ansatzfunktionen.

$$\underline{u}(\xi)^T = [\underline{u}_m^T \quad \underline{u}_n^T]$$

$$\underline{v}^T = [v_1^T \dots v_J^T \dots v_N^T]$$

$$\underline{v}_J^T = [U_{1J} \dots U_{mJ} \quad V_{1J} \dots V_{nJ}]$$

$$\underline{G}(\xi) = [G_1(\xi) \underline{I} \dots G_J(\xi) \underline{I} \dots G_N(\xi) \underline{I}]$$

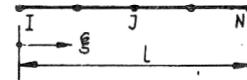


Bild 3  
Eindimensionales Stabschalenelement mit  $N$  Knoten

Hierin sind  $\underline{I}$  Einheitsmatrizen mit dem Format  $[(m+n), (m+n)]$  und  $G_J(\xi)$  Lagrangesche Interpolationspolynome  $(N-1)$ . Grades mit  $N \geq 2$ .

Mit diesen Ansätzen erhält man in bekannter Weise [7] die Beziehungen

$$\underline{K} \cdot \underline{v} = \underline{f} \quad (22)$$

für den statischen und

$$\det(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) = 0 \quad (23)$$

für den dynamischen Fall.  $\underline{K}$  ist die Steifigkeitsmatrix,  $\underline{M}$  die Massenmatrix und  $\underline{f}$  der Vektor der Knotenlasten.

Die Anwendung der Gleichung (22) wird in [6] für ein Zweiknotenelement und in [2] für ein Dreiknotenelement ausführlich erläutert. Erste Beispiele für Eigenschwingungsberechnungen prismatischer Konstruktionen findet man in [8].

#### 5. Zusammenfassung

Die im vorliegenden Beitrag vorgenommenen Erweiterungen der halbmomentenfreien Schalentheorie gestatten die statische und dynamische Analyse prismatischer und nichtprismatischer dünnwandiger geschlossener Konstruktionen. Eine genauere Einschätzung der Effektivität der vorgestellten numerischen Lösungsverfahren für unterschiedliche Problemklassen ist erst nach einer größeren Zahl von Testrechnungen möglich.

Die Einbeziehung von kombiniert offenen und geschlossenen Konstruktionen setzt voraus, daß die Verbindung offener und geschlossener Abschnitte widerspruchsfrei möglich wird. Eine Möglichkeit dazu ist die Einbeziehung der Drillmomente in das Stabschalenelementmodell.

Sollen allgemeinere Querschnittsformen (auch offengeschlossene Querschnitte) Verwendung finden, ist eine

Systematisierung der Berechnung der verallgemeinerten Querschnittswerte notwendig.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Altenbach, J. und W. Kissing: Erweiterung der halbmomentenfreien Schalentheorie von Wlassow für geschlossene prismatische Konstruktionen. Studentexte Flächentragwerke III, TUD H. 3/82, S. 3 – 20.
- [ 2 ] Altenbach, J. und W. Kissing: Numerische Berechnung konischer dünnwandiger geschlossener Konstruktionen. Schiffbauforschung 24, 1 (1985), 33 – 39.
- [ 3 ] Oblaszow, J. F.: Variationsmethoden dünnwandiger Flugzeugkonstruktionen. Verlag Maschinenbau, Moskau (1966) (russ.).
- [ 4 ] Landgraf, G.: Die elastische Berechnung von drehsymmetrisch belasteten Rotationsschalen mittels eines kanonischen DGL-Systems. Problemseminar Flächentragwerke I, TUD, H. 1/74, 2 – 15.
- [ 5 ] Kissing, W. und U. Kaftan: Anwendung des halbmomentenfreien Schalenmodells auf temperaturfeldbelastete konische Kastenträger. Schiffbauforschung 23, H. 1, (1984), 22 – 27.
- [ 6 ] Altenbach, J. und W. Kissing: Finite Elemente auf der Grundlage der halbmomentenfreien Schalentheorie zur Behandlung nichtprismatischer Kastenträger. Schiffbauforschung 22, H. 4 (1983), 266 – 271.
- [ 7 ] Altenbach, J. und A. Sacharov (Herausgeber): Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig (1982).
- [ 8 ] Zwicke, M.: Berechnung dünnwandiger Stabschalen mit Hilfe der halbmomentenfreien Schalentheorie nach Wlassow, Diplomarbeit THM, WB Festkörpermechanik, 1984.
- [ 9 ] Kissing, W.: Zur Behandlung dünnwandiger geschlossener Konstruktionen mit einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie nach Wlassow. Technische Mechanik 3 (1982) 1, 67 – 70.