

# Ein FEM-Programm für ebene, axialsymmetrische und räumliche Riß-, Festigkeits- und Wärmeleitprobleme

U.-M. Eisentraut, M. Kuna

## 1. Einleitung

Bei der Einschätzung der Sicherheit rißbehafteter technischer Bauteile durch die Bruchmechanik hat sich gezeigt, daß neben den mechanischen Beanspruchungen vor allem auch **thermische Belastungen** eine wesentliche Rolle spielen, so daß der eigentlichen Festigkeitsberechnung die Lösung eines stationären oder instationären Wärmeleitproblems vorangehen muß. Typische Anwendungsbeispiele für permanente oder schockartige Temperaturbelastungen sind in energieerzeugenden und -umwandelnden Anlagen wie Kernkraftwerken, Wärmekraftwerken, Chemieanlagen u. ä. anzutreffen. Aus diesem Grunde ist der Entwicklung von FEM-Software für thermische Rißprobleme größere Aufmerksamkeit zu schenken.

Zur Behandlung ebener und räumlicher linear-elastischer Bruchprobleme bei bekannten Temperaturfeldern standen bisher die FEM-Programmsysteme CRACK2D [1], CRACK3D [2] und CRACK3DH [3] zur Verfügung. Damit fehlten Berechnungsmöglichkeiten für rotationssymmetrische Bruchaufgaben und für die Behandlung instationärer Wärmeleitprobleme. Da in der DDR auf diesen Gebieten keine FEM-Software verfügbar war, wurde im IFE das Programmsystem FRACTURE erarbeitet, das auf dem in der CSSR entwickelten FEM-Programm PMD [4] basiert.

FRACTURE ermöglicht die Untersuchung ebener, axialsymmetrischer und räumlicher Riß-, Festigkeits- und Wärmeleitprobleme mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Ziel der Programmentwicklung war ein einheitliches, in sich geschlossenes und multivalent nutzbares Programmsystem, das speziell auf die Belange der linear-elastischen Bruchmechanik ausgerichtet ist. Dies wurde erreicht durch die Einbeziehung hybrider und knotendistordierter isoparametrischer Rißspitzenelemente, die eine numerisch effektive Ermittlung der Bruchkenngrößen gestatten. Im Gegensatz zu monolithisch konzipierten, großen FEM-Programmsystemen (wie z. B. COSAR [5]) besteht FRACTURE aus einem Komplex von Subroutinen, durch deren Verbindung es dem Nutzer möglich ist, wahlweise Programme für die Lösung verschiedener Aufgaben der Bruchmechanik, Festigkeitsanalyse und Wärmeleitung zusammenzustellen. Im Unterschied zu COSAR gestattet das Programm die Behandlung der instationären und nichtlinearen Wärmeleitung. Bei der Lösung des Gleichungssystems wird von der Frontlösmethode Gebrauch gemacht, wohingegen die Möglichkeiten einer Substrukturierung nicht gegeben sind.

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1. Verwendete FEM-Algorithmen

Ausgangspunkt für die Lösung der elastostatischen Aufgabe bildet das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials [5], [6]. Das entsprechende Variationsproblem wird nach dem Ritz-Verfahren mit Hilfe eines Näherungsansatzes diskretisiert und führt auf ein lineares Gleichungssystem der Art

$$\mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

wobei  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{v}$  der Vektor der unbekanntenen Knotenverschiebungen und  $\mathbf{f}$  der Lastvektor ist. Bei instationären Feldproblemen, für die kein klassisches Extremalprinzip existiert, ist die Differentialgleichung für isotropes Materialverhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q - \mu \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

zu lösen, wobei alle Parameter Funktionen von  $T$  sein können.

Randbedingungen:

$$T = \bar{T}(x, y, z, t) \in O_1, \quad t > 0 \quad (3)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k \frac{\partial T}{\partial z} n_z + \bar{q}(x, y, z, t) + \alpha(x, y, z, t) \Delta T = 0 \in O_2, \quad t > 0$$

Anfangsbedingungen:

$$T = T_0(x, y, z) \in V, \quad t = 0 \quad (4)$$

Dabei sind  $k$  – Wärmeleitfähigkeit,  $\bar{q}$  – Wärmefluß,  $\alpha$  – Wärmeübergangskoeffizient,  $Q$  – Intensität einer inneren Wärmequelle,  $\mu$  – spezifische Wärmekapazität.

Es erfolgt die Approximation auf der Basis von Integralformulierungen nach der Methode der gewichteten Residuen mit dem Näherungsansatz

$$\mathbf{T} = \sum_i N_i T_i = \mathbf{N} \mathbf{T} \quad \text{mit } \mathbf{N} = \mathbf{N}(x, y, z) \quad \text{und } \mathbf{T} = \mathbf{T}(t) \quad (5)$$

Für  $\mathbf{N}(x, y, z)$  wird  $C^0$  – Stetigkeit gefordert.

Daraus läßt sich ein System gewöhnlicher DGL'n erster Ordnung der Form

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K} \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{mit } \dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \quad (6)$$

aufstellen.

Der stationäre Fall  $T = \bar{T}(x, y, z)$  folgt aus (2) für  $\mu = 0$ , so daß aus dem Gleichungssystem (6) mit  $C = 0$

$$KT + f = 0 \quad (7)$$

entsteht. Weiterführend wird auf die Spezialliteratur [5], [6] verwiesen. Zur Lösung der bei der FEM entstehenden Gleichungssysteme werden je nach Art unterschiedliche Lösungsverfahren herangezogen.

Die Lösung des Gleichungssystems (6) der instationären Wärmeleitung erfolgt mit Hilfe von Zweipunktrekursionsschemata.

In der Literatur [5], [6] wird ausführlich auf die Unterschiede dieser Verfahren eingegangen. Es entsteht ein Gleichungssystem der Art

$$\overline{K}_n \cdot T_{n+1} = \overline{f}_n, \quad (8)$$

das für die Temperaturen  $T_{n+1}$  zu lösen ist.

Die Gleichungssysteme der Form

$$Kv + f = 0 \quad (1)$$

$$KT + f = 0 \quad (7)$$

werden mit der Frontlösmethode gelöst.

Die Frontlösmethode nach Irons [7] stellt eine besonders speicherökonomische Variante der Gauss'schen Eliminierung dar, bei der die Aufstellung und Reduzierung der Gesamtmatrix des Systems simultan erfolgen. Das Gleichungssystem wird schrittweise im Hauptspeicher aus den extern abgespeicherten Elementmatrizen aufgebaut, und im Wechsel dazu erfolgt die Elimination, sobald eine Zeile vollständig assembliert ist. Die dadurch erreichte Verringerung von Speicherbedarf und Transferzeit macht diesen Algorithmus zur Lösung großer Gleichungssysteme mit Bandstruktur besonders geeignet. Für den Fall nichtlinearer Feldprobleme wird aus (7) das nichtlineare Gleichungssystem

$$S(T) \equiv P(T) + f \equiv K(T) \cdot T + f = 0 \quad (9)$$

mit  $T = T^0$  als Anfangsbedingung.

Das direkte Iterationsverfahren führt zur Iterationsformel für die n-te Näherung:

$$T^n = -(K^{n-1})^{-1} f \quad (10)$$

Die Iteration wird beendet, wenn die Norm  $\|T^n - T^{n-1}\|$  eine Schranke  $\epsilon$  unterschreitet.

Einen verbesserten Algorithmus liefert das Newton-Raphson-Verfahren:

$$S(T^{n+1}) \equiv S(T^n) + \left(\frac{dS}{dT}\right)_n \Delta T^n = 0 \quad (11)$$

$$T^{n+1} = T^n + \Delta T^n.$$

Dabei stellt  $\frac{dS}{dT} = K_T(T)$  eine Tangentenmatrix dar.

Für jeden Iterationsschritt muß ein neues lineares Gleichungssystem gelöst werden.

$$\Delta T^n = -(K_T^n)^{-1} (P^n + f) = -(K_T^n)^{-1} \cdot S^n \quad (12)$$

Eine modifizierte Form des Verfahrens besteht darin, daß für mehrere Iterationsschritte dieselbe Tangentenmatrix verwendet wird. Eine ausführlichere Darstellung ist der Literatur [6] zu entnehmen.

Alle angeführten numerischen Verfahren sind in FRACTURE implementiert.

## 2.2. Ermittlung bruchmechanischer Kennwerte

In der Bruchmechanik können mit Hilfe geeigneter Bruchkriterien Aussagen über die Bruchsicherheit bzw. Stabilität eines Risses in einem Bauteil gemacht werden, wenn man die charakteristischen Bruchkenngrößen als Funktion von Geometrie und Belastung kennt. Im Falle spröden, linear-elastischen Materialverhalten sind dies die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$ , die den asymptotischen Spannungs- und Verschiebungszustand an der Rissspitze beschreiben [8]. Mit Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  um die Rissspitze erhält man für das Verschiebungsfeld unter Berücksichtigung konstanter thermischer Dehnung:

$$u_i = \frac{1}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I f_i^I(\varphi) + K_{II} f_i^{II}(\varphi) + K_{III} f_i^{III}(\varphi) \right\} + \alpha T x_i \quad (13)$$

Die Wiedergabe der Spannungssingularität vom Typ  $r^{-1/2}$  mit herkömmlichen Elementen erfordert eine ökonomisch unvertretbar feine Diskretisierung der Rissumgebung, so daß besondere Elementtypen mit angepassten Ansatzfunktionen zur Modellierung der Rissspitzenumgebung entwickelt wurden, vgl. z. B. [9].

In FRACTURE sind zwei Typen von Risselementen implementiert (vgl. Bild 1):

- knotenpunkt-distordierte isoparametrische Elemente
- hybride Rissspitzenelemente.

Die knotenpunkt-distordierten Elemente sind modifizierte isoparametrische Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen, bei denen die Seitenmittenknoten aller Elementkanten, die auf die Rissspitze zulaufen, auf die 1/4-Position verschoben werden [10], [1], [2]. Bild 2 zeigt einige typische ebene und räumliche Anordnungen. Durch diese Verzerrung entsteht im Risselement der Verschiebungsansatz

$$u_i = C_{1i} + C_{2i} \sqrt{r} + C_{3i} r, \quad (14)$$

dessen zweiter Term der zu modellierenden Rissspitzenlösung (13) entspricht, während der dritte Term eine konstante Wärmedehnung reproduzieren kann. Allerdings wird nur die  $\sqrt{r}$ -Abhängigkeit der Rissspitzenlösung berücksichtigt und nicht die exakte Winkelverteilung von Gl. (13).

Hybride Elementformulierungen bieten eine gute Möglichkeit zur Konstruktion von Rissspitzenelementen, da hierbei für die Feldgrößen im Element rissspezifische Ansätze gewählt werden können (z. B. Gl. (13) und höhere Risseigenfunktionen), zugleich aber ein stetiger Übergang der Feldgrößen auf den Rändern zu den angrenzenden Standardelementen gewährleistet wird. Eigene Erfahrungen bei der Entwicklung und Anwendung ebener [11] und räumlicher [3] hybrider Risselemente haben ihre hohe Genauigkeit und Leistungsfähigkeit bestätigt.

Nachteilig ist, daß mit ihnen zur Zeit Temperaturbelastungen nur unter Einschränkungen berücksichtigt werden können. Dafür erhält man die Spannungsintensitätsfaktoren bei Verwendung hybrider Risselemente direkt mit der Lösung des FEM-Systems.

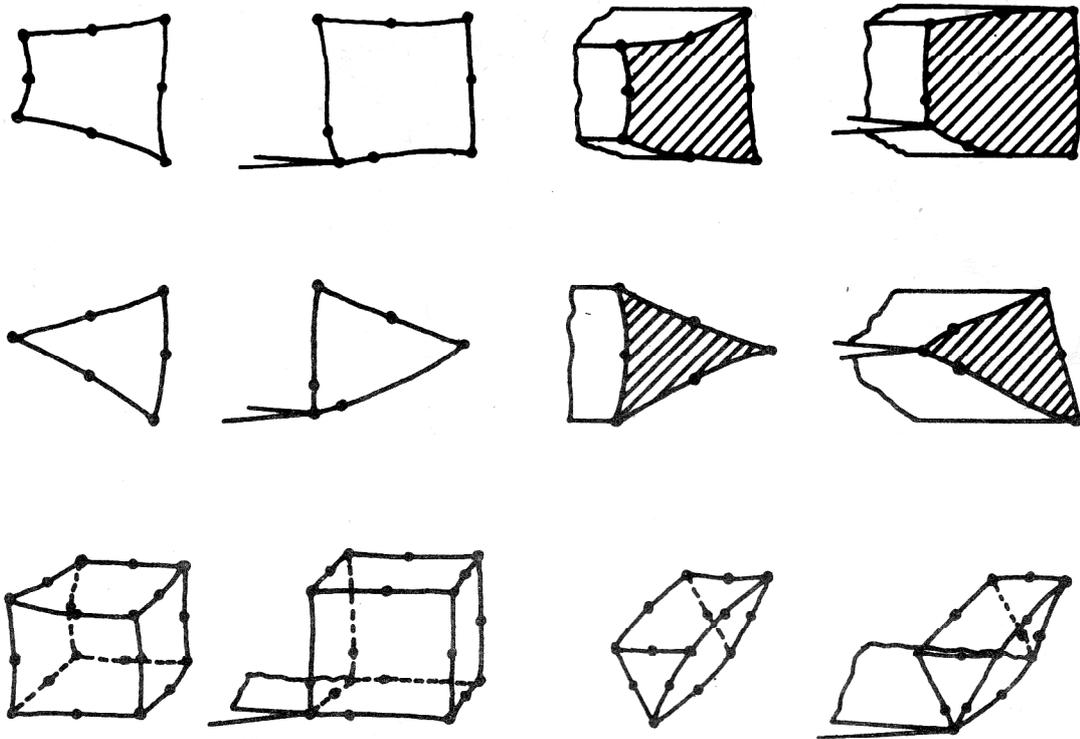
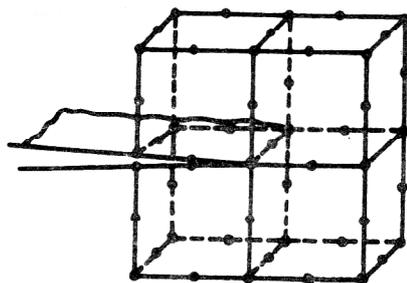


Bild 1  
Elementkatalog von FRACTURE (isoparametrische und knotendistordierte ebene, axialsymmetrische und räumliche Elemente, hybride Rispspitzen-elemente)



Allgemein stehen zur Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren aus thermoelastischen Risßberechnungen folgende Methoden zur Verfügung:

- Vergleich der analytischen Risßspitzenlösung für die Spannungen oder Verschiebungen mit der FEM-Lösung in der Risßumgebung und Extrapolation der erhaltenen K-Werte für  $r \rightarrow 0$ . Für knotendistordierte Dreieckelemente liefert der Vergleich von Gl. (14) und (13) die Formel [12]

$$K_I = \frac{E'}{4} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L}} \left[ 4 u_y \left( \frac{L}{4} \right) - u_y(L) \right] \quad (15)$$

mit  $E' = E(\text{ESZ})$  und  $E' = E/(1 - \nu^2)$  (EVZ);  
L ist die Elementlänge.

In [13] wurden entsprechende Auswerteformeln für die Spannungsintensitätsfaktoren im dreidimensionalen Fall angegeben, die auf der Verwendung knotendistordierter Pentaeder basieren.

- Auswertung verallgemeinerter J-Integrale, bei denen thermische Belastungen explizit berücksichtigt werden, z. B. [14] und [15].
- Anwendung der Methode der virtuellen Risßausbreitung [16] zur Bestimmung der Energiefreisetzungs-

rate G, die ebenso wie das J-Integral mit den K-Faktoren in Beziehung steht

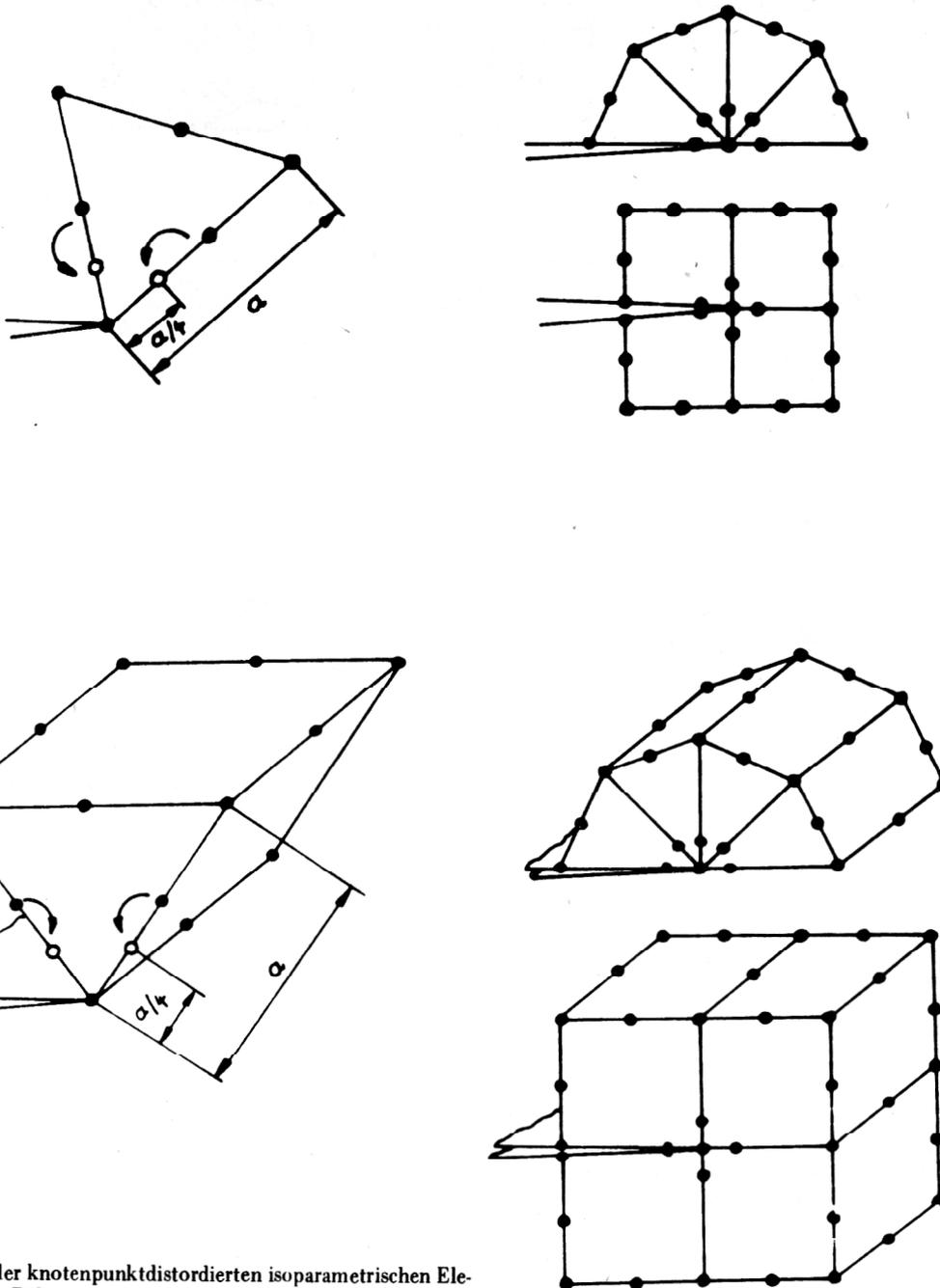
$$G = J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (16)$$

### 3. Programmsystem FRACTURE

Das Programmsystem FRACTURE entstand auf der Grundlage des FEM-Systems PMD [4] durch folgende Weiterentwicklungen:

- Erweiterung des Elementkataloges um isoparametrische Pentaeder-, Dreieck- und Ringdreieckelemente,
- Anwendung isoparametrischer Knotenpunktdistordierter Hexaeder-, Pentaeder-, Viereck-, Dreieck-, Viereckring- und Dreieckringelemente für Risßprobleme,
- Entwicklung hybrider Risßspitzen-elemente für ebene und räumliche Aufgaben. Ihr Einbau erfolgte für 3D-Probleme und ist für 2D-Probleme geplant,
- Rechentechnische Realisierung eines Pre- und Post-Processing-Paketes für Kleinrechner vom Typ SM4.

Damit steht eine anwendungsfreundliche, effektive und einheitliche FEM-Software zur Verfügung, die neben



**Bild 2**  
Anordnung der knotenpunktdistordierten isoparametrischen Elemente um die Rißspitze

einem breiten Anwendungsbereich der Wärmeleitung und Thermoelastizitt vor allem die Problematik der Bruchmechanik abdeckt.

### 3.1. Anwendungscharakteristik

Die Anwendung von FRACTURE auf Probleme der stationären, instationären, linearen und nichtlinearen Wärmeleitung umfaßt folgende Möglichkeiten:

- Materialwerte (Wärmeleitkoeffizient  $\lambda$ , spezifische Wärmekapazität  $c$ )
- Volumengrößen (innere Wärmequellen)
- Randbedingungen (Knotentemperaturen, Fluintensitten senkrecht zur Oberfläche, Wärmeübergang nach den Beziehungen  $q = \alpha \cdot (T_{\text{Wand}} - T_{\text{Umg.}})$ ;  
 $q = C_1 \cdot (T_{\text{Wand}}^4 - T_{\text{Umg.}}^4)$ ;  $q = C_1 \cdot (T_{\text{Wand}}^{C_2} - T_{\text{Umg.}}^{C_2})^{C_3}$ )
- Anfangsbedingungen (Starttemperaturen)

- Zeitschritte (konstant, veränderlich, automatische Steuerung)

Alle Parameter können von der Temperatur, der Zeit und den Koordinaten abhängen.

Bei der Durchführung einer Elastizittsrechnung lassen sich folgende Belastungen und Randbedingungen realisieren:

- Materialwerte (E-Modul, Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$ , Querkontraktion  $\nu$ ).  
Alle Materialwerte können Funktionen der Temperatur und der Koordinaten sein.
- Volumengrößen (Fliehkrften, Gravitationskrften)
- Oberflächenlasten
- Knotengrößen (vorgegebene Verschiebungen, linear elastische Lagerung, Temperaturwerte)

Es werden die Knotenverschiebungen und die Spannungen in den Gaußpunkten der Elemente bestimmt.

Die bruchmechanische Analyse von Körpern mit Riß unterscheidet sich von einer Elastizittsrechnung dadurch, daß die Riumgebung durch spezielle Rißspitzenelemente modelliert wird. Damit ist eine effektive Berechnung der Bruchkenngrößen  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  und  $G$  möglich (vgl. Abschnitt 2.2.).

### 3.2. Rechentechnische Realisierung

Das FEM-Programm FRACTURE besteht aus drei Komplexen:

- a) MESH
  - Programmabschnitt zur Elementnetzgenerierung mit der Berechnung der Matrizen und Faktoren, die nur durch die Geometrie des Elementnetzes bestimmt sind,
- b) FIELD
  - Programmabschnitt zur Lösung von stationären und instationären, linearen und nichtlinearen Wrmeleitaufgaben,
- c) ELAST
  - Programmabschnitt zur Lösung des elastostatischen Festigkeitsproblems mit Bestimmung der bruchmechanischen Kennwerte,

die nacheinander und separat abgearbeitet werden und sowohl für ebene, axialsymmetrische als auch räumliche Aufgaben Anwendung finden. Die Netzbeschreibung MESH ist grundsätzlich für das jeweilige Bauteil nur einmal zu erarbeiten und kann in der gleichen Form für die Wrmeaufgabe als auch die Elastizittsaufgabe benutzt werden. Grundlage bildet das isoparametrische Elementkonzept. Bild 1 zeigt den Elementkatalog.

Mit FRACTURE läßt sich eine FEM-Rechnung entweder konventionell im Stapelbetrieb auf Großrechenanlagen vom Typ ESER durchführen, wobei nur das Pre- und Post-Processing an Kleinrechenanlagen realisiert wird, oder komplette Teile einer FEM-Berechnung können am Kleinrechner erfolgen.

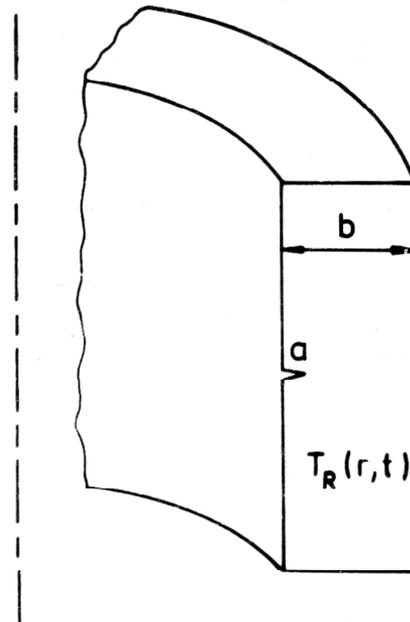
Im IFE wurde ein Pre- und Post-Processing-Paket für den Einsatz an der Rechenanlage SM4-2 $\emptyset$  und dem Mikroprozessor MPS 4944 entwickelt. Dazu gehört ein Datengenerator, der den kompletten Dateneingabesatz für FRACTURE bereitstellt und gleichzeitig die Eingabeinformationen zum Zeichnen des Elementnetzes erstellt. Die für den Mikrorechner entwickelte Graphik-Software ermöglicht eine umfassende visuelle Netzkontrolle auf Display oder Plotter. Darüber hinaus wurde der Programmabschnitt MESH, der über eine komfortable Fehlerdiagnostik verfügt, für den Kleinrechner angepaßt. Da im Terminalbetrieb auf Fehler sofort reagiert werden kann, sind somit jene Schritte einer FEM-Berechnung mit hoher Fehleranfälligkeit und großem manuellen Aufwand effektiver ausführbar. Die speicherplatz- und rechenzeitintensiven Programmabschnitte (Lösung des Gleichungssystems, Iteration) werden weiterhin am Großrechner durchgeführt. Der Datentransfer erfolgt mittels Magnetband. Die Ergebnisse werden im Post-Processing am Kleinrechner u. a. zur Bestimmung bruchmechanischer Kennwerte oder zur graphischen Darstellung genutzt. Die Kombination von Kleinrechenanlagen und Großrechner erlaubt eine flexible und effektivere Gestaltung des Rechenablaufes. Die Konzep-

tion von FRACTURE bietet dafür gute Voraussetzungen.

## 4. Berechnungsbeispiele zur Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren

### 4.1. Rohrleitung mit Innenri unter Temperaturschockbelastung

Eindrucksvolle Beispiele für die Notwendigkeit zur Berechnung der instationären Wärmeleitung in der Bruchmechanik sind Thermoschockprobleme von Bauteilen mit Riß. Eine Rohrleitung mit der Wandstärke  $b$  habe einen umlaufenden Innenri der Länge  $a$ . Dies ist eine in der Praxis recht häufig auftretende Problemstellung überall dort, wo Rohrleitungen starken Temperaturschwankungen ausgesetzt sind. Es handelt sich somit um ein axialsymmetrisches Berechnungsmodell, wie im Bild 3 gezeigt wird. Zur Berechnung diene eine Vernetzung mit axialsymmetrischen Elementen, deren Meridianschnittebene der im Bild 7 dargestellten Form entspricht. Die Umgebung der Rißspitze ist mit knotendiskretisierten Ringdreieckelementen modelliert.



**Bild 3**  
Thermoschock einer Rohrleitung mit Riß ( $R_i = 0.1$  m;  $R_a = 0.15$  m;

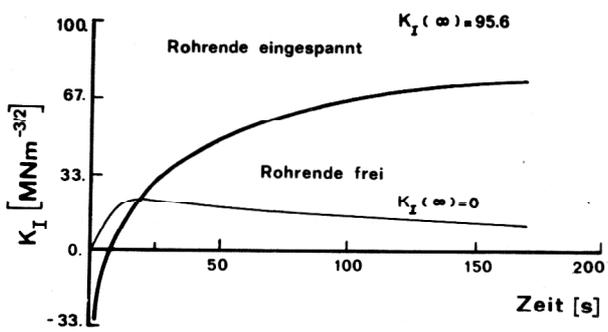
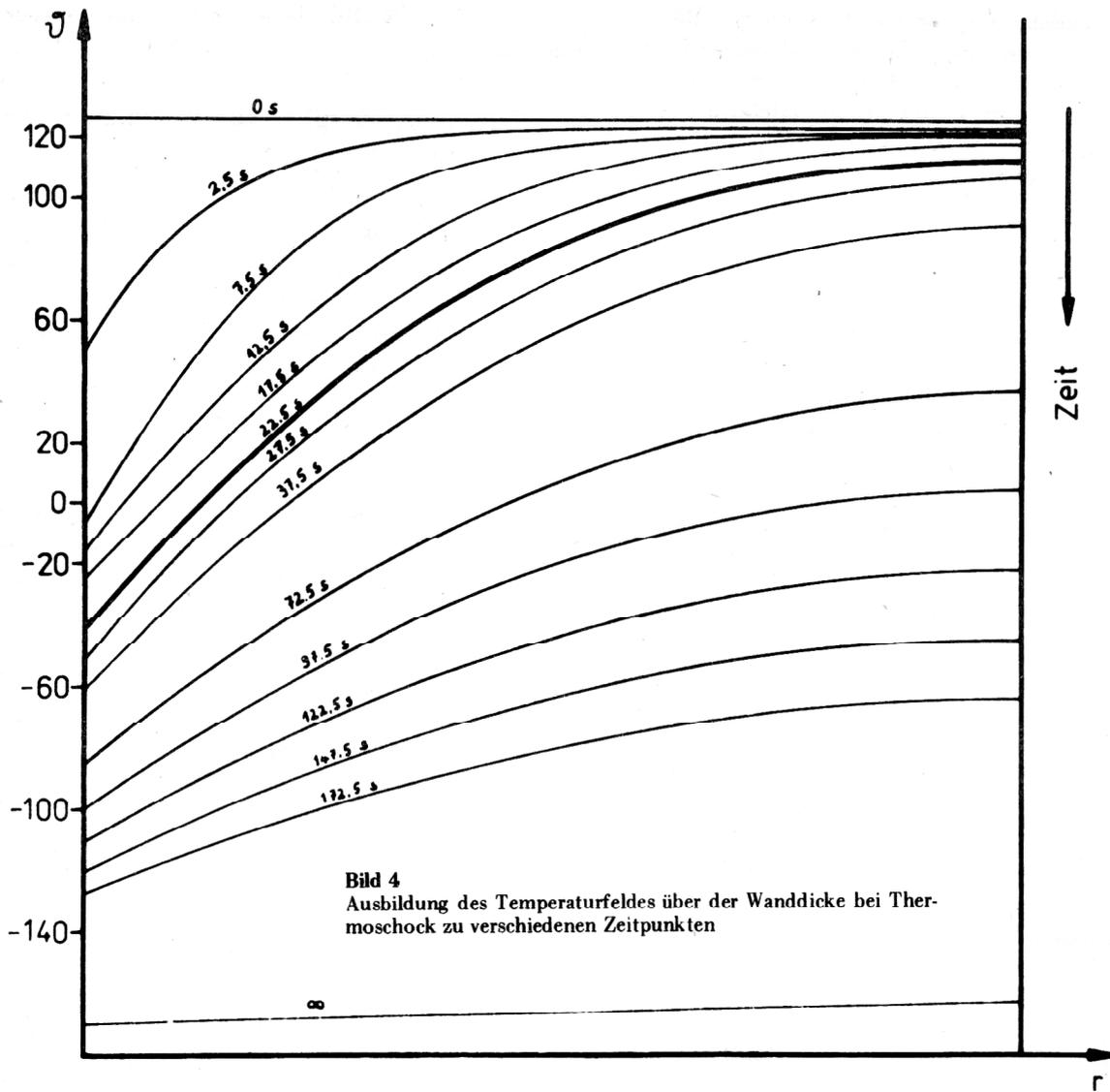
$$a = b/5; \alpha_a = 30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}; \alpha_i = 3000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}; T_1 = T_a = 27^\circ\text{C};$$

$$T_2 = T_R(r); T_i = T_2(R_i) - 300 \text{ grad H}(t - t_0); T_3 = T_r(r, t);$$

$\lambda, c, E$  für Stahl)

Die Rohrleitung wird im ersten Schritt vom Temperaturzustand  $T_1 = T_a$  auf die Temperatur  $T_2 = T_R(r)$  erhitzt. Das entspricht der Lösung der stationären Wrmeleitaufgabe, die als Ergebnis die Temperaturverteilung über der Wanddicke liefert. Für die Zeit  $t = t_0$  erfolgt an der Rohrinnenflche eine Temperaturschockbelastung  $T_1 - T_2(R_i) - 300 \text{ grad H}(t - t_0)$ . Die Berechnung der instationären Wrmeleitaufgabe liefert die sich einstellenden Temperaturfelder zu verschiedenen Zeitpunkten.

Bild 4 zeigt eine graphische Darstellung der Temperaturverläufe über der Wanddicke. Zur Ermittlung der Span-

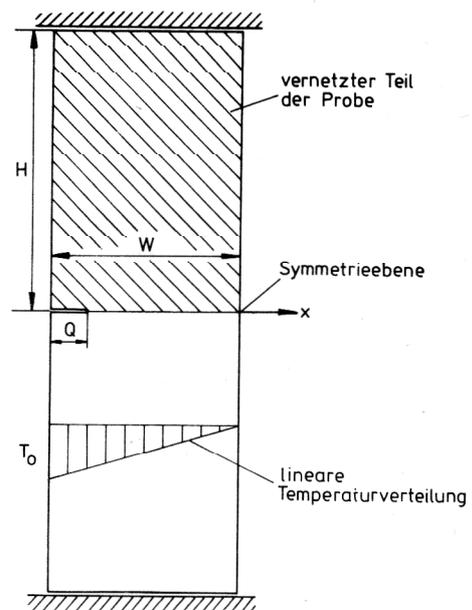


**Bild 5**  
Verläufe der SI-Faktoren bei Thermoschockbelastung

Stressintensitätsfaktoren infolge der thermischen Belastung wurden für die Elastizitätsrechnung zwei Fälle betrachtet:

- Rohrenden eingespannt
- Rohrenden frei

Für den Fall a) ist offensichtlich, daß mit fortschreitender Abkühlung des Rohres die Beanspruchung des Risses und damit der  $K_I$ -Faktor anwächst. Im Fall b) läßt sich für eine Zeit  $t \rightarrow \infty$  voraussagen, daß der Riß keiner Be-



**Bild 6**  
Eingespannte Scheibe mit Außenriß unter thermischer Beanspruchung ( $Q/W = 0.2$ ;  $H/W = 1.5$ ;  $B/W = 0.5$ )

$$a) T(x) = T_0 \left( \frac{x}{W} - 1 \right)$$

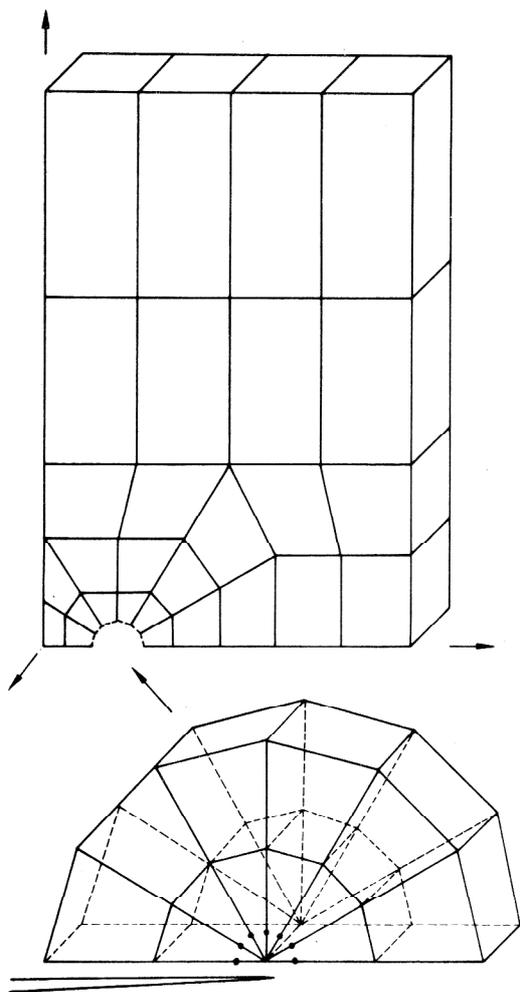
$$b) T(x) = T_0$$

anspruchung mehr ausgesetzt ist, und damit der  $K_I$ -Faktor Null wird. Im Verlaufe des Abkühlungsvorganges treten aber große Temperaturgradienten über der Wandstärke auf, die zu hohen Rißbelastungen und einem maximalen Wert des  $K_I$ -Faktors führen. Zu diesem Zweck wurden anhand der zu verschiedenen Zeitpunkten existierenden Temperaturfelder Elastizitätsrechnungen zur Bestimmung des  $K_I$ -Faktors durchgeführt. Bild 5 zeigt die zeitlichen Verläufe des Spannungsintensitätsfaktors.

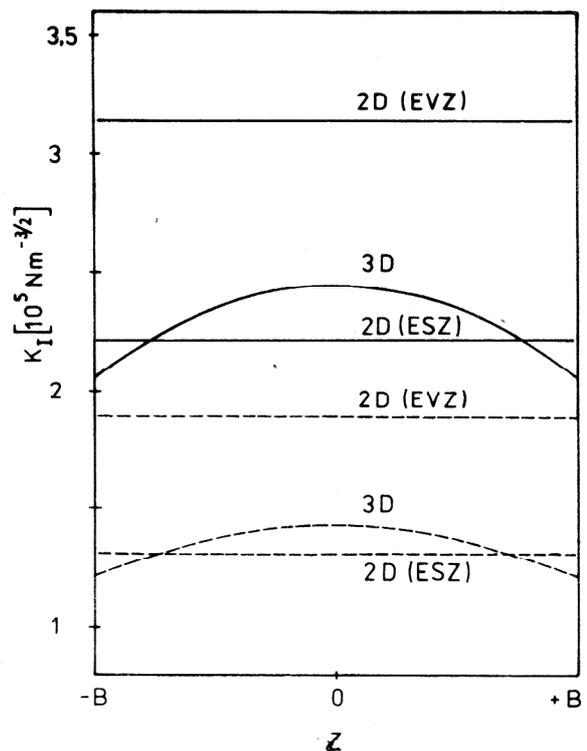
#### 4.2. Eingespannte Scheibe mit Außenriß unter Temperaturbelastung

Ein weiteres Beispiel für die Ermittlung bruchmechanischer Kennwerte für temperaturbelastete Bauteile stellt die Scheibe mit Außenriß dar, Bild 6.

Die an den Enden festgehaltene Probe wurde für zwei verschiedene Temperaturverteilungen (linear, konstant) als zwei- und dreidimensionales Modell berechnet. Die Vernetzung des Rißspitzenbereiches erfolgte im dreidimensionalen Fall mit knotendistordierten Pentaederelementen (Bild 7) und äquivalent mit knotendistordierten Dreieckelementen im zweidimensionalen Modell. Aus Symmetriegründen genügte die Betrachtung der oberen Hälfte der Probe und im 3D-Fall die Modellierung der



**Bild 7**  
3D Netzwerk für Scheibe mit Außenriß (40 Elemente, 428 Knoten)



**Bild 8**  
Zusammenstellung der SI-Faktoren für Scheibe mit Außenriß

- lineare Temperaturverteilung  $T = T_0 \left( \frac{x}{W} - 1 \right)$  mit  $T_0 = -100$  grad
- konstante Temperaturverteilung  $T = T_0 = -50$  grad

halben Dicke. Die  $K_I$ -Faktoren wurden aus den ermittelten Verschiebungen mit Hilfe der Auswertformeln für knotendistordierte Elemente (vgl. Abschnitt 2.2.) bestimmt.

Bild 8 zeigt die Zusammenstellung der erhaltenen Spannungsintensitätsfaktoren für lineare und konstante Temperaturverteilungen für das 2D- und 3D-Modell.

#### LITERATUR

- [1] Kuna, M., Wiltinger, L., Altenbach, J.: CRACK2D – Ein FE-Programm zur bruchmechanischen Analyse ebener, elastostatischer Rißprobleme. Maschinenbautechnik 30 (1981) 2, S. 75 – 78.
- [2] Altenbach, J., Wiltinger, L.: Anwendung numerischer Methoden in der Bruchmechanik. Technische Mechanik 2 (1981), S. 54 – 64.
- [3] Kuna, M.: Konstruktion und Anwendung hybrider Rißspitzenelemente für dreidimensionale bruchmechanische Aufgaben. Technische Mechanik 3 (1982), 37 – 43.
- [4] Jinoch, J.: Das Programmsystem PMD für Berechnungen im Maschinenbau. IFL-Mitteilungen 6, 1981, S. 263 – 268.
- [5] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag Leipzig, 1982.
- [6] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. Fachbuchverlag Leipzig, 1983.
- [7] Irons, B. M.: A frontal solution program for finite element analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 2 (1970), S. 5 – 32.
- [8] Rossmannith, H.-P.: Grundlagen der Bruchmechanik. Springer-Verlag Wien – New York, 1982.

- [9] Rossmann, H.-P.: Finite Elemente in der Bruchmechanik. Springer-Verlag Wien – New York, 1982.
- [10] Barsoum, R. S.: On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. Int. J. Num. Meth. Eng., 10 (1976), S. 25 – 37.
- [11] Kuna, M. und Khanh, D. Q.: Ein spezielles Hybrid-Element für die Spannungsanalyse ebener Körper mit Rissen, VIII. IKM Weimar 1978, Bd. 2, 71 – 76.
- [12] Morozov, E. M., Nikiskov, G. P.: Metod konecných elementov v mechanike razrusenija, Moskva „Nauka“, 1980.
- [13] Ingraffea, A. R., Manu, C.: Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements. Int. J. Num. Meth. Eng., 15 (1980), S. 1427 – 1445.
- [14] Wilson, W. K. und Yu, T. W.: The use of the J-Integral in thermal stress problems. Int. J. Fracture 15 (1979), 377 – 387.
- [15] Gurtin, M. E.: On a path-independent integral for thermoelasticity. Int. J. Fracture 15 (1979) R 169 – R 170.
- [16] Hellen, T. K.: On the method of virtual crack extension. Int. J. Num. Meth. Eng. 9 (1975), 187 – 202.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. U.-M. Eisentraut  
 Dr. M. Kuna  
 Akademie der Wissenschaften der DDR  
 Institut für Festkörperphysik und  
 Elektronenmikroskopie  
 4020 Halle  
 Weinberg, Postfach 250