

# Verteilungsfreie spektralanalytische Lebensdauerberechnung

Dieter JOHANSSON

## 1. Einleitung

Der Nachweis der Ermüdungsfestigkeit wird heute überwiegend auf der Basis von Amplitudenverteilungen geführt. Aus diesen Verteilungen wird mit Hilfe einer Schadensakkumulationshypothese unter Einbeziehung der Wöhlerlinie die Lebensdauer berechnet.

Zur Ermittlung der Amplitudenverteilung erfolgt eine Klassierung der regellosen Beanspruchungs-Zeit-Funktion in gleichabständigen Spannungsstufen. Dabei werden Beanspruchungszyklen als Aufeinanderfolge von Maxima und Minima interpretiert.

Die einparametrische Klassierung liefert ein Beanspruchungskollektiv, das die Lebensdauerberechnung direkt ermöglicht, wenn das Kollektiv bezüglich einer konstanten Mittelspannung symmetrisch ist. Beispiele dieser Klassierung sind die Zählung der Überschreitungshäufigkeiten, die Schwingbreitenzählung, die Zählung aller Maxima und die Zählung regulärer Spitzenwerte [1].

Bei den zweiparametrischen Klassierverfahren wird zusätzlich zur Schwingbreite deren Lage ermittelt, z. B. dargestellt als momentane Mittelspannung  $\sigma_m$  und zugehöriger Amplitude  $\sigma_a$ . Im Ergebnis dieser Klassierung entsteht eine Markovsche Übergangsmatrix (Korrelationsnetz), deren Elemente jedoch auf ein einparametrisches und symmetrisches Beanspruchungskollektiv zurückgeführt werden müssen, um eine Lebensdauerberechnung zu ermöglichen. Dieses Kollektiv wird durch Transformation der Matrixelemente auf die Hauptdiagonale gebildet. Dazu sind entsprechende Annahmen, z. B. Anwendung von Dauerfestigkeitsschaubildern auf die Zeitfestigkeit bzw. die Berücksichtigung zusätzlicher Wöhlerlinien für verschiedene Mittelspannungen, erforderlich. Beispiele für zweiparametrische Klassierung sind: Zählung voller Zyklen, zweiparametrische Spitzenwertzählung, Rainflow-Verfahren [1]. Je nach Wahl des verwendeten Klassierverfahrens und nach Wahl der Methodik zur Konstruktion des einparametrisch-symmetrischen Beanspruchungskollektivs erhält man für eine gegebene Beanspruchungs-Zeit-Funktion andere Lebensdauerwerte. Insbesondere Funktionen mit regellos schwankenden Mittelspannungen sind verschieden interpretierbar. Parallel zu den Klassierverfahren hat sich in den letzten Jahren in breitem Umfang die digitale Spektralanalyse für Funktionen mit endlicher Signalleistung entwickelt. Im vorliegenden Bericht wird untersucht, wie aus Ergebnissen einer derartigen Spektralanalyse von Beanspruchungs-Zeit-Funktionen direkt die Lebensdauer berechnet werden kann, d. h. ohne Bezugnahme auf Maxima und Minima von Beanspruchungszyklen. Ausgangspunkt des Verfahrens ist die Annahme einer linearen Schadensakkumulation.

## 2. Lineare Schadensakkumulation als arithmetischer Mittelwert

Die Formel von Palmgren/Miner [2], [3] setzt eine lineare Schädigungszunahme für schwingend beanspruchte Bauteile voraus:

$$N_M = \frac{n_{ges}}{\sum_{K=1}^m \frac{n_K}{N_K}} \quad (1)$$

mit

- $N_M$  Lebensdauer nach Palmgren/Miner
- $n_K$  Anzahl der Lastspiele je Spannungsstufe  $\sigma_K$
- $N_K$  ertragbare Lastspiele der Stufe  $\sigma_K$  aus dem Wöhlerversuch
- $n_{ges}$  Summe aller Lastspiele einer Teilfolge mit  $m$  Stufen.

Zu dieser Gleichung existieren zahlreiche Modifikationen, die im allgemeinen den Verlauf der Wöhlerlinie im Dauerfestigkeitsgebiet variieren bzw. die Veränderung der Dauerfestigkeit  $\sigma_D$  während der Schwingbeanspruchung berücksichtigen [4]. Charakteristisch ist die lineare Zunahme der Schädigung und daraus folgend sind die Ergebnisse aus Gleichung (1) unabhängig von der Reihenfolge der verwendeten Lastspiele bzw. Lastspielstufen. Neben dieser Eigenschaft ist ein weiteres Merkmal der Gleichung (1) für die nachfolgenden Ableitungen von Bedeutung: sie beschreibt einen arithmetischen Mittelwert.

Allgemein gilt für das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  einer diskreten Größe  $x_K$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{H_{ges}} \sum_{K=1}^m H_K \cdot x_K \quad (2)$$

mit

- $H_K$  absolute Häufigkeit der Größe  $x_K$
- $H_{ges}$  gesamte absolute Häufigkeit.

In Gleichung (1) handelt es sich ebenfalls um absolute Häufigkeiten:

$$n_K = H_K \quad \text{und} \quad n_{ges} = \sum_{K=1}^m n_K = H_{ges}$$

Daraus folgt mit Gleichung (1):

$$N_M = \frac{H_{ges}}{\sum_{K=1}^m H_K \cdot \frac{1}{N_K}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{N_M} = \frac{1}{H_{ges}} \sum_{K=1}^m H_K \cdot \frac{1}{N_K} \quad (4)$$

Die zu mittellnde diskrete Größe ist jetzt der „lineare Schädigungsgradient“

$$\Delta D_K = \frac{1}{N_K}, \quad (5)$$

das heißt

$$\frac{1}{N_M} = \frac{1}{H_{ges}} \sum_{K=1}^m H_K \Delta D_K = \overline{\Delta D} \quad (6)$$

Die Lebensdauer nach Palmgren/Miner ist also der Kehrwert des arithmetischen Mittelwertes der linearen Schädigungsgradienten  $\Delta D_K$  je Stufe K:

$$N_M = \frac{1}{\overline{\Delta D}} \quad (7)$$

### 3. Zusammenhang zwischen arithmetischem Mittelwert und Effektivwert

Der arithmetische Mittelwert  $\bar{\sigma}_o$  der diskreten Oberspannungen  $\sigma_{oK}$  einer zentrierten, in m Blöcken gestuften Sinusfunktion  $\sigma(t)$  kann aus dem Effektivwert aller Momentanwerte dieser Funktion  $\sigma(t)$  abgeschätzt werden:

$$\bar{\sigma}_o \leq \sqrt{2} \cdot \sigma_{eff} = \sqrt{\frac{\overline{\sigma_o^2}}{\sigma_o^2}} = \sqrt{\frac{1}{H_{ges}} \sum_{K=1}^m H_K \cdot \sigma_{oK}^2} \quad (8)$$

Der arithmetische Mittelwert  $\bar{\sigma}_o$  ist für den quadratischen Mittelwert  $\overline{\sigma_o^2} = \sqrt{\sigma_o^2}$  eine untere Schranke.

Beispiel:

Gegeben sei ein Zweistufen-Blockprogramm, bestehend aus  $\sigma_{o1} = 100$  MPa mit Häufigkeit 100 und  $\sigma_{o2} = 200$  MPa mit Häufigkeit 20. Gesucht ist der Effektivwert.

$$\sigma_{o1} = 100 \text{ MPa} \quad H_1 = 100 \quad H_{ges} = 120$$

$$\sigma_{o2} = 200 \text{ MPa} \quad H_2 = 20$$

Es gilt:

$$\frac{\bar{\sigma}_o}{\sigma_o} = \frac{1}{120} (100 \cdot 100 \text{ MPa} + 20 \cdot 200 \text{ MPa}) = 116,67 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{\frac{\overline{\sigma_o^2}}{\sigma_o^2}} = \frac{1}{120} (100 \cdot 100^2 \text{ MPa}^2 + 20 \cdot 200^2 \text{ MPa}^2) = 122,47 \text{ MPa}$$

Einsetzen in Gleichung (8) ergibt:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\overline{\sigma_o^2}}{\sigma_o^2}} = 86,60 \text{ MPa}$$

Jede Durchmischung der beteiligten Sinus-Blöcke beeinflusst den Effektivwert nicht, d. h., auch Gleichung (8) ist wie Gleichung (1) „reihenfolgeunabhängig“.

### 4. Spektralanalytische Lebensdauerberechnung

Im Abschnitt 2 wurde gezeigt, daß die Palmgren/Miner-Formel mit dem Kehrwert des arithmetischen Mittelwertes der linearen Schädigungsgradienten identisch ist. Diese Gradienten sind jedoch diskrete Größen, deren Häufigkeit unmittelbar vom gewählten Klassierverfahren abhängt. Um die Kenngröße „Effektivwert“ der Momentanwerte der Beanspruchungs-Zeit-Funktion gemäß Gleichung (8) nutzen zu können, darf nicht von der Funktion  $\sigma(t)$  ausgegangen werden, sondern von einer zugeordneten Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion  $\Delta D(t)$  (im folgenden „Schädigungsgradientenfunktion“), die für jeden Wert  $\sigma(t)$  existiert. Die Funktion  $\Delta D(t)$  ist aus der Wöhlerliniengleichung zu berechnen. Speziell für die Geradengleichung im doppeltlogarithmischen  $\sigma$ -N-System gilt für die Zeitfestigkeit:

$$N(\sigma) = K_W \cdot \sigma^{-\varphi} \quad (9)$$

mit

$K_W$  Wöhlerkonstante (N bei  $\sigma = 1$  MPa)

$\varphi$  Neigung der Wöhlerlinie.

Daraus folgt mit Gleichung (5):

$$\Delta D(t) = \frac{1}{K_W} \cdot [\sigma(t)]^\varphi \quad (10)$$

Für das Dauerfestigkeitsgebiet sind die Modifikationen von Corten/Dolan [5] (linearisiert), Haibach [6] usw. anwendbar. Die Wöhlerlinie kann in beliebiger Form vorliegen, z. B. als Stüssi-Formel [7], wichtig ist nur die Postulierung des linearen Schädigungsanstieges  $1/N$ . Aus Gleichung (10) kann der Effektivwert  $\Delta D_{eff}$  berechnet werden. Analog zu Gleichung (8) gilt:

$$\overline{\Delta D} \leq \sqrt{2} \cdot \Delta D_{eff} = \overline{\Delta D^2} \quad (11)$$

und Einsetzen von (11) in (7)

$$N_M = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \Delta D_{eff}} \leq \frac{1}{\overline{\Delta D}} \quad (12)$$

Das Einsetzen des größeren Wertes  $\sqrt{2} \cdot \Delta D_{eff}$  in Gleichung (7) führt zu einer kürzeren Lebensdauer gegenüber (1). Weiter ist zu beachten, daß der Faktor  $u = \sqrt{2}$  eine untere Schranke darstellt. Für eine mit  $\varphi$  potenzierte Sinus-Beanspruchung entsprechend Gleichung (10) entsteht

$$u^2(\varphi) = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \dots = \frac{\varphi!}{\prod_{l=1}^{\varphi} (1 - \frac{1}{2})} \geq 2$$

berechenbar für ganzzahlige  $\varphi \geq 1$ .

$\Delta D_{eff}$  wird aus der Gesamtleistung  $S_{\Delta D_{ges}}$  der Funktion  $\Delta D(t)$  ermittelt:

$$\Delta D_{eff} = \sqrt{S_{\Delta D_{ges}}} \quad (13)$$

mit

$$S_{\Delta D_{ges}} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{\Delta D}(f) df \quad (14)$$

oder

$$S_{\Delta D_{ges}} = \int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D}(f) df \quad (15)$$

$S_{\Delta D}(f)$  ist die den Frequenzen  $f$  zugeordnete zweiseitige Spektralleistungsdichte (auf den Frequenzabstand  $df$  bezogene Spektralleistung) der Schädigungsgradientenfunktion und  $\tilde{G}_{\Delta D}(f)$  ist die einseitige Spektralleistungsdichte:

$$\tilde{G}_{\Delta D}(f) = 2 \cdot \tilde{S}_{\Delta D}(f). \quad (16)$$

Die Herleitung der Gleichung (7) basierte auf der Voraussetzung, daß alle Schwingspiele mit der gleichen Frequenz  $f_0$  vorliegen bzw. Abweichungen von dieser Frequenz die Lebensdauer wenig beeinflussen. Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, daß für einen großen Frequenzbereich die Wöhlerlinien etwa gleich sind. Wenn alle Schwingspiele die gleiche Frequenz  $f_0$  besitzen, so konzentriert sich die Gesamtleistung auf dieser Frequenz. Das heißt, die Gleichungen (7) und (12) gelten für eine schmalbandige Beanspruchungs-Zeit-Funktion. Bei Beanspruchungen mit breitbandigen oder mehrgipfligen Spektren wirken aber Spektralleistungen verschiedener Frequenzen *gleichzeitig*. Daher muß der Bezugsmaßstab „ertragbare Lastspiele  $N$ “ zugunsten „Lebensdauer  $T_L$ “ aufgegeben und die Gesamtleistung in ihre spektralen Anteile zerlegt werden. Beim schmalbandigen Vorgang ist die Gesamtleistung durch die einseitige Spektralleistung der Frequenz  $f_0$  repräsentiert:

$$S_{\Delta D_{ges}} = G_{\Delta D}(f_0). \quad (17)$$

Einsetzen in die Gleichungen (13) und (12) liefert:

$$N_M = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{G_{\Delta D}(f_0)}} \quad (18)$$

$N_M$  wird in die Lebensdauer  $T_L$  und die Frequenz  $f_0$  zerlegt:

$$N_M = T_L \cdot f_0 \quad (19)$$

$$T_L \cdot f_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{G_{\Delta D}(f_0)}} \quad (20)$$

oder

$$T_L = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{G_{\Delta D}(f_0) \cdot f_0^2}} \quad (21)$$

Das Produkt unter der Wurzel ist die Spektralleistung der Geschwindigkeit  $\Delta D_V$  der Schädigungsgradientenfunktion

$$\Delta D_V(t) = \frac{d[\Delta D(t)]}{dt}, \quad (22)$$

dividiert durch  $4\pi^2$ , weil zwischen der Spektralleistung einer Funktion  $x(t)$  und deren Zeit-Ableitung  $v(t) = \dot{x}(t)$  allgemein gilt:

$$S_V(\omega) = \omega^2 \cdot S_x(\omega) \quad (23)$$

oder

$$S_V(f) = 4\pi^2 f^2 \cdot S_x(f) \quad (24)$$

bzw.

$$G_V(f) = 4\pi^2 f^2 \cdot G_x(f). \quad (25)$$

Wendet man Gleichung (25) auf (21) an, so erhält man:

$$G_{\Delta D_V}(f) = 4\pi^2 f^2 \cdot G_{\Delta D}(f) \quad (26)$$

und

$$G_{\Delta D_V}(f_0) = 4\pi^2 f_0^2 \cdot G_{\Delta D}(f_0). \quad (27)$$

Daraus folgt:

$$G_{\Delta D}(f_0) \cdot f_0^2 = \frac{G_{\Delta D_V}(f_0)}{4\pi^2}. \quad (28)$$

Einsetzen in (21) liefert

$$T_L = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{G_{\Delta D_V}(f_0)}} \quad (29)$$

oder durch die Gesamtleistung  $S_{\Delta D_V_{ges}}$  charakterisiert:

$$T_L = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{S_{\Delta D_V_{ges}}}} \quad (30)$$

Bei mehrgipfligen Spektren gilt analog zu (15):

$$T_L = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D_V}(f) df}}$$

oder unter Einbeziehung der Gleichung (26):

$$T_L = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\int_0^{\infty} \tilde{G}_{\Delta D}(f) \cdot f^2 df}} \quad (32)$$

Die Leistungsanteile  $\tilde{G}_{\Delta D}(f)$  sind aus der Schädigungsgradientenfunktion  $\Delta D(t)$  ermittelbar. Zunächst führt eine Fouriertransformation dieser Funktion auf die komplexe Amplitudendichte  $\tilde{A}_{\Delta D}(jf)$ :

$$\tilde{A}_{\Delta D}(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta D(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (33)$$

mit  $j = \sqrt{-1}$ .

Sie stellt das auf ein Frequenzintervall  $df$  bezogene Amplitudenspektrum dar:

$$\tilde{A}_{\Delta D}(jf) = \frac{A_{\Delta D}(jf)}{df}$$

Gleichung (33) kann auch als Funktion der Beanspruchung unter Berücksichtigung von (10) geschrieben werden:

$$\tilde{A}_{\Delta D}(jf) = \frac{1}{K_W} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(t)]^\varphi \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (34)$$

Aus (33) folgt die reelle zweiseitige Spektralleistungsdichte:

$$\tilde{S}_{\Delta D}(f) = \tilde{A}_{\Delta D}(jf) \cdot \tilde{A}_{\Delta D}^*(jf) \cdot df = \frac{|\tilde{A}_{\Delta D}(jf)|^2 \cdot df}{df} \quad (35)$$

mit

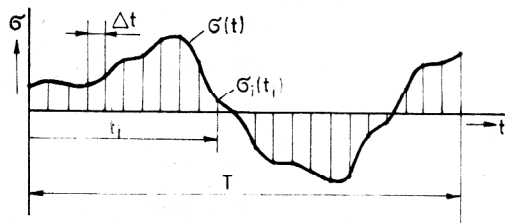
$$\tilde{A}_{\Delta D}^*(jf) = \tilde{A}_{\Delta D}(-jf)$$

konjugiert komplexe Größe zu  $\tilde{A}_{\Delta D}(jf)$ .

Mit Gleichung (16) kann dann die Lebensdauer nach (32) berechnet werden.

## 5. Numerische Aufbereitung

Eine analytisch geschlossene Lösung der Gleichungen (33) bzw. (34) ist selbst für einfache Funktionen  $\sigma(t)$  kaum möglich. Die Berechnung der Leistungsanteile  $\tilde{G}_{\Delta D}(f)$  ist jedoch praktisch realisierbar, wenn von einer digitalisierten Beanspruchungs-Zeit-Funktion ausgegangen wird. Diese Funktion sei mit Hilfe eines Analog-Digital-Wandlers aus einem kontinuierlichen analogen Zeitverlauf  $\sigma(t)$  ermittelt worden (Bild 1).



**Bild 1**  
Digitalisierung einer analogen, kontinuierlichen Beanspruchungs-Zeit-Funktion

Das Abtastintervall sei  $\Delta t = \text{konst.}$ , die Abtastdauer  $T = (n - 1) \cdot \Delta t$ , wobei  $n$  die Anzahl der Meßwerte im Zeitbereich  $T$  bedeutet. Die Funktion  $\sigma(t)$  wird dann durch die diskreten Werte  $\sigma_i$  repräsentiert:

$$\sigma_i = \sigma(t_i)$$

für

$$t_i = (i - 1) \cdot \Delta t$$

und

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Dadurch entsteht aus Gleichung (10) eine diskrete Schädigungsgradientenfunktion

$$\Delta D_i = \Delta D(t_i) = \frac{1}{K_W} \cdot \sigma_i^\varphi \quad (36)$$

mit

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Unter Anwendung der diskreten Fouriertransformation (DFT) geht das Integral in Gleichung (33) in die Summa-

tionsform über und führt auf ein diskretes Amplitudenspektrum:

$$A_{\Delta D_l} = A_{\Delta D}(jf_l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta D_i \cdot e^{-\frac{j2\pi \cdot l \cdot i}{n}} \quad (37)$$

mit

$$l = 1, 2, \dots, n,$$

das heißt, es liegen  $n$  Spektralwerte in konstanten Abständen  $\Delta f$  auf der negativen und positiven Frequenzachse vor. Das zugehörige diskrete Leistungsspektrum lautet:

$$S_{\Delta D_l} = |A_{\Delta D_l}|^2 \quad (38)$$

Wegen der Symmetrie des Spektrums liefern nur

$$p = \frac{n}{2} + 1$$

Spektralwerte einer Frequenzseite eigenständige Informationen. Deshalb kann die einseitige Spektralleistung verwendet werden:

$$G_{\Delta D_l} = 2 \cdot |A_{\Delta D_l}|^2 \quad (39)$$

mit

$$l = 1, 2, \dots, p$$

Die diskrete Spektralleistungsdichte ist auf das Intervall  $\Delta f$  bezogen:

$$\tilde{G}_{\Delta D_l}(f_l) = \frac{G_{\Delta D_l}(f_l)}{\Delta f} \quad (40)$$

Wird außerdem in Gleichung (32)  $df$  durch  $\Delta f$  und das Integral durch eine Summe ersetzt, so entsteht aus (32) und (40)

$$T_L = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sum_{l=1}^p G_{\Delta D_l}(f_l) \cdot f_l^2}} \quad (41)$$

Gleichung (41) ermöglicht eine rationale Lebensdauerberechnung, wenn als diskrete Fouriertransformation zur Berechnung der  $p$  Spektralwerte  $G_{\Delta D_l}$  der schnelle Algorithmus (Fast Fourier Transformation, FFT [8]) eingesetzt wird.

## 6. Übersicht zur Realisierung der spektralen Lebensdauerberechnung

Der komplette Ablauf der vorgeschlagenen spektralen Lebensdauerberechnung läßt sich in 4 Schritte gliedern:

- Digitalisierung der Beanspruchungs-Zeit-Funktion in diskrete Momentanwerte  $\sigma_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$
- Berechnung der  $n$  diskreten Schädigungsgradientenwerte  $\Delta D_i$
- Fouriertransformation der  $\Delta D_i$ -Werte mit FFT
- Anwendung der Gleichung (41).

Die schnelle Fouriertransformation ist bereits in einigen für die Belange des Maschinenbaues entwickelten Pro-

grammsystemen enthalten, z. B. [9] bis [12]. Auch bei der Verarbeitung der  $\Delta D_1$ -Werte sind alle üblichen Voraussetzungen und Folgen einer digitalen Signalanalyse voll gültig, wie die Beachtung des Shannonschen Abtasttheorems und die Entstehung von Abbruchfehlern durch unvermeidbare Fensterfunktionen infolge endlicher Zeitabschnitte.

Es muß lediglich vor der Transformation die Beanspruchungs-Zeit-Funktion in eine Schädigungsgradientenfunktion umgeformt werden. Nach Berechnung der Spektralleistungen  $G_{\Delta D_1}$  werden die Produkte  $G_{\Delta D_1} \cdot f_1^2$  summiert.

## 7. Programmierung

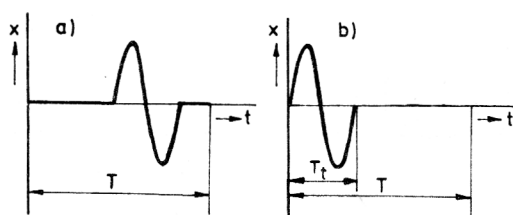
Zur Berechnung von Lebensdauerwerten nach Gleichung (41) wurde das FORTRAN-Programm SLEBE1 [12] entwickelt. Das Programm entstand aus bereits vorhandenen Programmen zur digitalen Signal-Prozessanalyse [12], die entsprechende Unterprogramme zur FFT-Analyse [13] nutzen.

SLEBE1 wurde für den Rechner SPC-16/65 (General Automation) geschrieben, der mit Magnetplattenspeicher ausgerüstet ist. Voraussetzung für die Anwendung des Programms ist die Abspeicherung der digitalisierten Beanspruchungs-Zeit-Funktion auf einem File der Magnetplatte.

SLEBE1 formt diese Funktion unter Berücksichtigung der Maximalspannung, der Wöhlerlinienkonstanten  $K_W$  und  $\varphi$  und der Dauerfestigkeit  $\sigma_D$  in die zugehörige Schädigungsgradientenfunktion um und legt die Werte auf einem zweiten File der Magnetplatte zur weiteren Bearbeitung ab. Die Filterung transientser Anteile aus dem Gesamtsignal ist möglich, d. h. die von Null verschiedenen Werte der Schädigungsgradientenfunktion werden zusammengerückt. Erst diese gefilterte Funktion wird fouriertransformiert. Dadurch werden einerseits zusätzliche Abbruchfehler vermieden, und andererseits wird für die Fouriertransformation Rechenzeit eingespart. Das Zusammenrücken der transienten Signale täuscht aber eine zu hohe Frequenz  $f_T$  der Schädigungsgradientenfunktion vor. Diese Frequenz ist genau um einen „Transientenfaktor  $t_F$ “ gegenüber der tatsächlich wirkenden Frequenz  $f$  zu groß:

$$f = t_F \cdot f_T \quad (42)$$

Der Faktor  $t_F$  ist aus dem Verhältnis der Zeitdauer  $T$  zur Dauer des transienten Signals  $T_t$  berechenbar (Bild 2).



**Bild 2**  
Transiente Funktion im Zeitbereich  $T$  (Bild 2 a) und zusammengerückte Funktion (Bild 2 b)

Als die im Sinne der Schädigung „tatsächlich wirkende“ Frequenz sei hier die auf  $T$  bezogene Frequenz bezeichnet:

$$f = \frac{1}{T} \quad (43)$$

und als Frequenz des transienten Signals

$$f_T = \frac{1}{T_t} \quad (44)$$

Dann folgt aus (43), (44) und (42) der Transientenfaktor:

$$t_F = \frac{T_t}{T} \quad (45)$$

Gleichung (42) muß in Gleichung (41) berücksichtigt werden, sonst wird  $T_L$  infolge des Zusammenrückens der Funktion  $\Delta D(t)$  verfälscht. Ist die Schädigungsgradientenfunktion gefiltert (zusammengerückt), dann sind die daraus berechneten Frequenzen  $f_1$  einheitlich um den Faktor  $1/t_F$  zu groß, d. h., sie müssen mit  $t_F$  multipliziert werden, um die tatsächlich wirkenden Frequenzen zu erhalten. Das gilt für alle beteiligten Frequenzen, so daß jetzt aus Gleichung (41) folgende Modifikation entsteht:

$$T_L = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=1}^p G_{\Delta D_1}(f_i) \cdot f_i^2}} \cdot \frac{1}{t_F} \quad (46)$$

Im Programm SLEBE1 wird nach der Umrechnung von  $\sigma(t)$  in  $\Delta D(t)$  der Transientenfaktor  $t_F$  angegeben. Das Programm ermöglicht ferner die Modellierung der Schädigung im Druckbereich (für negative Spannungswerte) mit Hilfe eines einzugebenden Faktors  $|DS| \leq 1$ . Dabei bedeutet  $DS = 0$  keine Schädigung,  $DS > 0$  Schädigung,  $DS < 0$  Erholung im Druckbereich.

In SLEBE1 ist die Multiplikation der zu verarbeitenden Funktion mit verschiedenen Gewichtsfunktionen im Zeitbereich möglich, um Abbruchfehler zu verringern. Es handelt sich dabei um Rechteck-, Bartlett-, Hanning- und Hamming-Fensterfunktionen [14].

## 8. Anwendungsbeispiele

Mit dem Programm SLEBE1 wurden biharmonische Beanspruchungs-Zeit-Verläufe analysiert und diese Ergebnisse experimentellen Untersuchungen an gekerbten Rundproben unter Zug-Druck-Belastung gegenübergestellt. Die gleichen Rundproben verwendete Lange [15] [16] für seine Versuchsdurchführung. Die Wöhlerliniengleichung lautet:

$$N(\sigma) = 1,27 \cdot 10^{17} \cdot \sigma^{-5,42} \quad (47)$$

für 50 % Bruchwahrscheinlichkeit.

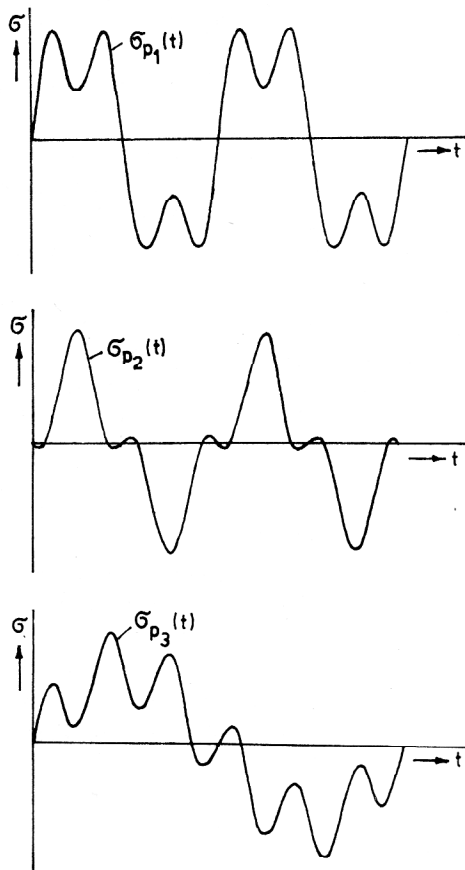
Als Prüfmaschine diente eine prozessrechnergesteuerte Hydropulsanlage (Hersteller Schenck-AG) der Sektion Grundlagen des Maschinenwesens der TU Dresden. Es wurde ein 16-kN-Prüfzylinder benutzt. Die Prüfung erfolgte kraftgesteuert für drei biharmonische Beanspruchungsverläufe  $\sigma_p(t)$  auf einem einheitlichen Maximalhorizont  $\sigma_n = 170$  MPa (Nennspannung im Nettoquerschnitt):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{p1}(t) &= \sigma_{11} \cdot \sin \omega t + \sigma_{12} \cdot \sin 3 \omega t \\ \sigma_{p2}(t) &= \sigma_{21} \cdot \sin \omega t + \sigma_{22} \cdot \sin (3 \omega t + \pi) \\ \sigma_{p3}(t) &= \sigma_{31} \cdot \sin (\omega t/2) + \sigma_{32} \cdot \sin 3 \omega t \end{aligned} \right\} (48)$$

mit  $\omega = 31,416 \text{ s}^{-1}$ , d. h. einheitliche Frequenz der Oberschwingung  $f_2 = 15 \text{ Hz}$ ,  $\sigma_{11} = 157,4 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{21} = \sigma_{31} = 113,3 \text{ MPa}$  und alle  $\sigma_{j2} = \sigma_{j1}/2$ .

Die Verläufe  $\sigma_{p_j}$  wurden als mathematische Sollwerte digital erzeugt [17] und für die Weiterverarbeitung mit SLEBEL auf der Magnetplatte abgelegt.

Mit Hilfe spezieller Prozessorbefehle zur Ansteuerung einzelner Extremwerte [18] wurden die Beanspruchungsverläufe auf der Hydropulsanlage realisiert. Der so hergestellte Verlauf sei als „technischer Sollwert“ bezeichnet. Entscheidend für die Lebensdauer der Probe-stäbe ist der tatsächlich gemessene Istwertverlauf der Beanspruchung. In diesem Fall handelt es sich um den integralen Wert der von der Kraftmeßdose gemessenen Gesamtkraft. Bild 3 zeigt die mathematischen Sollwerte der drei Funktionen, die nur wenig von den gemessenen Istwertverläufen abweichen.

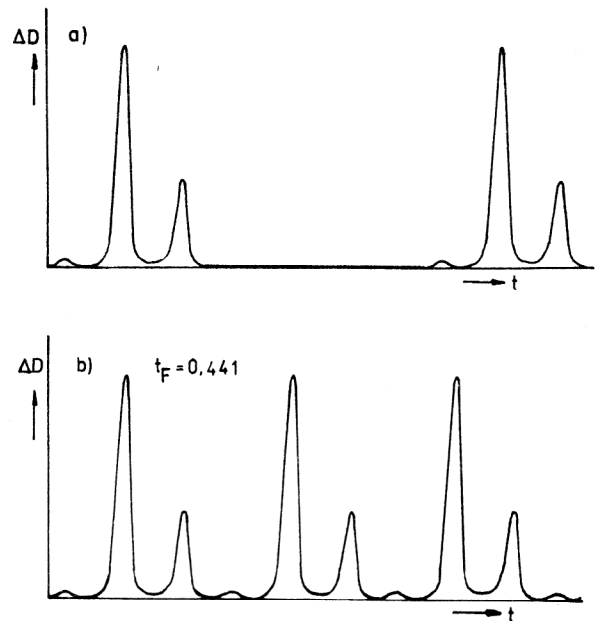


**Bild 3**  
Beanspruchungs-Zeit-Funktionen  $\sigma_{p_j}(t)$

Als Beispiel ist in Bild 4 die originale und die zusammen-gerückte (gefilterte) Schädigungsgradientenfunktion  $\Delta D_3(t)$  dargestellt. Die Funktionen  $\Delta D_j(t)$  wurden für die Variante „Keine Schädigung im Druckbereich“ be-rechnet. Den maximalen Zugspannungen  $\sigma_{\max} = 170 \text{ MPa}$

entsprechen die Maximalwerte der Schädigungsgradien-tenfunktionen gemäß Gleichung (47):

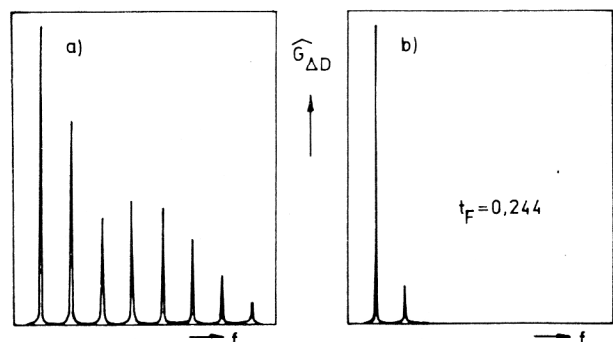
$$\Delta D_{\max} = 9,6656 \cdot 10^{-6}.$$



**Bild 4**  
Schädigungsgradientenfunktion  $\Delta D_3(t)$ ,  
a) ohne Filterung b) mit Filterung




Bild 5 zeigt das Leistungsspektrum  $G_{\Delta D_1}(f_1)$  der Funk-tion  $\Delta D_2(t)$ . Für das im Bild 5b dargestellte Spektrum wurden vor der Fouriertransformation die transienten Anteile der Schädigungsgradientenfunktion mit dem Programm SLEBEL gefiltert.

Durch diese Maßnahme können die durch zeitlich be-grenzte Fouriertransformation entstehenden Seitenflügel in den Spektren deutlich verringert werden, und es wird Rechenzeit eingespart, weil weniger Werte fouriertrans-formiert werden müssen.



**Bild 5**  
Leistungsspektrum  $G_{\Delta D_1}(f)$  der Funktion  $\Delta D_2(t)$   
a)  $\Delta D_2(t)$  nicht gefiltert b)  $\Delta D_2(t)$  gefiltert  
Abszisse: Frequenz = 0 bis 50 Hz, Bandbreite  $\Delta f = 0,509 \text{ Hz}$   
Ordinate:  $G_{\Delta D} / G_{\Delta D_{\max}} = \hat{G}_{\Delta D}$

**Tabelle 1**  
Gemessene und berechnete Lebensdauerwerte

j	$\sigma_{F_j}$	$N_2$	$N_R$	$N_{CD}$	$S = \frac{N_R}{N_{CD}}$	$T_E$ $s^{-1}$	$T_L$ $s^{-1}$	$S = \frac{T_E}{T_L}$
1		545 561	181 854	103 460	1,78	18 185	18 629	0,98
2		1 049 809	547 405	310 378	1,76	36 494	36 067	1,01
3		1 124 303	374 768	298 935	1,25	37 477	39 072	0,96

Die berechneten Lebensdauerwerte sind in der Tabelle 1 enthalten. Dabei bedeutet

$N_2$  empirischer Erwartungswert der vom Prozessorrechner gemessenen Halbschwingspiele je Versuchsserie mit 7 bis 8 Proben

$N_R$  Anzahl der Schwingspiele, die durch einparametrische Klassierung regulärer Spitzenwerte entsteht, während der gemessenen Lebensdauer

$N_{CD}$  Anzahl der Schwingspiele, berechnet nach Corten/Dolan [17]. Kollektivbildung auf der Basis einparametrischer Klassierung regulärer Spitzenwerte

$T_E$  Umrechnung der Halbschwingspiele in Sekunden, d. h.

$$T_E = \frac{N_2}{30} \text{ s,}$$

weil für alle Halbschwingspiele die einheitliche Frequenz 30 Hz verwendet wurde, um  $f_2 = 15$  Hz zu realisieren.

$T_L$  Lebensdauer, berechnet nach Gleichung (46)

S Schadenssumme;  $S = N_R/N_{CD}$  bzw.  $S = T_E/T_L$ .

Für die Berechnung der Lebensdauer  $T_L$  in Tabelle 1 wurden jeweils 5000 Momentan-Istwerte  $\sigma_i$  in Schädigungsgradientenfunktionen umgerechnet. Nach dem Zusammenrücken konnten 2048 Werte der Funktionen  $\sigma_{p1}$  und  $\sigma_{p3}$  sowie 1024 Werte von  $\sigma_{p2}$  fouriertransformiert werden. Wurden vor der Fouriertransformation die Schädigungsgradientenfunktionen zusätzlich mit Gewichtsfunktionen multipliziert, so entstanden etwas größere Schadenssummen, z. B. für das optimale Cosinusfenster (Hamming-Gewichtsfunktion)  $S_1 = 1,13$ ;  $S_2 = 1,19$  und  $S_3 = 1,11$ . Die Schadenssummen  $T_E/T_L$  für nicht gefilterte Gradientenfunktionen sind deutlich größer:  $S_1 = 1,38$ ;  $S_2 = 2,20$ ;  $S_3 = 1,46$ . Die Lebensdauerwerte auf Grund der mathematischen Sollwerte weichen nur wenig von denen der Istwerte ab.

Abschließend soll berücksichtigt werden, daß der Faktor  $u = \sqrt{2}$  in Gleichung (46) eine untere Schranke darstellt (vgl. Abschnitt 4) und somit eine zu große Lebensdauer bewirkt. Es gilt  $u$  ( $\varphi = 5,42$ )  $\approx 2,06$ , d. h., die Schadenssummen für  $T_L$  in Tabelle 1 vergrößern sich um den Faktor  $q = 2,06/\sqrt{2} = 1,46$ :  $S_1 = 1,43$ ;  $S_2 = 1,47$ ;  $S_3 = 1,40$ .

## 9. Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wird eine Lebensdauerberechnung auf der Grundlage spektral interpretierter Schädigung vorgestellt. Im Unterschied zu bekannten und gegenwärtig diskutierten spektralanalytischen Verfahren, wie die von Rajcher [19], [20] und von Wirsching und Haugen [21] ist die hier vorgeschlagene Berechnung unabhängig von der Form der Amplitudenverteilung. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß die Momentanwerte der Beanspruchungs-Zeit-Funktion ohne Bezugnahme auf Maxima und Minima direkt genutzt werden. Entscheidendes Merkmal des abgeleiteten Verfahrens ist die Umrechnung der Beanspruchungs-Zeit-Funktion in eine Schädigungsgradienten-Zeit-Funktion auf der Grundlage einer Wöhlerlinie. Dabei wird lineare Schädigung während der Schwingbeanspruchung vorausgesetzt. Daß die Berechnung auf Beanspruchungsverläufe mit beliebigen Amplitudenverteilungen anwendbar ist, ohne Informationen über diese Verteilungen zu benötigen, wird für einige biharmonische Verläufe mit deutlich unterschiedlichen Mittelspannungsschwankungen demonstriert. Das Verfahren ist auch für stochastische Beanspruchungs-Zeit-Funktionen [22] geeignet.

## LITERATUR

- [1] Lange, F.; Pfeiffer, F.: Erläuterungen zur Neufassung des DDR-Standards TGL 33787/01. IfL-Mitt., Dresden 23 (1984) 1, S. 1 – 13.
- [2] Palmgren, A.: Die Lebensdauer von Kugellagern. VDI-Z. 69 (1924), S. 339 – 341.
- [3] Miner, M. A.: Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics 1945, S. A 159 – A 164.
- [4] Wirthgen, G.: Berechnungsverfahren der Betriebsfestigkeit und ihre Berücksichtigung in Vorschriftenentwürfen. IfL-Mitt., Dresden 21 (1982) 2, S. 35 – 43.
- [5] Corten, H. T.; Dolan, T. J.: Cumulative Fatigue Damage. Proc. of the Int. Conference on Fatigue of Metals, London 1956, S. 235 – 246.
- [6] Haibach, E.: Modifizierte Schadensakkumulations-Hypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung. Techn. Mitt. Nr. 50/70 des LBF Darmstadt, 1970.
- [7] Stüssi, F.: Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler. Mitt. der TKVSB, Nr. 13, Zürich 1955.
- [8] Cooley-Tukey: An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. Mathematics of Computation 19 (1965), S. 297 – 301.

- [9] Lingener, A., Wahl, F.: Einsatz von Klein- und Prozeßrechnern bei der experimentellen Untersuchung stochastischer Schwingungen und von mechanischen Systemen. *Techn. Mechanik* 1 (1980) 1, S. 21 – 26.
- [10] Beer, H. J., Hardtke, H. J., Richter, F.: Programmsystem zur experimentellen Bestimmung dynamischer Systemkennwerte. *Maschinenbautechnik*, Berlin 27 (1978) 3, S. 103 – 105.
- [11] Hähnsch, A.: Programmsystem zur Analyse stochastischer Prozesse. *Kraftfahrzeugtechnik*, Berlin (1982) 8, S. 244 – 247.
- [12] Joensson, D.: Programmpaket SIPRO zur Signal-Prozeßanalyse. Forschungsbericht, TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Forschungsgruppe Betriebsfestigkeit, 1984 (unveröffentlicht).
- [13] FFTA 40 (Unterprogramme zur Fourieranalyse): Bedienungsanleitung PE 6.502, Carl Schenk AG, Darmstadt 1979.
- [14] Achilles, D.: Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- [15] Lange, D.: Lebensdauerbestimmung für regellos beanspruchte Bauteile auf der Grundlage stochastischer Kenngrößen. Diss. TU Dresden, 1983.
- [16] Lange, D.: Einfluß stochastischer Kenngrößen auf die Lebensdauer regellos beanspruchter Probestäbe. *IfL-Mittl.*, Dresden 23 (1984) 1, S. 14 – 17.
- [17] Schlag, K.: Lebensdauerabschätzung für schwingend beanspruchte Bauteile auf frequenzanalytischer Grundlage. Diplomarbeit TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Forschungsgruppe Betriebsfestigkeit, 1984.
- [18] FMR 200 (Hydropuls-Hauptprogramm). Bedienungsanleitung PE 6.200, Carl Schenck AG, Darmstadt, 1975.
- [19] Kermes, J., Vojtisek, J.: Lebensdauer von Konstruktionsstählen bei einer zufälligen Ermüdungsbeanspruchung. *Techn. Mechanik* 4 (1983) 4, S. 43 – 47.
- [20] Kermes, J.; Proskovec, J.; Vojtisek, J.: Zivotnost oceli pri simulaci provozniho namahani. Vortrag zur Tagung „Unava materialu a konstrukci“, Prag 3. – 5. 7. 1984, S. 223 – 229. (Veranstalter: SKODA Plzen, SVUM Prag u. a.).
- [21] Refaad El Sayed: Beitrag zum Berechnungsverfahren von Wirsching und Haugen sowie eine neue Schadensakkumulations-Hypothese ... *VDI-Fortschr.-Bericht*, Reihe 5, Nr. 61. Düsseldorf, VDI-Verlag 1982.
- [22] Joensson, D.: Spektralanalytische Lebensdauerberechnung für stochastisch beanspruchte Bauteile (in Vorbereitung).

**Anschrift des Verfassers:**

Dr.-Ing. D. Joensson  
 Technische Universität Dresden  
 Sektion Grundlagen des Maschinenwesens  
 Bereich Dynamik und Betriebsfestigkeit  
 8027 Dresden  
 Mommsenstr. 13