TECHNISCHE MECHANIK 7 (1986) Heft 1
Manuskripteingang: 29. 4. 1985

Thermische Einschlüsse in gekoppelten Halbebenen

I. Hambach, W. Hambach, L. Jentsch

1. Einleitung

Bei der Untersuchung von Randkontaktaufgaben der Elastostatik und allgemeinerer Modelle mit Randintegralgleichungsmethoden hat sich die Einführung von Kontakttensoren als zweckmäßig erwiesen [3], [4]. Potentialansätze über den Rand des Gesamtgebietes mit dem Kontakttensor als Kern erfüllen a priori die Kontaktbedingung auf den Trennflächen zwischen den elastisch homogenen Teilen. Die Diskussion der Randkontaktaufgaben verläuft dann in großer Analogie zum elastisch homogenen Fall.

Explizit wurden Kontakttensoren berechnet für zwei fest verbundene Halbräume [3], [5] und Halbebenen mit unterschiedlichen Laméschen Moduln [6]. Die k-te Spalte des ebenen Kontakttensors G (x, y) gibt das Verschiebungsfeld zweier längs der Geraden $x_2 = 0$ verhafteter elastisch verschiedener Halbebenen an der Stelle x an, wenn in y eine Einzelkraft in x_k-Richtung wirkt. Eine entsprechende Deutung hat der Kontakttensor für zwei fest verhaftete Halbräume. G (x, y) setzt sich additiv aus der Somiglianaschen Grundlösung und einer Kompensatrix V (x, y) zusammen, die das Erfülltsein der Kontaktbedingung bewirkt. Potentiale mit G (x, y) im Kern haben sich für eine Theorie der Bimetallprobleme, bei denen die Trennlinie zwischen den elastisch homogenen Teilen bis zum äußeren Rand reicht, als nützlich erwiesen [7].

In dieser Arbeit steht ein anderer Aspekt im Vordergrund, daß nämlich reine Kontaktaufgaben der Thermoelastostatik für gekoppelte Halbräume ([3], Kap. 7) bzw. Halbebenen ([7], Satz 4.3) in Quadraturen lösbar sind. Man erhält für das Verschiebungsfeld, das sich infolge von Massenkräften, Temperaturfeldern, vorgegebenem Verschiebungs- und Spannungssprung auf der Kontaktebene ergibt, für jeden Punkt des Raumes gültige explizite Darstellungsformeln mit dem bekannten Kontakttensor. In einigen Fällen gelingt eine geschlossene Auswertung der Formeln. So wurde in [1] die tangentielle Haftspannung eines sich um eine konstante Temperatur erwärmenden zylindrischen Bauelements in der sich in der Trennebene zwischen den beiden Halbräumen befindlichen Deckfläche des Zylinders berechnet und das Singularitätsverhalten am Rand derselben durch vollständige elliptische Integrale exakt beschrieben.

Hier soll ein entsprechendes ebenes Problem mit einem thermischen Einschluß in Form eines Rechtecks behandelt werden. Es läßt sich das Verschiebungsfeld und der Spannungstensor in jedem beliebigen Punkt geschlossen durch elementare Funktionen angeben. In [12], S. 227 – 228 findet man den Spannungstensor für die Halbebene mit reckteckigem thermischen Einschluß bei spannungsfreiem Rand. Dieses Resultat folgt aus unserem, wenn man den linearen Elastizitätsmodul der einen Halbebene gegen Null gehen läßt.

2. Das Problem thermischer Einschlüsse

Wir formulieren das Problem thermischer Einschlüsse (Problem W). Wir haben zwei Halbebenen $H_1 = \{ x: x_2 > 0 \}$, $H_o = \{ x: x_2 < 0 \}$ mit den Laméschen Moduln λ_1, μ_1 bzw. λ_o, μ_o und den Wärmeausdehnungskoeffizienten α_1, α_o. In H_i befinden sich Gebiete $D_i^q \subset H_i$, $i = 0, 1$, $q = 1, \ldots, p_i$. Wir betrachten das stückweise konstante Temperaturfeld

$$\Theta(x) = \begin{cases} \Theta_i^q & \text{für } x \in D_i^q \\ 0 & \text{für } x \notin \cup \overline{D_i^q} \,. \end{cases} \tag{1}$$

Es bezeichne $u = u_1(x)\, i_1 + u_2(x)\, i_2$ den Verschiebungsvektor, $\epsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$ die Komponenten des Deformationstensors und

$$\sigma_{jk} = 2\mu\epsilon_{jk} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})\delta_{jk} - (2\mu + 3\lambda)\alpha\,\Theta\,\delta_{jk} \tag{2}$$

die Komponenten des Spannungstensors. Dabei ist

$\mu = \mu(x) = \mu_i$, $\lambda = \lambda(x) = \lambda_i$, $\alpha = \alpha(x) = \alpha_i$

für $x \in H_i$, $i = 0, 1$.

Gesucht ist ein Verschiebungsvektor u, der die Differentialgleichung

$$\mu_i\, \Delta u + (\lambda_i + \mu_i)\,\mathrm{graddiv}\, u = 0 \text{ für } x \in H_i \setminus \bigcup_{q=1}^{p_i} S_i^q,\ i = 0,1 \tag{3}$$

erfüllt, auf $x_2 = 0$ den Kontaktbedingungen

$$\lim_{x_2 \to +0} u(x) = \lim_{x_2 \to -0} u(x),\quad \lim_{x_2 \to +0} \sigma_{12}(x) = \lim_{x_2 \to -0} \sigma_{12}(x),$$
$$\lim_{x_2 \to +0} \sigma_{22}(x) = \lim_{x_2 \to -0} \sigma_{22}(x) \tag{4}$$

und auf $S_i^q = \partial D_i^q$ den Kontaktbedingungen

$$\begin{aligned} &\{ \sigma_{11}(x)\, n_1(x) + \sigma_{12}(x)\, n_2(x) \}^+ \\ &= \{ \sigma_{11}(x)\, n_1(x) + \sigma_{12}(x)\, n_2(x) \}^- \\ &\{ \sigma_{12}(x)\, n_1(x) + \sigma_{22}(x)\, n_2(x) \}^+ \\ &= \{ \sigma_{12}(x)\, n_1(x) + \sigma_{22}(x)\, n_2(x) \}^- \end{aligned} \tag{5}$$

genügt. Dabei ist in (5) $n = n_1(x)\, i_1 + n_2(x)\, i_2$ äußerer Normaleneinheitsvektor an S_i^q in x und $\{ . \}^+, \{ . \}^-$ bezeichnet den Grenzwert gegen $x \in S_i^q$ von innen bzw. außen.

Das Problem W hat die Lösung [6]

$$2\pi u(x) = \sum_{i=0,1} \sum_{q=1,\dots,p_i} (2\mu_i + 3\lambda_i)\alpha_i \Theta_i^q \int_{D_i^q} \mathrm{Div}_y G(x,y)\,dy. \qquad (6)$$

Dabei ist für $x_2 > 0, y_2 > 0$

$$\mathrm{Div}_y G(x,y) = D_1^+ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \ln|x-y| \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \ln|x-y| \end{pmatrix} + D_2^+ \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial Z}{\partial x_2} \end{pmatrix} + D_3^+ x_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

und für $x_2 < 0, \; y_2 > 0$

$$\mathrm{Div}_y G(x,y) = D_4^+ \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Z}{\partial x_2} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

mit

$$Z = \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (|x_2| + |y_2|)^2},$$

$$D_1^+ = \frac{1}{\lambda_1 + 2\mu_1},$$

$$D_2^+ = \frac{(\mu_1 - \mu_o)(\lambda_1 + 3\mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)[\mu_o(\lambda_1 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1 + \mu_1)]},$$

$$D_3^+ = \frac{2(\mu_1 - \mu_o)(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)[\mu_o(\lambda_1 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1 + \mu_1)]},$$

$$D_4^+ = \frac{2\mu_1}{\mu_o(\lambda_1 + 3\mu_1) + \mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}.$$

Für $x_2 < 0$, $y_2 < 0$ stehen in (7) D_1^-, D_2^-, D_3^- und für $x_2 > 0$, $y_2 < 0$ steht in (8) D_4^-. Man erhält D_k^- aus D_k^+ durch Vertauschen der Indizes 0 und 1 in den Laméschen Moduln. Die Formel (6) bleibt auch gültig, wenn der Durchschnitt Q von $\cup S_i^q$ mit der Geraden $x_2 = 0$ ein positives Maß hat [6]. Sei $I \subset Q$ ein offenes Intervall, dann gilt also für $x \in I$ auch (4), wobei zu beachten ist, daß bei der Bildung von σ_{12}, σ_{22} oberhalb bzw. unterhalb von $x_2 = 0$ jetzt mit Θ auftritt, je nachdem ob an I oben oder unten ein Gebiet D_i^q angrenzt.

3. Lösung für rechteckige Einschlüsse

Wir betrachten jetzt den Spezialfall eines rechteckigen thermischen Einschlusses $D \subset H_o$,

$$D = \{ (y_1, y_2) : a_1 < y_1 < a_2, \; b_2 < y_2 < b_1 \leq 0 \}.$$

Nach (6) ist dann

$$2\pi u(x) = (2\mu_o + 3\lambda_o)\alpha_o \Theta \int_D \mathrm{Div}_y G(x,y)\,dy. \qquad (9)$$

Bei der Auswertung von (9) ist praktisch das logarithmische Potential für ein beliebiges Rechteck

$D_o = \{ (y_1, y_2) : a < y_1 < b, \; c < y_2 < d \}$ zu berechnen.

Man erhält

$$\begin{aligned} V(x; a, b, c, d) &= \int_{D_o} \ln|x-y|\,dy \\ &= -\frac{3}{2}(b-a)(d-c) + \frac{1}{2}(x_1-a)(x_2-c)\ln[(x_1-a)^2 + (x_2-c)^2] \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_1-b)(x_2-c)\ln[(x_1-b)^2 + (x_2-c)^2] \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_1-a)(x_2-d)\ln[(x_1-a)^2 + (x_2-d)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_1-b)(x_2-d)\ln[(x_1-b)^2 + (x_2-d)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_2-c)^2\left(\arctan\frac{x_1-a}{x_2-c} - \arctan\frac{x_1-b}{x_2-c}\right) \qquad (10) \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_2-d)^2\left(\arctan\frac{x_1-a}{x_2-d} - \arctan\frac{x_1-b}{x_2-d}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_1-a)^2\left(\arctan\frac{x_2-c}{x_1-a} - \arctan\frac{x_2-d}{x_1-a}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_1-b)^2\left(\arctan\frac{x_2-c}{x_1-b} - \arctan\frac{x_2-d}{x_1-b}\right). \end{aligned}$$

Das logarithmische Potential für das Rechteck haben wir in der Literatur nicht gefunden, das Newtonsche Potential für den homogenen Quader steht in [13]. Obgleich für unser Problem nur grad V benötigt wird, haben wir aus methodischen Gründen alles auf die einzige Potentialfunktion V zurückgeführt.

Man erhält dann für das Verschiebungsfeld für $x \in H_o \setminus \partial D$

$$\begin{aligned} u_1(x) = \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k} \Big\{ &-C_1 \Big[\frac{x_2 - b_k}{2} \ln[(x_1-a_i)^2 + (x_2-b_k)^2] + (x_1-a_i)\arctan\frac{x_2-b_k}{x_1-a_i} \Big] \\ &+ C_2 \Big[\frac{x_2+b_k}{2} \ln[(x_1-a_i)^2 + (x_2+b_k)^2] + (x_1-a_i)\arctan\frac{x_2+b_k}{x_1-a_i} \Big] \\ &- C_3 \frac{x_2}{2} \ln[(x_1-a_i)^2 + (x_2+b_k)^2] \Big\}, \qquad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) = \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k} \Big\{ &-C_1 \Big[\frac{x_1-a_i}{2} \ln[(x_1-a_i)^2 + (x_2-b_k)^2] + (x_2-b_k)\arctan\frac{x_1-a_i}{x_2-b_k} \Big] \\ &- C_2 \Big[\frac{x_1-a_i}{2} \ln[(x_1-a_i)^2 + (x_2+b_k)^2] \end{aligned}$$

$$+ (x_2 + b_k) \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 + b_k} \Big]$$

$$+ C_3 x_2 \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 + b_k} \Big\}, \qquad (11)$$

und für $x \in H_1$

$$u_1(x) = C_4 \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k+1} \Big[\frac{x_2 - b_k}{2} \ln[(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_k)^2] + (x_1 - a_i) \arctan \frac{x_2 - b_k}{x_1 - a_i} \Big]$$

$$u_2(x) = C_4 \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k+1} \Big[\frac{x_1 - a_i}{2} \ln[(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_k)^2] + (x_2 - b_k) \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 - b_k} \Big] \qquad (12)$$

mit

$$C_k = \frac{(2\mu_o + 3\lambda_o)\alpha_o \Theta}{2\pi} D_k^-, \quad k = 1, 2, 3, 4. \qquad (13)$$

Für den Spannungstensor folgt aus (2) für $x \in H_o \setminus \partial D$

$$\sigma_{11}(x) = (\lambda_o + 2\mu_o) \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k} \Big\{ -C_1 \arctan \frac{x_2 - b_k}{x_1 - a_i} + C_2 \arctan \frac{x_2 + b_k}{x_1 - a_i} + C_3 x_2 \frac{x_1 - a_i}{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 + b_k)^2} \Big\}$$

$$+ \lambda_o \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k} \Big\{ -C_1 \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 - b_k} + (C_3 - C_2) \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 + b_k} - C_3 x_2 \frac{x_1 - a_i}{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 + b_k)^2} \Big\}$$

$$- (2\mu_o + 3\lambda_o)\alpha_o \Theta(x),$$

$$\sigma_{12}(x) = \sigma_{21}(x) = \mu_o \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k} \Big\{ -C_1 \ln[(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_k)^2] + \frac{1}{2} C_3 \ln[(x_1 - a_i)^2 + (x_2 + b_k)^2] + 2 C_3 \frac{x_2 (x_2 + b_k)}{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 + b_k)^2} \Big\}$$

$$\sigma_{22}(x) = (\lambda_o + 2\mu_o) \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k} \Big\{ -C_1 \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 - b_k} + (C_3 - C_2) \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 + b_k} - C_3 x_2 \frac{x_1 - a_i}{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 + b_k)^2} \Big\}$$

$$+ \lambda_o \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k} \Big\{ -C_1 \arctan \frac{x_2 - b_k}{x_1 - a_i} + C_2 \arctan \frac{x_2 + b_k}{x_1 - a_i} + C_3 x_2 \frac{x_1 - a_i}{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 + b_k)^2} \Big\}$$

$$- (2\mu_o + 3\lambda_o)\alpha_o \Theta(x) \qquad (14)$$

und für $x \in H_1$

$$\sigma_{11}(x) = C_4 \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k+1} \Big[(\lambda_1 + 2\mu_1) \arctan \frac{x_2 - b_k}{x_1 - a_i} + \lambda_1 \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 - b_k} \Big],$$

$$\sigma_{12}(x) = \sigma_{21}(x) = \mu_1 C_4 \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k+1} \ln[(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_k)^2],$$

$$\sigma_{22}(x) = C_4 \sum_{i,k=1}^{2} (-1)^{i+k+1} \Big[(\lambda_1 + 2\mu_1) \arctan \frac{x_1 - a_i}{x_2 - b_k} + \lambda_1 \arctan \frac{x_2 - b_k}{x_1 - a_i} \Big]. \qquad (15)$$

Bemerkenswert ist, daß man für $x \in H_o \setminus D$ und $x \in D$ denselben analytischen Ausdruck erhält, so daß man ohne Mühe die Lösung des Problems W für thermische Einschlüsse, die sich als Vereinigung von Rechtecken darstellen lassen, durch Überlagerung erhalten kann. So wurde in [2] $\sigma_{12}(x)$ für praktisch wichtige Fälle mit verschiedenen Leiterprofilen berechnet und ausgewertet, wobei die Spannungssingularität in den Eckpunkten von besonderem Interesse ist.

Da der ebene Kontakttensor auch für die Kontaktbedingung G [8] des reibungsfreien Gleitens ohne Abheben und die Kontaktbedingung H [9], bei der auf beiden Ufern die tangentielle Komponente des Verschiebungsvektors Null ist, bekannt ist, ist das Problem W auch für die Kontaktbedingungen G und H in Quadraturen lösbar. Insbesondere sind diese Probleme für den rechteckigen Einschluß geschlossen lösbar, da auch hier nur das logarithmische Potential (10) für das Rechteck benötigt wird.

Zu bemerken ist noch, daß für die Modellierung entsprechender Probleme im Raum auch die Kontakttensoren für zwei Halbräume mit der Kontaktbedingung G [10] und H [11] zur Verfügung stehen. Ein entsprechendes Beispiel wurde in [10] durchgerechnet.

LITERATUR

[1] Ahlers, H.; Hambach, I.; Jentsch, L.; Waldmann, J.: Bauelementebelastungen. Feingerätetechnik 31. Jg., Heft 5/1982, S. 214 – 218.

[2] Ahlers, H.; Hambach, I.; Hambach, W.; Jentsch, J.: Thermoelastische Spannungen in langen mikroelektrischen Leitungen. Erscheint in Technische Mechanik, H. 2/1986.

[3] Jentsch, L.: Über Wärmespannungen in Körpern mit stückweise konstanten Laméschen Elastizitätsmoduln. Schriftenreihe des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik bei der Akademie der Wissenschaften der DDR, Heft 14, Akademie-Verlag, Berlin 1972.

[4] Jentsch, L.; Maul, J.: Zur Elastizitäts- und Thermoelastizitätstheorie. Schriftenreihe Mathematische Forschung bei der Akademie der Wissensch. der DDR, Bd. 4 Akademie-Verlag, Berlin 1980.

[5] Jentsch, L.: Zur Theorie der Wärmespannungen in Bimetallkörpern. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturw. R. 29 Jg. (1980), H. 1, S. 49 – 58.

[6] Jentsch, L.: Der Greensche Kontakttensor der Elastostatik für zwei fest verbundene Halbebenen. ZAMM 61, H. 7 (1981), S. 339 – 340.

[7] Jentsch, L.: Über ein Bimetallproblem in der Ebene. Zeitschr. für Analysis und ihre Anwendungen, Bd. 1 (5), 1982, S. 67 – 92.

[8] Jentsch, L.: Über ein Bimetallproblem der Ebene mit der Kontaktbedingung des reibungsfreien Gleitens. Jubilejny sbornik trudov Tbilisskogo Gosudarstvennogo Universiteta posvjascenny 80-letiju Akad. V. D. Kupradze. Tbilissi 1984.

[9] Jentsch, L.: Über ein ebenes Bimetallproblem mit einer speziellen Rißbildung. Erscheint in der ZAMM.

[10] Jentsch, L.: Die Greensche Matrix für zwei aneinander reibungsfrei gleitende elastische Halbräume mit verschiedenen Lameschen Moduln. ZAMM 58 (1978), S. 209 – 224.

[11] Jentsch, L.: Die elastostatischen Greenschen Tensoren 1. und 4. Art für den Halbraum als Grenzfälle eines Tensors für zwei aneinandergrenzende Halbräume mit verschiedenen Lameschen Moduln. Seminar of Institute of Applied Mathematics, Tbilisi University, Reports 12 – 13, 1978.

[12] Новацкий, В.: Вопросы термоупругости. Издательство Академии Наук СССР, Москва 1962.

[13] Waldvogel, J.: The Newtonian Potential of a homogeneous cube. Zeitschr. f. angew. Math. u. Physik (ZAMP), Vol. 27 (1976), S. 867 – 871.

Anschrift der Verfasser:

Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
Sektion Mathematik

90 Karl-Marx-Stadt
Reichenhainer Str. 39