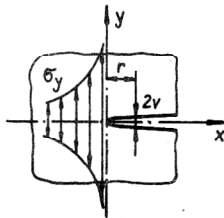


# Zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren mit finiten Elementen nach der Energiemethode

U. Fischer

## 0. Einleitung

Für die Beurteilung der Bruchempfindlichkeit von Bauteilen mit Rissen werden im allgemeinen die Spannungsintensitätsfaktoren benutzt, wobei dem Wert  $K_I$  die größte Bedeutung zukommt. Zur Ermittlung dieser Größe mit der Finite-Elemente-Methode haben sich mehrere Verfahren durchgesetzt (vgl. [1], [2]), darunter (Bild 1)



**Bild 1**  
Spannungen und Verschiebungen auf der Risflinie

- die Schätzung von  $K_I$  aus den Verschiebungen auf der x-Achse in der Nähe der Rissspitze (offene Seite) entsprechend

$$v = \pm 4 K_I / E' \cdot \sqrt{r/2\pi} \quad (1)$$

- die Schätzung von  $K_I$  aus den Spannungen auf der x-Achse in der Nähe der Rissspitze (geschlossene Seite) entsprechend

$$\sigma_y = K_I / \sqrt{2\pi r} \quad (2)$$

- die Schätzung von  $K_I$  aus der Energiefreisetzungsrate  $G$

$$G = -\partial(\Pi/b)/\partial c \approx -\Delta \Pi / (b \Delta c) \quad (3)$$

bei einer Verlängerung des Risses um  $\Delta c$  ( $\Pi$  = elastisches Potential,  $b$  = Dicke des Bauteils).

In den Gln. (1) und (2) ist der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß der Riss geradlinig ist. Für  $E'$  in Gl. (1) gilt

$$E' = E \text{ im ebenen Spannungszustand (ESZ)}$$

$$E' = E/(1-\nu^2) \text{ im ebenen Verzerrungszustand (EVZ)}$$

Zwischen der Energiefreisetzungsrate  $G$  und dem Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  besteht die Beziehung (vgl. [3])

$$K_I = \sqrt{E' G} \quad (4)$$

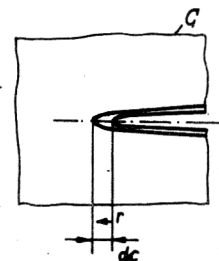
Den beiden ersten genannten Methoden ist gemeinsam, daß die Werte an der Rissspitze (0 für die Verschiebung,  $\infty$  für die Spannung) und auch die für ihre unmittelbare

Nähe mit der FEM gewonnenen Werte unbrauchbar sind, weil „normale“ finite Elemente die Singularität nicht wiederzugeben vermögen. Es müssen deshalb Werte aus der weiteren Umgebung der Rissspitze herangezogen werden. Hier kann sich der Grundspannungszustand störend auswirken. Auf die Verwendung von speziellen Rißelementen oder knotendistordierten Elementen soll in diesem Beitrag nicht eingegangen werden, vgl. z. B. [4].

## 1. Die Energiemethode

Zur Berechnung der Energiefreisetzungsrate  $G$  wird ein den Riss umschließendes Gebiet mit dem Rand  $C$  betrachtet und bei festgehaltenen Verschiebungen auf dem Rand die Veränderung der Energie bei einer infinitesimalen Rißverlängerung (Bild 2) festgestellt. Aus den Gln. (3) und (4) folgt

$$K_I = \sqrt{-E' \frac{\partial \Pi}{b \partial c}} \quad (5)$$



**Bild 2**  
Rißerweiterung

Die Berechnung von  $\Pi$  geschieht unter Nutzung der Steifigkeitsmatrix  $K$  und des Knotenverschiebungsvektors  $u$  für das innerhalb des Randes  $C$  gelegene Gebiet, das frei von Volumenkräften sein möge zu:

$$\Pi = \frac{1}{2} u^T K u \quad (6)$$

Das dem Gebiet mit verlängertem Riss zugeordnete Potential kann aus

$$\Pi + d\Pi = \frac{1}{2} u^T (K + dK) u \quad (7)$$

mit unverändertem Knotenverschiebungsvektor  $u$  bestimmt werden, wenn die Knoten in einem veränderten Netz so angeordnet werden, daß der Vektor  $u$  ihnen zugeordnet werden kann. Das ist bis auf Fehler höherer Ordnung durch Verlegung des Knotens an der Rissspitze und Interpolation der Verschiebung aller anderen zwi-

schen diesem und den Randknoten möglich (vgl. z. B. Bild 2).

So erhält man schließlich aus den Gln. (5) und (7):

$$K_I = \sqrt{-\frac{E'}{2b} \mathbf{u}^T \frac{dK}{dc} \mathbf{u}} \quad (8)$$

Diese Beziehung geht auf Parks [5] und Hellen [6] zurück.

Haaber und Koh [10] berechnen  $dK/dc$  für isoparametrische Elemente durch Ableitung der Transformationsbeziehungen zwischen den globalen kartesischen Koordinaten und den lokalen krummlinigen Koordinaten gewissermaßen auf analytischem Wege – die Integration über das Elementvolumen wird natürlich wie üblich numerisch ausgeführt. Die übliche Ausführung erfolgt jedoch durch Bildung des Differenzenquotienten  $\Delta K/\Delta c$  für 2 „benachbarte“ Netze.

## 2. Genauigkeitsabschätzungen

Gl. (3) ergibt sich aus Gln. (1) und (2) mit

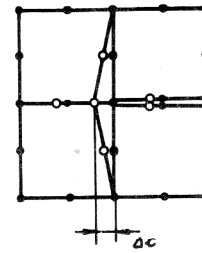
$$d\Pi = \frac{1}{2} b \int_0^{dc} \sigma_y(r) v(dc-r) dr \quad (9)$$

Das Ergebnis für  $G = d\Pi/(bdc)$  ist damit von der Größe des von C umschlossenen Gebietes unabhängig. Daraus darf jedoch nicht geschlossen werden, daß die Größe des Gebietes, für das  $\Delta K/\Delta c$  berechnet wird, gleichgültig sei. Die Wahl dieses Gebietes wird durch mehrere Einflussfaktoren bestimmt:

1. Die Rißlängenänderung sollte möglichst klein sein, um den Fehler des Differenzenquotienten  $\Delta K/\Delta c$  gegenüber dem Differentialquotienten  $dK/dc$  gering zu halten. Damit sind aber aus numerischen Gründen der Gebietsgröße Grenzen gesetzt.
2. Die Lage der Knoten im Inneren des Gebietes kann durch lineare Interpolation zwischen Rand und Rißende nur angenähert als der Ort bestimmt werden, für den nach der Rißverlängerung die Verschiebungen ihre Größe beibehalten. Das führt zu dem Schluß, das Gebiet so klein zu wählen, wie die gewählte Diskretisierungseinheit zuläßt, also nur eine Lage finite Elemente um das Rißende herum für die Bildung von  $\Delta K$  heranzuziehen. Die dann noch im Inneren des Gebietes liegenden Seitenmittenknoten der Elemente (8-Knoten-Rechteck- oder 6-Knoten-Dreieckelemente seien hier vorausgesetzt) sollten zur Vermeidung von Distorsionserscheinungen weiterhin die Verbindungsgerade der Eckknoten halbieren (Bild 3). Die dadurch bedingte „Nachfolge“ dieser Knoten zur Rißenderverschiebung kann vor allem dann größere Fehler bedingen, wenn die Elemente so groß sind, daß der Grundspannungszustand die Verschiebungen der Seitenmittenknoten stärker bestimmt als die Lage des Rißendes. Daraus kann man für die Seitenlänge  $l$  der um das Rißende gruppierten Elemente die Forderung

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi l}} > \sigma_0 \quad \text{bzw.} \quad l < l_0 \equiv \frac{\pi \sigma_0^2}{K_I^2} \quad (10)$$

ableiten. Hierin ist  $\sigma_0$  eine geeignete Vergleichsspannung des Bauteiles ohne Riß bzw. die Spannung in



**Bild 3**  
Ursprüngliche Vernetzung (mit Rechteckelementen) und geänderte Vernetzung

der Nähe des Rißendes, die sich ohne Berücksichtigung der Kerbwirkung ergibt (Nennspannung).

3. Durch die Diskretisierung des Kontinuums ist ein Fehler bei der Berechnung von  $\Pi$  bedingt. Zu seiner Abschätzung soll ein Vergleichspotential

$$P = \int_0^R (r u'^2 + \frac{1}{4} r^{-1} u^2) dr \quad (11)$$

herangezogen werden, dessen Minimierung auf die Eulersche Gleichung

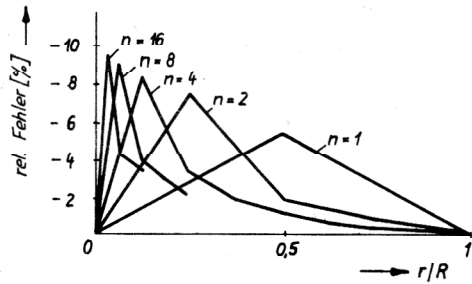
$$(r u')' - \frac{1}{4} r^{-1} u = 0 \quad (12)$$

führt. Die Lösung von Gl. (12) hat mit  $u = C\sqrt{r}$  die gleiche Abhängigkeit von  $r$  wie das Verschiebungsfeld der Rißsingularität. Läßt man also die Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes von der Winkelkoordinate außer Betracht, so kann die Abweichung von  $P$  nach Gl. (11) vom Minimum für eine Finite-Elemente-Approximation von  $u(r)$  den Fehler des zweidimensionalen FE-Netzes modellieren. Für eine Einteilung des Intervalls  $[0, R]$  in  $n$  gleichgroße Teilintervalle und quadratische Ansätze im Element erhält man, wie numerische Rechnungen zeigen, bei vorgeschriebener Verschiebung am Außenrand einen relativen Fehler von  $P$  im Gesamtbereich von

$$\rho = \sqrt[n]{13/12} - 1$$

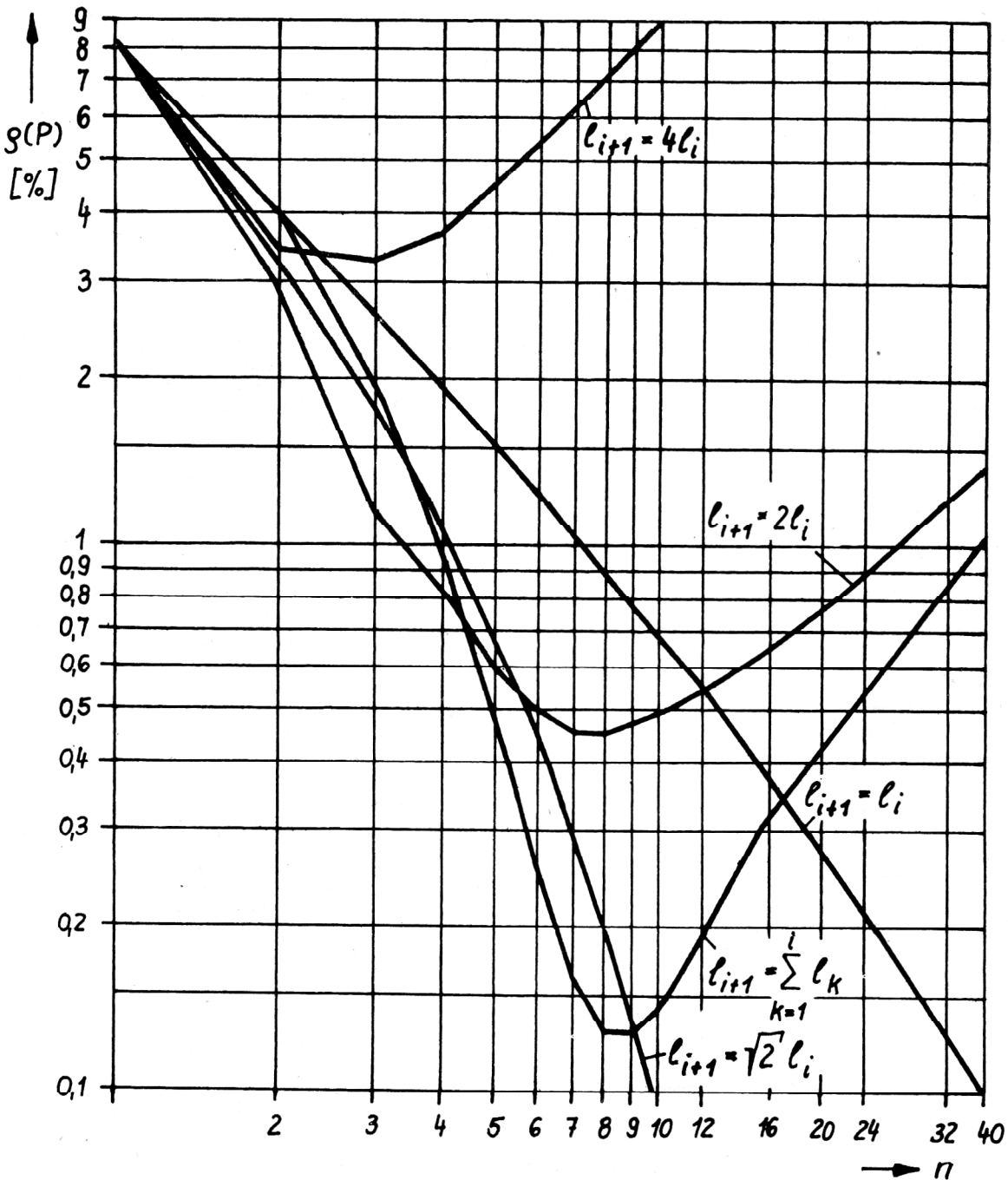
Das Ergebnis entspricht der aus der Literatur [7] bekannten Abschätzung, wonach die Energiefehler bei Rißproblemen proportional der Maschengröße des Netzes ist. Der Energiefehler im inneren Element folgt zunächst etwa Gl. (13), um dann stärker bis auf negative Werte abzusinken ( $-0,0006$  bei  $n = 128$ ). Durch die annähernd gleiche relative Genauigkeit des Potentials in allen Elementen ist bedingt, daß mit wachsender Feinheit der Elementeinteilung der relative Fehler der Verschiebungen in den inneren Elementen zunimmt (Bild 4). Das ist der Grund, weshalb bei den unter 0. zuerst genannten Verfahren auf die Ergebniswerte der inneren Elemente verzichtet wird.

Günstiger als eine gleichmäßige Netzteilung für die Anwendung der Energiemethode ist jedoch eine Netzverfeinerung in der Nähe der Rißspitze. Die Entwicklung des Potentialfehlers im inneren Element bei einigen unterschiedlichen Gesetzen der Netzverfeinerung zeigt Bild 5. Allen Gesetzen gemeinsam ist, daß der hier nicht dargestellte Fehler der Gesamtstruktur einsinnig gegen Null geht, während der Potentialfehler im inneren Ele-



**Bild 4**  
Fehler der Knotenverschiebungen in Abhängigkeit vom Rißendeabstand, n = Anzahl gleichgroßer Elemente mit quadratischer Approximation

**Bild 5**  
Potentialfehler im inneren Element bei unterschiedlichen Teilungsgesetzen



ment für alle gezeichneten Kurven mit Netzverfeinerung ein Minimum hat, das aber auch negative Werte annehmen kann und nach dem die Fehler wieder ansteigen.

In Auswertung von Bild 5 und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für die Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors möglichst kleine Elemente an der Rißspitze wünschenswert sind, empfiehlt es sich also im Interesse kleiner Fehler, bei relativ grober Vernetzung (n klein) ein größeres Verhältnis  $l_{i+1}/l_i$  und bei feiner Vernetzung (n groß) ein Verhältnis  $l_{i+1}/l_i$  zu wählen, das gegen 1 geht.

### 3. Die Realisierung der energetischen Methode im Programmsystem ROBDIS

Das Programmsystem ROBDIS dient der Lösung von Problemen der Statik, Dynamik und Wärmeleitung in ebenen und rotationssymmetrischen Modellen [8]. Zur

Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors an einem Rißende ist zusätzlich zu den übrigen Eingabedaten einzugeben:

- die Nummer des Knotenpunktes, der das Rißende darstellt (Eckpunkt mehrerer finiter Elemente)
- der Winkel der Rißausbreitungsrichtung gegenüber der x-Achse
- die Größe der Rißverlängerung in mm
- und ein Faktor zur Berechnung der richtigen Energiemengen, wenn bei symmetrischen Strukturen nur ein Teil der Struktur vernetzt wird.

Für die beiden letzten Parameter sind Standardwerte festgelegt. Bei der Abarbeitung des Programmes wird nach der Berechnung der Verschiebungswerte festgestellt, welche Elemente die Rißspitze umgeben, danach wird die potentielle Energie in diesen Elementen berechnet. Es folgen die Netzverzerrung durch die Versetzung des Rißendeknotens um  $\Delta c$  und der angrenzenden Seitenmittenknoten um  $\Delta c/2$  sowie die erneute Bestimmung der potentiellen Energie mit den ursprünglichen Knotenverschiebungen.

Abschließend wird entsprechend Gl. (8)  $K_I$  zu

$$K_I = \sqrt{-E' b^{-1} \Delta \Pi / \Delta c} \quad (14)$$

berechnet.

#### 4. Ergebnisse

Das Programm wurde für mehrere Standardaufgaben getestet, darunter für die Zugprobe (Bild 6) und die Dreipunkt-Biegeprobe (Bild 7), jeweils mit einer Rißlänge  $l = b/2$ . Die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  betragen nach [9] für Zug  $22,43 \sigma$  und für Biegung  $1,684 q$ . Die nach Gl. (10) ermittelten „kritischen“ Elementlängen sind  $0,31$  mm bzw.  $0,40$  mm. Die Rechnungen zeigten folgende Ergebnisse:

1. Die minimal erreichbaren Fehler auch bei feinsten Vernetzung (Elementlängen unter  $0,1$  mm) betragen etwa  $-1,6$  bis  $-2,2$  %. Dieser Restfehler ist auch nicht zu vermindern, wenn statt der Rechteckelemente an der Rißspitze Dreieckelemente gewählt werden.
2. Bei Überschreitung der „kritischen Elementlänge“ wächst der Fehler schnell an. Im Beispiel beträgt er bei  $0,8$  mm Kantenlänge etwa  $-15$  %.

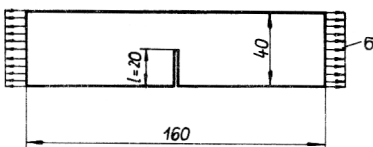


Bild 6  
Zugprobe

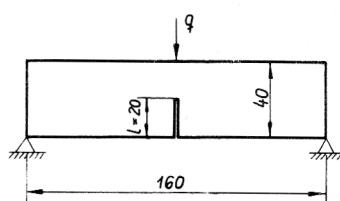


Bild 7  
Dreipunkt-Biegeprobe

3. Die notwendige Elementgröße an der Rißspitze erreicht man günstig mit einem Wachstumsgesetz, das durch

$$l_k = l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1}$$

ausgedrückt werden kann, wobei  $l_1$  die Länge der Elemente an der Rißspitze sind,  $l_2$  die Länge der Elemente, die sich nach außen anschließen, usw. Eine Aufeinanderfolge von Elementen mit stärkerer Stufung ist nicht zu empfehlen. Insbesondere zeigt sich bei einem Gesetz entsprechend  $l_k = 4l_{k-1}$  ein Anstieg der Fehler für  $n > 4$ , so wie im Bild 5 angegeben.

4. Das Verhältnis  $\Delta c/l_1$  ist unkritisch. Empfehlenswert ist,  $\Delta c \approx 10^{-3} l_1$  zu wählen (bei 8-Byte-Zahlen für die Elemente der Steifigkeitsmatrix und die Verschiebungen).
5. Der gewählte Algorithmus erwies sich als sehr rechenzeitgünstig. Die zusätzliche Rechenzeit gegenüber der Verschiebungsberechnung beträgt je Spannungsintensitätsfaktor beim Rechner ES 1040 weniger als 2 s (CPU).

#### 5. Zusammenfassung

Für die Anwendung der Energiemethode (speziell sog. Parksche Methode) zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren konnten theoretisch begründete Empfehlungen zur Vernetzungsfineinheit abgeleitet werden, die sich bei den Beispielrechnungen im wesentlichen bestätigen.

#### LITERATUR

- [1] Kuna, M.; L. Wiltinger und J. Altenbach: Theoretische Überlegungen zur bruchmechanischen Analyse ebener elastostatischer Rißprobleme mit der Methode der finiten Elemente. *Maschinenbautechnik* 30 (1981) 1, 4–8.
- [2] Brocks, W.: Zur numerischen Ermittlung des Spannungsintensitätsfaktors in der linearelastischen Bruchmechanik. Beitrag in „Strukturmechanik und numerische Verfahren“, Verlagsgesellschaft R. Müller, Köln, 1982, 88–102.
- [3] Blumenauer, H.; G. Pusch: *Bruchmechanik*. VEB Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie Leipzig, 1973.
- [4] Kuna, M.; L. Wiltinger und J. Altenbach: CRACK2D – Ein Finite-Element-Programm zur bruchmechanischen Analyse ebener elastostatischer Rißprobleme. *Maschinenbautechnik* 30 (1981) 2, 75–78.
- [5] Parks, D. M.: A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors. *Int. J. Fract.*, 10 (1974), 487–502.
- [6] Hellen, T. K.: On the method of virtual crack extensions. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 9 (1975), 187–208.
- [7] Tong, P.; Pian, T. H. H.: On the convergence of finite element method with singularity. *Int. J. Solids Structures* 9 (1973), 313–321.
- [8] Fischer, U.; Grochla, J.; Koczyk, S.; Weese, W.: *Finite-Elemente-Programme der Festkörpermechanik*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1986 (in Vorbereitung).
- [9] Heckel, K.: *Einführung in die technische Anwendung der Bruchmechanik*, 2. Auflage, Carl-Hanser-Verlag, München, Wien, 1983.
- [10] Haber, R. B.; Koh, H. M.: Explicit Expressions for Energy Release Rates using Virtual Crack Extensions. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21 (1985), 301–315.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer  
TH „Otto von Guericke“  
Sektion Maschinenbau  
3010 Magdeburg, PSF 124