

Angenäherte Bestimmung des Spannungsfeldes an der Rißspitze

U. Materne

1. Einleitung

In der Bruchmechanik gilt als notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit von ermittelten Bruchzähigkeitswerten, daß dies an solchen Proben erfolgt, die in der Rißspitzenumgebung den ebenen Verzerrungszustand garantieren. Dieser wird als der ungünstigste Zustand angesehen. Für den durchgehenden Riß an Scheiben lassen sich analytische Lösungen für das Spannungs- und Verschiebungsfeld bei elastischem Materialverhalten und bei Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes oder eines ebenen Verzerrungszustandes verhältnismäßig leicht angeben. Dies ist in jedem Fall nur eine Näherung. Durch die Querkontraktion des Werkstoffes entsteht in der Nähe der Rißspitze, wo die Inhomogenität des Spannungsfeldes ausgeprägt ist, stets ein dreidimensionales Spannungsfeld. Ziel der folgenden Untersuchungen ist es, an einer Scheibe mit durchgehendem Riß und mit Zugbelastung senkrecht zur Rißflanke das dreidimensionale Spannungsfeld möglichst genau zu bestimmen.

2. Differentialgleichung für das Rißproblem

2.1. Einführung von Spannungsfunktionen

Bei der Herleitung der Aufgabe werden Zylinderkoordinaten verwendet, r und φ liegen in der Scheibenebene mit dem Ursprung in der Rißspitze, z zeigt in Dickenrichtung (Bild 1).

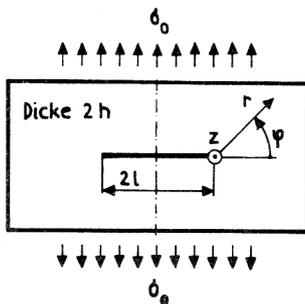


Bild 1

Die Gleichgewichtsbedingungen (1) sind erfüllt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{rz} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

wenn die Spannungen mit den drei Spannungsfunktionen F_1, F_2, F_3 nach folgenden Vorschriften berechnet werden [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} & \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} & \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 F_3}{\partial r \partial \varphi} \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_3}{\partial \varphi \partial z} \\ \tau_{z\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_3}{\partial r \partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

Zur Bestimmung eines Systems von Differentialgleichungen für die Spannungsfunktionen wird das Variationsprinzip von Castigliano verwendet, wodurch die Kontinuität der Verzerrungen gewährleistet ist. Für die weitere Lösung der Aufgabe ist es günstig, die Spannungen nach der Form (3) aufzuteilen.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^0 + \sigma_{rr}^1 & \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}^0 + \sigma_{zz}^1 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi}^0 + \sigma_{\varphi\varphi}^1 & \tau_{rz} &= \tau_{rz}^0 + \tau_{rz}^1 \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi}^0 + \tau_{r\varphi}^1 & \tau_{z\varphi} &= \tau_{z\varphi}^0 + \tau_{z\varphi}^1 \end{aligned} \quad (3)$$

Es bedeutet $\sigma_{rr}^0, \sigma_{\varphi\varphi}^0$ usw. einen bekannten Spannungszustand, der die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen erfüllt. Die Spannungen $\sigma_{rr}^1, \sigma_{\varphi\varphi}^1$ usw. werden über die Spannungsfunktionen nach der Vorschrift (2) gebildet. Die Aufgabe besteht also darin, zu einem vorgegebenen Spannungszustand gewisse Korrekturen zu ermitteln.

2.2. Gleichungen zur Bestimmung der Spannungsfunktionen

Da die Randkräfte vorgegeben sind, nimmt die Variationsgleichung von Castigliano [1] die einfache Form an

$$\delta \int_V W \, dV = 0 \quad (4)$$

W ist die spezifische elastische Energie, die in Zylinderkoordinaten lautet

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2E} [\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu (\sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr} \sigma_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi} \sigma_{zz}) \\ &\quad + 2(1+\nu) (\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{z\varphi}^2)] \end{aligned} \quad (5)$$

Setzt man

$$F_1 = r H_1(r, \varphi, z); \quad F_2 = H_2(r, \varphi, z); \quad F_3 = r H_3(r, \varphi, z) \quad (6)$$

und beachtet (2) und (3), dann folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^0 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi}^0 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{zz}^0 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_3}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 H_3}{\partial r \partial \varphi} \\
\tau_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi}^0 + \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} \quad (7) \\
\tau_{rz} &= \tau_{rz}^0 - \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H_3}{\partial \varphi \partial z} \\
\tau_{\varphi z} &= \tau_{\varphi z}^0 - \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial \varphi \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial H_3}{\partial z} - \frac{\partial^2 H_3}{\partial r \partial z}
\end{aligned}$$

Die spezifische elastische Energie W wird also eine Funktion von H_1, H_2, H_3 . Die Bedingung (4) ist erfüllt, wenn die Funktionen H_i der Ostrogradskischen Gleichung [2] genügen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial H_i} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/r}} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/z}} \right) \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/r}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/\varphi}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/z}} \right) \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/r\varphi}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/rz}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial H_{i/\varphi z}} \right) = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

Ihre Anwendung auf (5) unter Beachtung von (7) ergibt drei Gleichungen, die den Verträglichkeitsbedingungen äquivalent sind.

$$\begin{aligned}
&2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] \\
&- 4 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})) \right] \\
&- 4 (1 + \nu) r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{1}{r} \tau_{rz} \right) \\
&+ 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\sigma_{rr} - \nu (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] = G_{1n} = 0 \\
&2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})) \right] \\
&+ \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] \quad (9) \\
&+ 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] \\
&- 4 (1 + \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \varphi}] = G_{2n} = 0 \\
&- \frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 4 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left[\frac{1}{r} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})) \right] \\
&+ 4 (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tau_{r\varphi} - 4 (1 + \nu) r^2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{1}{r^2} \tau_{\varphi z} \right) \\
&- 4 (1 + \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} \tau_{rz} = G_{3n} = 0
\end{aligned}$$

Zur angenäherten Lösung dieser Gleichungen wird zunächst die Abhängigkeit von φ durch geeigneten Produktansatz eliminiert.

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sum_n H_{1n}(r, z) g_{1n}(\varphi) \\
H_2 &= \sum_n H_{2n}(r, z) g_{2n}(\varphi) \quad (10) \\
H_3 &= \sum_n H_{3n}(r, z) g_{3n}(\varphi)
\end{aligned}$$

Diese Ansätze müssen an den Rändern $\varphi = \pm \pi$ die Bedingungen $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \pm \pi, z) = 0$, $\tau_{\varphi r}(r, \pm \pi, z) = 0$, $\tau_{\varphi z}(r, \pm \pi, z) = 0$ erfüllen. Das gelingt, wenn dafür Funktionen, die für das ebene Rißproblem gelten, verwendet werden.

$$\begin{aligned}
g_{1n}(\varphi) &= \begin{cases} \frac{n}{2} \cos \frac{n}{2} \varphi - \left(\frac{n}{2} - 4\right) \cos \left(\frac{n}{2} - 2\right) \varphi & n \text{ gerade} \\ \left(\frac{n}{2} - 2\right) \cos \frac{n}{2} \varphi - \left(\frac{n}{2} - 4\right) \cos \left(\frac{n}{2} - 2\right) \varphi & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
g_{2n}(\varphi) &= \begin{cases} -\frac{n}{2} \cos \frac{n}{2} \varphi + \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2\right) \varphi & n \text{ gerade} \\ -\left(\frac{n}{2} - 2\right) \cos \frac{n}{2} \varphi + \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2\right) \varphi & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (11) \\
g_{3n}(\varphi) &= \begin{cases} -\frac{n}{2} \sin \frac{n}{2} \varphi + \left(\frac{n}{2} - 2\right) \sin \left(\frac{n}{2} - 2\right) \varphi & n \text{ gerade} \\ -\left(\frac{n}{2} - 2\right) \sin \frac{n}{2} \varphi + \left(\frac{n}{2} - 2\right) \sin \left(\frac{n}{2} - 2\right) \varphi & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Da (10) im allgemeinen (9) nicht genügt, werden die Gleichungen näherungsweise erfüllt [3] nach der Vorschrift

$$\int_0^\pi G_{1n} \varphi_{1n} d\varphi = 0 \quad \int_0^\pi G_{2n} \varphi_{2n} d\varphi = 0 \quad \int_0^\pi G_{3n} \varphi_{3n} d\varphi = 0 \quad (12)$$

Die auf diese Weise gewonnenen $3n$ Differentialgleichungen werden homogen, wenn als bekannter Ausgangszustand das Spannungsfeld für den ebenen Verzerrungszustand verwendet wird. Günstiger ist es, als Ausgangszustand den ebenen Spannungszustand zu wählen, weil dann an den verbleibenden Rändern $z = \pm h$ homogene Randbedingungen zu erfüllen sind. Die aus (12) folgenden Differentialgleichungen für die H_{1n}, H_{2n}, H_{3n} lassen sich für $n = 3$ zu einer Gleichung vereinigen. Es läßt

sich nachweisen, daß für diese Funktionen für kleine Werte r gilt $H_{13} = H(r, z)$, $H_{23} = \alpha H(r, z)$, $H_{33} = \beta H(r, z)$, $2\beta = \alpha + 1$, (13)

wobei α und β feste Werte sind. Bei der Ausführung der Rechnung erhält man folgende Gleichung:

$$L(r) = \frac{4\nu}{13\pi} [r^{-5/2} \frac{\pi}{8} C_3 (75 - 21\alpha + 10\beta) + r^{-2} \frac{32}{3} C_4 (4 - \alpha) + r^{-3/2} C_5 \frac{\pi}{8} (45 - 27\alpha + 18\beta) + r^{-1/2} \frac{\pi}{8} (5 - 35\alpha + 30\beta)]$$

wobei $L(r)$ ein Differentialoperator ist. Es bedeuten

$$C_3 = \frac{\sigma_0 \sqrt{21}}{2}; C_4 = -\frac{\sigma_0}{4}; C_5 = -\frac{\sigma_0}{4\sqrt{21}}; C_7 = -\frac{\sigma_0}{16 \cdot 21\sqrt{21}}$$

Konstanten, die aus der Lösung für den ebenen Spannungszustand bekannt sind [4]. Die weiteren Konstanten beeinflussen bei Beschränkung auf $n = 3$ die Gleichung nicht. Die Konstante C_4 gehört zu einem homogenen ebenen Spannungszustand, bei dem jedoch keine Behinderung der Querkontraktion auftreten kann. Sie darf daher in der Differentialgleichung nicht auftreten. Folglich ist $\alpha = 4$ und $\beta = 2.5$. Dieses Ergebnis erhält man auch aus der Forderung, daß die Verschiebung in z -Richtung in der Rissspitze endlich sein muß. Die Differentialgleichung lautet dann

$$H_{,rrrr} - \frac{1}{r^2} H_{,rr} 0,211538 + \frac{1}{r^3} H_{,r} 0,423077 - \frac{1}{r^4} H 0,423077 + H_{,rrzz} (2,961539 - \nu \cdot 3,346154) + \frac{1}{r^2} H_{,zz} (2,956365 - \nu \cdot 2,351327) - \frac{1}{r} H_{,rzz} (1 + \nu) \cdot 2,307692 + H_{,zzzz} (8,115385 - \nu \cdot 3,346154) = \frac{\nu \sigma_0 \sqrt{21}}{26} (r^{-5/2} \frac{\pi}{8} + r^{-3/2} \frac{1}{1} 2,25 + r^{-1/2} \frac{1}{1^2} 0,9375)$$

3. Näherungslösung für die Differentialgleichung

Als Ansatz zur Bestimmung einer Lösung wird

$$H(r, z) = f(r) \cdot \frac{Z(z)}{Z(z) + G(r, z)} \quad (15)$$

verwendet. Die Randbedingungen

$$\sigma_{zz}(r, \varphi, z = \pm h) = 0 \quad \tau_{zr}(r, \varphi, z = \pm h) = 0$$

$$\tau_{z\varphi}(r, \varphi, z = \pm h) = 0$$

erfordern die Erfüllung von

$$Z(z = \pm h) = 0 \quad \text{und} \quad Z(z = \pm h)_{,z} = 0 \quad (16)$$

Für die weitere Rechnung werden die dimensionslosen

$$\text{Größen } \rho = \frac{r}{h} \quad \eta = \frac{z}{h} \quad \text{eingeführt.}$$

Es ist nun äußerst schwierig, die Funktionen $f(r)$, $G(r, z)$, $Z(z)$ so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung im ganzen Gebiet erfüllt ist. Da dies nicht gelingt,

erfolgt die Erfüllung für ausgezeichnete Ebenen, und zwar für die Ebenen $z = 0$ und $z = \pm h$.

Als einfachste Ansätze werden

$$Z = (1 - \eta^2)^2 \quad G = g(\rho) \cdot (1 + c\eta^2)$$

verwendet. Für $\eta = 0$ erhält man aus (14) für kleine Werte ρ

$$f(\rho) = \frac{\nu \sigma_0 \sqrt{21}}{2} h^{3/2} [\rho^{3/2} - \frac{3}{19} (\frac{h}{1}) \rho^{3/2} + \frac{1}{80} (\frac{h}{1})^2 \rho^{7/2}] (1 + g(\rho)) \quad (17)$$

Für $\eta = 1$ lautet die Gleichung für $\nu = 0,3$ sowie

$$F_1 = \frac{f(\rho)}{g(\rho)} \rho^2 F_1'' - 1,5324 \rho F_1' + 1,1498 F_1 + 10,8977 [-\frac{16}{g(\rho)(1+C)} + 1 - 12 \frac{C}{1+C} (1 - \frac{4}{3} \frac{C}{1+C})] \rho^2 F_1 = \frac{\nu \sigma_0 h^{3/2} \sqrt{21}}{407,2016} [8\rho^{-1/2} + \frac{9}{4} \frac{h}{1} \rho^{1/2} + \frac{15}{16} (\frac{h}{1})^2 \rho^{3/2}] \quad (18)$$

Für die gesuchten Funktionen werden Reihenansätze verwendet, und zwar der Form

$$F_1(\rho) = a_1 \rho^{-1/2} + a_2 \rho^{1/2} + a_3 \rho^{3/2} + a_4 \rho^{5/2} + \dots \quad (19)$$

$$g(\rho) = c_2 \rho^2 + c_3 \rho^3 + c_4 \rho^4 + \dots$$

Aus (17) und (19) erhält man durch Koeffizientenvergleich einen Satz Gleichungen für die a_i und c_i , ein zweites ergibt sich aus dem Koeffizientenvergleich beim Einsetzen von (19) in (18). Die Rechnungen sind nur sinnvoll für die ersten Reihenglieder.

Das Ergebnis lautet für $\nu = 0.3$

$$G(\rho, \eta) = [33,925 \rho^2 + 2,485 \frac{h}{L} \rho^3 + (543,08 + 2,6225 (\frac{h}{1})^2) \rho^4 + \dots] (1 + 2,8557 \eta^2)$$

$$f(\rho) = \nu \sigma_0 \frac{\sqrt{21}}{2} h^{3/2} [\rho^{3/2} - 0,15789 (\frac{h}{L}) \rho^{5/2} + (33,925 + 0,0125 \frac{h^2}{l^2}) \rho^{7/2} + \dots] \quad (20)$$

Damit sind alle Größen des Ansatzes (15) bestimmt.

4. Spannungsverteilung an der Rissspitze

Es zeigt sich, daß die aus dem ebenen Spannungs- bzw. Verzerrungszustand ermittelten Spannungen σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\tau_{r\varphi}$ in der Rissspitzenumgebung gute Näherungen sind. Die Korrekturen sind proportional $r^{3/2}$ und im betrachteten Bereich ohne Bedeutung. Eine Änderung des Spannungsintensitätsfaktors in Richtung Scheibendicke wurde nicht festgestellt. In der Rissspitze ($r = 0$) ist $\epsilon_{zz} = 0$, unabhängig von der Dicke der Scheibe. Die Normalspannung σ_{zz} ist an der Rissspitze proportional $r^{-1/2}$. Der Verlauf in radialer Richtung ist ausgeprägt

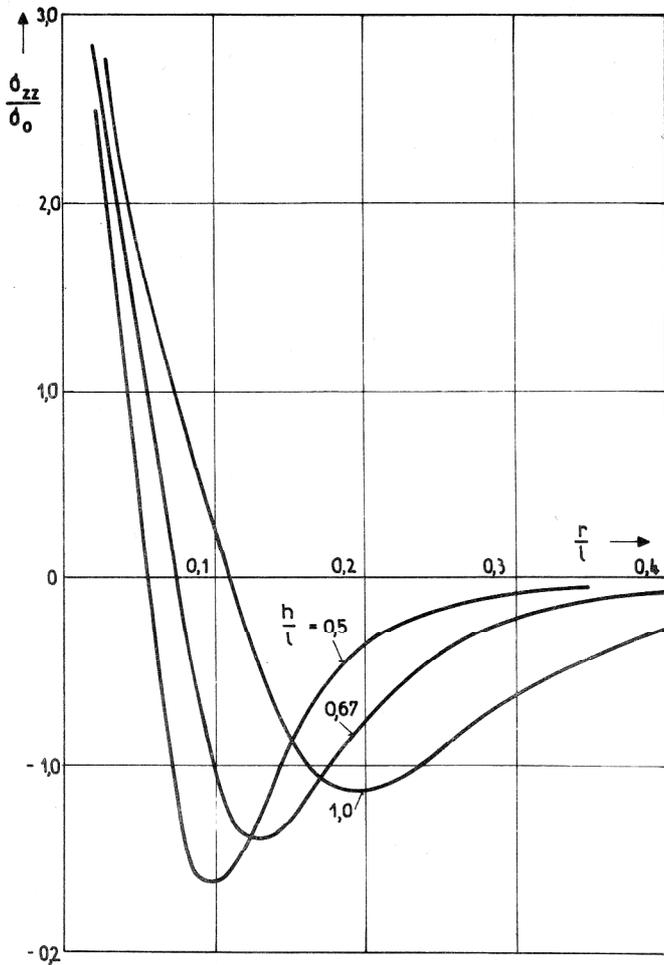


Bild 2
Verlauf von σ_{zz} für $z = 0$ und $\varphi = 0$

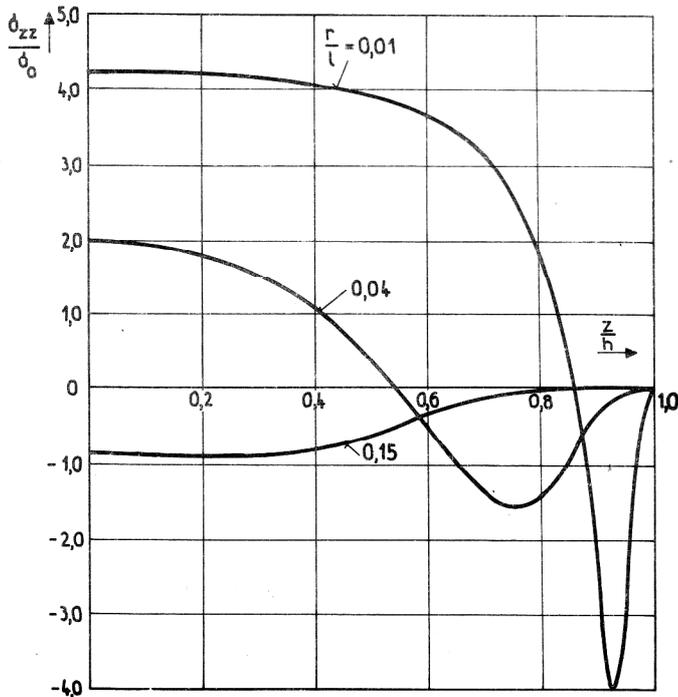


Bild 4
Verlauf der Spannung σ_{zz} über die Scheibendicke für $\frac{h}{l} = 1$

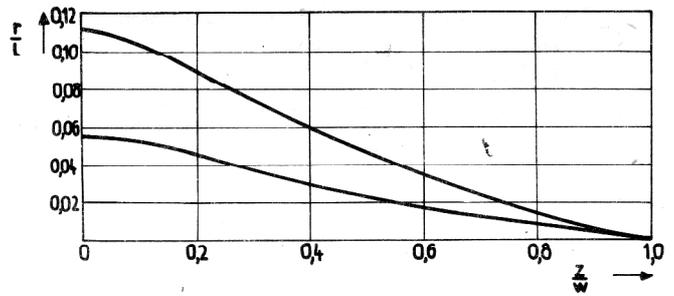


Bild 3
Spannungsnulllinie $\sigma_{zz} = 0$ für $\varphi = 0$

abhängig vom Verhältnis $\frac{h}{l}$ und durch Aufeinanderfolge von Zug- und Druckspannungszonen gekennzeichnet. Der Wechsel von Zug- auf Druckspannungen ist aus Gleichgewichtsgründen notwendig. Mit abnehmender Dicke wird die Zone an der Risf Spitze, die unter der Wirkung von Zugspannungen steht, kleiner, gleichzeitig rückt das Druckspannungsmaximum dichter an die Risf Spitze heran und wird größer. Der Nulldurchgang von σ_{zz} vollzieht sich abhängig von z , wie in Bild 3 dargestellt ist. Bild 4 zeigt charakteristische Verläufe über die Dickenrichtung. Bemerkenswert sind auch hier die Druckspannungsmaxima dicht unter der Oberfläche in Risf Spitzennähe. Mit zunehmender Entfernung von der Risf Spitze wandern sie ins Scheibeninnere.

Die Schubspannungen τ_{rz} und $\tau_{\varphi z}$ zeigen in der Umgebung der Punkte, wo der Riß in die freie Oberfläche einmündet, gleichfalls ausgeprägte Maxima, sie sind jedoch wesentlich kleiner als die Normalspannungen.

5. Schlußbemerkungen

Bei kritischer Beurteilung der Ergebnisse muß beachtet werden, daß es sich um eine Näherungslösung für die Umgebung der Risf Spitze handelt. Es zeigt sich, daß unabhängig von der Dicke der Scheibe stets ein komplizierter dreidimensionaler Spannungszustand vorliegt. Bei abnehmender Scheibendicke verkleinert sich die Zone, die unter den Einfluß von dreiaxigen Zug gerät, gleichzeitig ist eine Zone mit ausgeprägten Druckspannungsmaxima vorhanden.

Während also bei dicken Scheiben die fließbegünstigten Zonen in der Nähe der Oberflächen an der Risf Spitze liegen, dehnt sich mit abnehmender Dicke der Scheibe die fließbegünstigte Zone ins Scheibeninnere aus.

Eine Verbesserung der erhaltenen Lösung ist vorstellbar, praktisch aber mit außerordentlich hohem Aufwand verbunden.

LITERATUR

- [1] Filonenko-Borodisch: Elastizitätstheorie. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1967.
- [2] Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1958.

- [3] Kantarowitsch, Krylow: Näherungsmethoden der höheren Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1956.
- [4] Günther, W.: Das elastische Spannungs- und Verschiebungsfeld an der Rispspitze des ebenen Risses. Wiss. Beiträge der IH Zwickau 2 (1976).