

# Eine verallgemeinerte Form des Stabilitätsverlustes von Sandwich-Platten

Fr. Romanow, St. Zielendziak

## 1. Einführung

Die allgemein bekannten Berechnungsmethoden der kritischen Belastungen von Sandwichplatten und -schalen kann man in zwei Gruppen einteilen. Die erste betrifft die Berechnung der sogenannten dünnen Sandwich-Konstruktionen, bei denen angenommen wird, daß der Kern in Querrichtung unverformbar ist. Das wiederum bedeutet, daß der Elastizitätsmodul in dieser Richtung unendlich groß ist [1], [3], [5]. Eine der ersten Veröffentlichungen, die sich mit diesem Problem befaßte, war die Arbeit von Libov und Batdorf [5]. Die zweite Gruppe von Arbeiten betrifft die sogenannten dicken Konstruktionen, bei denen die Deckschicht als dünne Blechtafel auf elastischer Unterlage betrachtet wird [2], [4]. Den Anfang der Arbeiten in dieser Gruppe gab die Veröffentlichung von Gough, Elana und Bruyn [2]. Für Konstruktionen von mittlerer Dicke können beide Methoden nicht angewandt werden, da sie erhöhte Werte der kritischen Spannungen ergeben.

Das Problem der Druckstabilität zylindrisch ausbeulender Sandwichplatten mit nichtlinear verformbarem Kern wurde in der Arbeit [11] analysiert. Im Ergebnis der vom Verfasser angenommenen Vereinfachungen, u. a. der Annahme nur einer Halbwelle beim Knicken und der Linearisierung durch Vernachlässigen der höheren Potenzen der Reihenentwicklung wurde das Problem auf die Stabilität dünner Sandwichkonstruktion zurückgeführt. Eine verallgemeinerte Lösung an Hand von numerischen Methoden wurde in späteren Arbeiten [12], [13] dargestellt. Auch hier wurden die Formen des Stabilitätsverlustes angenommen, was aber nur bei exakt bestimmten geometrischen und Werkstoffparametern der Deckplatten und des Kerns durchgeführt werden kann.

In [6], [7] wurde der dreidimensionale Verschiebungszustand des isotropen Kerns beschrieben, wobei die drei Verschiebungskomponenten als hyperbolische Funktionen eingeführt wurden. Auf Grund von Versuchen und bestimmten theoretischen Voraussetzungen wurde angenommen, daß die Verformung des Kerns in Querrichtung nicht nur von der relativen Verschiebung der beiden Deckplatten abhängt, sondern auch von der gleichzeitigen Verschiebung beider Deckplatten bezüglich der Konstruktionsmittelfläche. Es wurde angenommen, daß die Durchbiegungen der oberen und der unteren Deckplatte  $W_1$  und  $W_2$  gleich sind. Nach Veröffentlichung dieser Arbeiten wurde dem Verfasser vorgehalten, daß diese Voraussetzung nicht ausreichend begründet sei.

Zur weiteren Verallgemeinerung wird in der vorliegenden Arbeit der Fall  $W_1 \neq W_2$  betrachtet. So ein Verschiebungszustand und die daraus hervorgehenden Be-

rechnungsmethoden der kritischen Belastungen sind im ganzen Bereich der Kerndicke, d. h. für  $0 < c \leq \infty$ , gültig. Die grundlegenden Voraussetzungen in vorliegender Arbeit sind:

- Die Deckschichten bestehen aus dünnen isotropen Blechen, für welche die Hypothese von Kirchhoff-Love gilt; ihr Verschiebungszustand in Richtung der Koordinaten  $x$  und  $y$  wird durch die bekannten Formeln\*)

$$\begin{aligned} U_u &= U_2 - (z - c - \frac{t}{2}) W_2' ; \\ U_o &= U_1 - (z + c + \frac{t}{2}) W_1' ; \\ V_u &= V_2 - (z - c - \frac{t}{2}) W_2' ; \\ V_o &= V_1 - (z + c + \frac{t}{2}) W_1' . \end{aligned} \quad (1)$$

beschrieben (vgl. Bild 1).

- Der Kern ist isotrop und gehört zur Gruppe der weichen Kerne, was zur Folge hat, daß die äußere Belastung nur auf die Deckplatten wirkt.

## 2. Dreidimensionaler Verschiebungszustand des isotropen Kerns

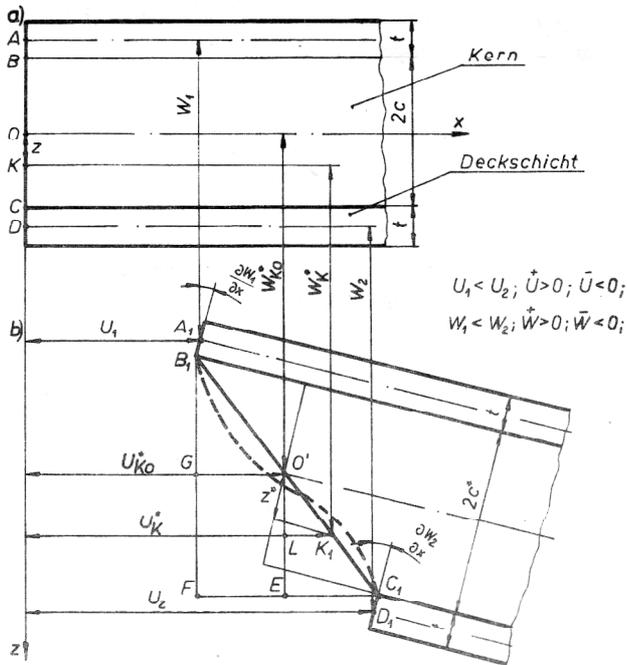
### 2.1. Linearer Verschiebungsverlauf über die Kerndicke

Es wird der Verschiebungszustand eines Elementes der Sandwichplatte nach Bild 1 a analysiert. Nach der Verformung hat das Element die Form nach Bild 1 b, wobei die gestrichelte Linie den nichtlinearen Verschiebungsverlauf über die Kerndicke darstellt.

Bei unterschiedlichen Durchbiegungen beider Deckplatten ( $W_1 \neq W_2$ ) ändert sich die ursprüngliche Kerndicke  $2c$  und beträgt nach der Verformung  $2c^+$ . Im Unterschied zur linearen Abhängigkeit des Verschiebungszustandes der Deckschichten von der Variablen  $z$  hat der Verschiebungszustand des Kerns in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung i. a. nichtlinearen Charakter und wird wie folgt bezeichnet:  $U_K$ ,  $V_K$  und  $W_K$  (gestrichelte Linie in Bild 1 b). Wenn man aber zunächst annimmt, daß der Kern in Querrichtung unverformbar ist ( $W_1 = W_2 = W$ ), dann sind seine Verschiebungen in der  $x$ - und  $y$ -Richtung lineare Funktionen der Variablen  $z$  (voll ausgezogene Linie  $B_1 C_1$ ). Diese linearen Verschiebungen werden als  $U_K^+$ ,  $V_K^+$  und  $W_K^+$  bezeichnet.

\*)  $U_u, V_u$  – Horizontalverschiebungen der unteren Deckschicht;

$U_o, V_o$  – dsgl. der oberen Deckschicht.  
 Punkt (.), Komma (,) und ( $\wedge$ ) bezeichnen die Ableitungen nach  $x, y$  und  $z$ .



**Bild 1**  
Dreischichtiges Plattenelement  
a) vor der Verformung b) nach der Verformung

Aus entsprechenden geometrischen Zusammenhängen, die aus Bild 1 b zu ersehen sind, erhält man:

$$U_K^* = \bar{U} - \frac{t}{2} \bar{W}' - \frac{z}{c} \left( \bar{U} - \frac{t}{2} \bar{W}' \right);$$

$$V_K^* = \bar{V} - \frac{t}{2} \bar{W}', - \frac{z}{c} \left( \bar{V} - \frac{t}{2} \bar{W}' \right); \quad (2)$$

$$W_K^* = \bar{W} - \frac{z}{c} \bar{W}; \quad \text{mit}$$

$$\bar{U} = \frac{U_1 + U_2}{2}; \quad \bar{V} = \frac{V_1 + V_2}{2}; \quad \bar{W} = \frac{W_1 + W_2}{2};$$

$$\bar{U} = \frac{U_1 - U_2}{2}; \quad \bar{V} = \frac{V_1 - V_2}{2}; \quad \bar{W} = \frac{W_1 - W_2}{2}.$$

$U_i, V_i, W_i$  ( $i = 1, 2$ ) sind die Verschiebungen der Deckschichtmittelflächen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung (für die obere Deckschicht ist  $i = 1$ , für die untere  $i = 2$ )

Die linearen Verschiebungen des Kerns bestehen also aus zwei Teilen:

– den Verschiebungen der Kernmittelfläche für die Richtungen  $x, y, z$ , d. h.

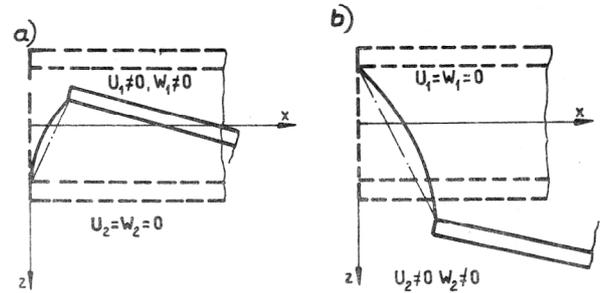
$$U_{K_0}^* = \bar{U} - \frac{t}{2} \bar{W}'; \quad V_{K_0}^* = \bar{V} - \frac{t}{2} \bar{W}'; \quad W_{K_0}^* = \bar{W};$$

– den zusätzlichen Verschiebungen

$$-\frac{z}{c} \left( \bar{U} - \frac{t}{2} \bar{W}' \right); \quad -\frac{z}{c} \left( \bar{V} - \frac{t}{2} \bar{W}' \right); \quad -\frac{z}{c} \bar{W}.$$

## 2.2. Nichtlinearer Verschiebungsverlauf über die Kern-dicke

Die verformte Gestalt einer dreischichtigen Platte nach Bild 1 b kann man durch Überlagerung von zwei einzelnen Formveränderungszuständen erhalten (vgl. Bild 2):



**Bild 2**  
Verschiebungszustände  
a) für  $U \neq 0, W_1 \neq 0$  und  $U_2 = W_2 = 0$   
b) für  $U_2 \neq 0, W_2 \neq 0$  und  $U_1 = W_1 = 0$

– Die äußere Belastung wirkt nur auf die obere Deckplatte und die untere Deckplatte kann sich in keiner der Richtungen  $x, y, z$  verschieben ( $U_2 = V_2 = W_2 = 0$ ); die entsprechenden Verschiebungen des Kerns bezeichnen wir durch  $U_{K1}, V_{K1}, W_{K1}$

– Die äußere Belastung wirkt nur auf die untere Deckplatte und die obere Deckplatte hat keine Verschiebungen ( $U_1 = V_1 = W_1 = 0$ ); die entsprechenden Verschiebungen des Kerns bezeichnen wir als  $U_{K2}, V_{K2}, W_{K2}$ .

Im ersten Fall kann man die Verschiebungen des Kerns in Richtung der Achsen  $x, y, z$  als Produkte der Verschiebungen der obereren Deckplatte für  $z = -c$  und gewisser Funktionen der Variablen  $z$  darstellen:

$$U_{K1} = \left( U_1 - \frac{t}{2} W_1' \right) \delta_1(z);$$

$$V_{K1} = \left( V_1 - \frac{t}{2} W_1' \right) \kappa_1(z); \quad (3a)$$

$$W_{K1} = W_1 \varphi_1(z).$$

Ähnlich werden im zweiten Fall die Produkte der Verschiebungen der unteren Deckplatte für  $z = +c$  und gewisser Funktionen der Variablen  $z$  verwendet:

$$U_{K2} = \left( U_2 + \frac{t}{2} W_2' \right) \delta_2(z);$$

$$V_{K2} = \left( V_2 + \frac{t}{2} W_2' \right) \kappa_2(z). \quad (3b)$$

Diese unbekannt Funktionen  $\delta_i(z), \kappa_i(z), \varphi_i(z)$ ; ( $i = 1, 2$ ) können aus folgenden Verschiebungsgleichungen [8] bestimmt werden:

$$\nabla^2 U_{Ki} + C \Theta_i = 0;$$

$$\nabla^2 V_{Ki} + C \Theta_i = 0;$$

$$\nabla^2 W_{Ki} + C \Theta_i = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Hier wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$C = \frac{1}{1 - 2\nu_K}; \quad \Theta_i = U_{Ki} + V_{Ki} + W_{Ki}^{\wedge};$$

$$\nabla^2 = (\quad)^{\cdot\cdot} + (\quad)^{\prime\prime} + (\quad)^{\wedge\wedge}.$$

Setzt man die Gleichungen (3 a) und (3 b) in (4) ein, so erhält man:

$$(a_i \delta_i)^{\wedge\wedge} + (1 + c)(a_i \delta_i)^{\cdot\cdot} + (a_i \delta_i)^{\prime\prime} + C(c_i \kappa_i)^{\cdot\cdot} + C(e_i \varphi_i)^{\wedge} = 0;$$

$$(c_i \kappa_i)^{\wedge\wedge} + (1 + C)(c_i \kappa_i)^{\cdot\cdot} + (c_i \kappa_i)^{\prime\prime} + C(a_i \delta_i)^{\cdot\cdot} + C(e_i \varphi_i)^{\wedge} = 0;$$

$$(e_i \varphi_i)^{\wedge\wedge} (1 + C) + (e_i \varphi_i)^{\cdot\cdot} + (e_i \varphi_i)^{\prime\prime} + C(a_i \varphi_i)^{\wedge} + C(c_i \kappa_i)^{\wedge} = 0; \quad (i = 1, 2),$$

wobei

$$a_1 = U_1 - \frac{t}{2} W_1; \quad a_2 = U_2 + \frac{t}{2} W_2;$$

$$b_1 = V_1 - \frac{t}{2} W_1; \quad b_2 = V_2 + \frac{t}{2} W_2;$$

$$c_1 = W_1; \quad c_2 = W_2.$$

Das sind zwei Systeme partieller Differentialgleichungen zweiten Grades in allen drei Variablen  $x, y, z$ . Ihre geschlossene Lösung für die Funktionen  $\delta_i(z), \kappa_i(z), \varphi_i(z)$  ( $i = 1, 2$ ) ist nur möglich nach Einführung einer Annahme für die Gestalt der nur von  $x$  und  $y$  abhängenden Deckplattenverschiebungen  $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ . Diese Funktionen müssen so angenommen werden, daß sie die Randlagerungsbedingungen der Platte erfüllen.

Um die entsprechenden Konstanten zu finden, sind auch Randbedingungen der Funktionen  $\delta_i(z), \varphi_i(z), \kappa_i(z)$  erforderlich. Die Gleichheit der Verschiebungen der Deckplatten und des Kerns in den Kontaktflächen  $z = \pm c$  hat zur Folge, daß nachstehende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$\delta_1(-c) = \delta_2(c) = 1; \quad \delta_1(c) = \delta_2(-c) = 0;$$

$$\kappa_1(-c) = \kappa_2(c) = 1; \quad \kappa_1(c) = \kappa_2(-c) = 0;$$

$$\varphi_1(-c) = \varphi_2(c) = 1; \quad \varphi_1(c) = \varphi_2(-c) = 0.$$

(6)

### 2.3. Bestimmung der Funktionen $\delta_i(z), \varphi_i(z), (i = 1, 2)$ für die zylindrische Form des Stabilitätsverlustes

Da es keine Verschiebung in Richtung der  $y$ -Achse gibt, gilt nun

$$V_1 = V_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$U_1 = U_1(x); \quad U_2 = U_2(x); \quad W_1 = W_1(x); \quad W_2 = W_2(x).$$

Die Randbedingungen für diesen Fall haben die Form [6]:

für  $x = 0$  und  $x = a$

1. Durchbiegungen gleich Null, d. h.  $W_1 = W_2 = 0$ ;
2. Biegemomente gleich Null, d. h.  $W_1' = W_2' = 0$ .

Zur Berechnung der Funktionen  $\delta_i(z), \varphi_i(z)$  werden die Verschiebungen der oberen und unteren Deckplatte in folgender Gestalt angenommen:

$$U_1 = A_1 \cos \beta x; \quad W_1 = E_1 \sin \beta x;$$

$$U_2 = A_2 \cos \beta x; \quad W_2 = E_2 \sin \beta x;$$

$$\beta = \frac{\pi m}{a}; \quad m - \text{Zahl der Halbwellen.}$$

(7)

Diese Abhängigkeiten erfüllen die Randbedingungen für die in Bild 3 gezeigten Platten. Setzt man die Ausdrücke (7) in (5) ein und löst beide Systeme einzeln, so erhält man für  $i = 1$

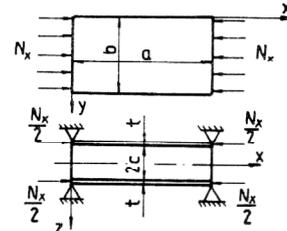


Bild 3  
Einseitig gedrückte Sandwichplatte

$$\delta_1(z) = \frac{1}{2} \sinh \beta z \left[ M_4 + \frac{E_1}{r_1} M_1 - \frac{2 + C}{\beta C} (M_8 + \frac{E_1}{r_1} M_5) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \cosh \beta z \left[ M_3 + \frac{E_1}{r_1} M_2 - \frac{2 + C}{\beta C} (M_7 + \frac{E_1}{r_1} M_6) \right] +$$

$$- \frac{1}{2} z \sinh \beta z \left( M_7 + \frac{E_1}{r_1} M_6 \right) - \frac{1}{2} z \cosh \beta z \left( M_8 + \frac{E_1}{r_1} \right);$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2} \sinh \beta z \left( M_2 + \frac{r_1}{E_1} M_3 \right) + \frac{1}{2} \cosh \beta z \left( M_1 + \frac{r_1}{E_1} M_4 \right) +$$

$$- \frac{1}{2} z \sinh \beta z \left( M_5 + \frac{r_1}{E_1} M_8 \right) - \frac{1}{2} z \cosh \beta z \left( M_6 + \frac{r_1}{E_1} M_7 \right),$$

mit

$$\frac{r_1}{E_1} = \frac{A_1}{E_1} - \frac{t}{2} \beta$$

und für  $i = 2$

$$\delta_2(z) = \frac{1}{2} \sinh \beta z \left[ -M_4 + \frac{E_2}{r_2} M_1 + \frac{2 + C}{\beta C} (M_8 - \frac{E_2}{r_2} M_5) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \cosh \beta z \left[ M_3 - \frac{E_2}{r_2} M_2 + \frac{2 + C}{\beta C} (-M_7 + \frac{E_2}{r_2} M_6) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} z \sinh \beta z \left( -M_7 + \frac{E_2}{r_2} M_6 \right) + \frac{1}{2} z \cosh \beta z \left( M_8 - \frac{E_2}{r_2} M_5 \right);$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{2} \sinh \beta z \left( -M_2 + \frac{r_2}{E_2} M_3 \right) + \frac{1}{2} \cosh \beta z \left( M_1 - \frac{r_2}{E_2} M_4 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} z \sinh \beta z \left( -M_5 + \frac{r_2}{E_2} M_8 \right) + \frac{1}{2} z \cosh \beta z \left( M_6 - \frac{r_2}{E_2} M_7 \right);$$

(8b)

mit

$$\frac{r_2}{E_2} = \frac{A_2}{E_2} + \frac{t}{2} \beta.$$

Hier sind

$$M_1 = \frac{c \operatorname{ch} \beta c + \frac{2+C}{\beta C} \operatorname{ch} \beta c}{c + M_9}; \quad M_4 = \frac{c \operatorname{sh} \beta c}{c + M_9};$$

$$M_9 = \frac{2+C}{\beta C} \operatorname{sh} \beta c \operatorname{ch} \beta c;$$

$$M_7 = \frac{\operatorname{sh} \beta c}{c + M_9}; \quad M_8 = \frac{\operatorname{ch} \beta c}{c + M_9};$$

$$M_2 = \frac{c \operatorname{sh} \beta c + \frac{2+C}{\beta C} \operatorname{ch} \beta c}{c - M_9}; \quad M_5 = \frac{\operatorname{sh} \beta c}{c + M_9};$$

$$M_3 = \frac{c \operatorname{ch} \beta c}{c - M_9}; \quad M_6 = \frac{\operatorname{ch} \beta c}{c - M_9}.$$

Wie schon erwähnt, entsprechen die Funktionen  $\delta_1(z)$  und  $\varphi_1(z)$  dem Zustand  $U_2 = W_2 = 0$  und  $U_1 \neq 0$ ,  $W_1 \neq 0$ , die Funktionen  $\delta_2(z)$  und  $\varphi_2(z)$  dem Zustand  $U_1 = W_1 = 0$  und  $U_2 \neq 0$ ,  $W_2 \neq 0$ . Die Verschiebungen des Kerns im allgemeinen Fall, das heißt für  $U_1 \neq 0$ ,  $W_1 \neq 0$ ,  $U_2 \neq 0$ ,  $W_2 \neq 0$  erhält man durch Addieren der entsprechenden durch die Formeln (3a) und (3b) beschriebenen Verschiebungen:

$$U_K = U_{K1} + U_{K2} = (U_1 - \frac{t}{2} W_1) \delta_1(z) + (U_2 + \frac{t}{2} W_2) \delta_2(z)$$

$$W_K = W_{K1} + W_{K2} = W_1 \varphi_1(z) + W_2 \varphi_2(z),$$

oder nach Einführen der Funktionen  $\bar{U}, \bar{U}, \bar{W}, \bar{W}$  gemäß (2):

$$U_K = (\bar{U} - \frac{t}{2} \bar{W}) F_1(z) + (\bar{U} - \frac{t}{2} \bar{W}) F_2(z) \quad (9)$$

$$W_K = \bar{W} T_1(z) + \bar{W} T_2(z),$$

wobei

$$F_1(z) = \delta_1(z) + \delta_2(z); \quad F_2(z) = \delta_1(z) - \delta_2(z);$$

$$T_1(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z); \quad T_2(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z).$$

Zur eindeutigen Bestimmung der Funktion  $\delta_i(z)$ ,  $\varphi_i(z)$  ( $i=1, 2$ ) muß man das Verhältnis der Amplituden  $A_i/E_i$ ,  $i=1, 2$  kennen. Im allgemeinen Fall sind diese unbekannt. Der Charakter der Verschiebungen  $W_K$  und  $U_K$  im Kern [6], [7], [10] weist aber darauf hin, daß  $F_2(z)$  eine ungerade,  $T_1(z)$  dagegen eine gerade Funktion ist. Diese Bedingung ist erfüllt für  $A_1/E_1 = -A_2/E_2$ .

Addiert man entsprechende Ausdrücke in den Formeln (8a) und (8b), so erhält man schließlich:

$$F_1(z) = (M_3 + \frac{M_2}{r}) \operatorname{ch} \beta z - (M_7 + \frac{M_6}{r}) (z \operatorname{sh} \beta z + \frac{2+C}{\beta C} \operatorname{ch} \beta z);$$

$$F_2(z) = (M_4 + \frac{M_1}{r}) \operatorname{sh} \beta z - (M_8 + \frac{M_5}{r}) (z \operatorname{ch} \beta z + \frac{2+C}{\beta C} \operatorname{sh} \beta z);$$

(10)

$$T_1(z) = (M_1 + rM_4) \operatorname{ch} \beta z - (M_5 + rM_8) z \operatorname{sh} \beta z;$$

$$T_2(z) = (M_2 + rM_3) \operatorname{sh} \beta z - (M_6 + rM_7) z \operatorname{ch} \beta z.$$

Auf diese Weise bilden die Formeln (9) mit den Funktionen (10) in Systemen von Abhängigkeiten in hyperbolischen Funktionen für den dreidimensionalen Verschiebungszustand des Kerns.

### 3. Gleichgewichtsgleichungen und kritische Belastungen

#### 3.1. Elastische Energie der Deckplatten und Arbeit der äußeren Kräfte

Wenn man die Deckplatten als dünne Blechtafeln betrachtet, die allen Voraussetzungen der Elastizitätstheorie entsprechen, dann ist die Summe der Biegeenergie der oberen und unteren Deckplatten

$$E_D = E_{D0} + E_{Du} = \int_0^a \int_0^b [D(U^{*2} + \bar{U}^{*2}) + D(\bar{W}^{*2} + \bar{W}^{*2})] dx dy. \quad (11)$$

Wenn auf den Rändern  $x=0$  und  $x=a$  eine konstante Belastung  $N_x$  wirkt (Bild 3), so kann die Arbeit der äußeren Kräfte mit Hilfe folgender Formel [9] beschrieben werden:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x^* (\bar{W}^{*2} + \bar{W}^{*2}) dx dy. \quad (12)$$

#### 3.2. Elastische Energie des Kerns

Die elastische Energie eines isotropen Kerns im allgemeinen Verformungszustand wird durch folgende Abhängigkeit [9] beschrieben:

$$E_K = G_K \int_0^a \int_0^b \int_{-c}^c \left[ \frac{\nu_K}{1-2\nu_K} (\epsilon_{xK} + \epsilon_{yK} + \epsilon_{zK})^2 + \epsilon_{xK}^2 + \epsilon_{yK}^2 + \epsilon_{zK}^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xyK}^2 + \gamma_{xzK}^2 + \gamma_{yzK}^2) \right] dz dx dy. \quad (13)$$

Für zylindrische Form der Ausbeulung entsprechen Bild 3 ist:

$$\epsilon_{yK} = \gamma_{xyK} = \gamma_{yzK} = 0; \quad \epsilon_{xK} = U_K; \quad \epsilon_{zK} = W_K; \quad \gamma_{xzK} = U_K + W_K \quad (14)$$

Berücksichtigt man weiter die Formeln (13) und (9), so erhält man die Abhängigkeiten für  $E_K$  als Funktion

$$\text{der Verschiebungen } \bar{U}, \bar{U}, \bar{W}, \bar{W}: \quad E_K = f[\bar{U}(x), \bar{U}(x), \bar{W}(x), \bar{W}(x)]. \quad (15)$$

#### 3.3. Gleichgewichtsgleichungen

Mit den Formeln (11), (12) und (15) ist die gesamte potentielle Energie der Platte

$$\Pi = E_D + E_K - A. \quad (16)$$

Auf Grund der Variationsrechnung findet man aus der Bedingung

$$\delta \Pi = 0 \quad (17)$$

vier örtliche Gleichgewichtsgleichungen

$$\begin{aligned} 2 \bar{U} Z_{21} - 2 \bar{U}' Z_1 - \bar{W} Z + \bar{W} (Z_{27} - Z_{17}) &= 0; \\ 2 \bar{U} Z_{22} - 2 \bar{U}' Z_2 - \bar{W} Z_8 + \bar{W} (Z_{28} - Z_{15}) &= 0; \\ 2 \bar{W} Z_{10} + \bar{W}' 2 (Z_{16} - Z_{23}) + 2 \bar{W}'' Z_5 + \bar{U} (Z_{15} - Z_{28}) \\ + \bar{U}' Z_8 + N_x^* \bar{W} &= 0; \\ 2 \bar{W} Z_{11} + \bar{W}' 2 (Z_{18} - Z_{24}) + 2 \bar{W}'' Z_4 + \bar{U}' (Z_{17} - Z_{27}) \\ + \bar{U} Z_7 + N_x^* \bar{W} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} 2 \bar{U}' Z_1 + \bar{W} Z_7 + \bar{W} Z_{17} &= 0; \\ 2 \bar{U}' Z_2 + \bar{W} Z_8 + \bar{W} Z_{15} &= 0; \\ \bar{W} (2 Z_{23} - Z_{16}) + \bar{U} Z_{28} - 2 \bar{W}'' Z_5 - \bar{U}' Z_8 - N_x^* \bar{W} &= 0; \\ \bar{W} (2 Z_{24} - Z_{18}) + \bar{U} Z_{27} - 2 \bar{W}'' Z_4 - \bar{U}' Z_7 - N_x^* \bar{W} &= 0; \\ 2 \bar{W}'' Z_4 + \bar{U}' Z_7 + \bar{W} Z_{18} &= 0; \\ 2 \bar{W}'' Z_5 + \bar{U}' Z_8 + \bar{W} Z_{16} &= 0, \end{aligned} \quad (18a)$$

wobei  $Z_1, \dots, Z_{28}$  Konstante sind. Man sieht, daß das Gleichungssystem bezüglich der Verschiebungen  $\bar{U}$ ,  $\bar{W}$  und  $\bar{U}'$ ,  $\bar{W}'$  lösbar ist. Die erste und letzte Gleichung des Systems (18) beschreiben den Verschiebungszustand für  $\bar{U} = \bar{W} = 0$  oder  $U_1 = U_2$  und  $W_1 = -W_2$ , dagegen gelten die zweite und dritte Gleichung (18) für  $U = W = 0$  oder  $U_1 = -U_2$  und  $W_1 = W_2$ .

Wenn man die Verschiebungen der Deckplatten in allgemeiner Gestalt annimmt, dann erhält man:

$$\bar{U} = A \cos \beta x; \quad \bar{U}' = A \sin \beta x; \quad \bar{W} = E \sin \beta x; \quad \bar{W}' = E \cos \beta x,$$

wobei

$$A = \frac{1}{2} (A_1 + A_2); \quad \bar{A} = \frac{1}{2} (A_1 - A_2);$$

$$E = \frac{1}{2} (E_1 + E_2); \quad \bar{E} = \frac{1}{2} (E_1 - E_2);$$

$$\beta = \frac{m \pi}{a}; \quad m - \text{Zahl der Halbwellen.}$$

Aus den Gleichungen (18) erhält man zwei Lösungen für die äußeren Belastungen:

$$N_{x1} = \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\bar{A}}{E} a_{11} + a_{12} \right); \quad (19.1)$$

$$N_{x2} = \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\bar{A}}{E} a_{21} + a_{22} \right); \quad (19.2)$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A}}{E} &= - \frac{-4\beta c + \frac{\sinh \beta c \cosh \beta c}{\beta C^*}}{c + M_0} G_K + t \beta^3 B + \frac{t}{2} \beta; \\ \frac{\bar{A}}{E} &= - \frac{-4\beta c - \frac{\sinh \beta c \cosh \beta c}{\beta C}}{c - M_0} G_K + t \beta^3 B + \frac{t}{2} \beta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \beta (Z_{28} - Z_{15}) + \beta^3 Z_8; \\ a_{12} &= 2 Z_{10} - \beta^2 (2 Z_{16} - 2 Z_{23}) + 2 \beta^4 Z_5; \\ a_{21} &= \beta (Z_{27} - Z_{17}) + \beta^3 Z_7; \\ a_{22} &= 2 Z_{11} - \beta^2 (2 Z_{18} - 2 Z_{24}) + 2 \beta^4 Z_4. \end{aligned}$$

Hier sind:

$$Z_1 = B + G_K \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c F_1^2 dz;$$

$$Z_2 = B + G_K \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c F_2^2 dz;$$

$$Z_4 = D + \frac{t^2}{4} G_K \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c F_1^2 dz;$$

$$Z_5 = D + G_K \frac{t^2}{4} \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c F_2^2 dz;$$

$$Z_7 = -t G_K \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c F_1^2 dz;$$

$$Z_8 = -t G_K \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c F_2^2 dz;$$

$$Z_{10} = G_K \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c T_1^2 dz;$$

$$Z_{11} = G_K \left( 1 + \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \right) \int_{-c}^c T_2^2 dz;$$

$$Z_{15} = 2 G_K \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \int_{-c}^c F_2 T_1^2 dz;$$

$$Z_{17} = 2 G_K \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \int_{-c}^c F_1 T_2^2 dz;$$

$$Z_{18} = -t G_K \frac{\nu_K}{1 - 2\nu_K} \int_{-c}^c F_1 T_2^2 dz;$$

$$Z_{21} = \frac{1}{2} G_K x_{11}; \quad Z_{22} = \frac{1}{2} G_K x_{12};$$

$$Z_{23} = \frac{1}{2} G_K \left( \frac{t^2}{4} x_{12} + x_{13} - t x_{10} \right);$$

$$Z_{24} = \frac{1}{2} G_K \left( \frac{t^2}{4} x_{11} + x_{14} - t x_{17} \right);$$

$$Z_{27} = \frac{1}{2} (2x_{17} - t x_{11}) G_K; \quad Z_{28} = \frac{1}{2} G_K (2x_{18} - t x_{12});$$

$$x_{11} = \int_{-c}^c F_1^2 dz; \quad x_{12} = \int_{-c}^c F_2^2 dz; \quad x_{13} = \int_{-c}^c T_1^2 dz;$$

$$x_{14} = \int_{-c}^c T_2^2 dz; \quad x_{17} = \int_{-c}^c F_1^A T_2 dz;$$

$$x_{18} = \int_{-c}^c F_2^A T_1 dz.$$

Die Belastungen  $N_{x1}$  und  $N_{x2}$  nach (19) sind unter anderem von der Zahl der Halbwellen  $m$  abhängig. Den kleinsten Wert dieser Spannungen findet man aus der Bedingung:

$$\frac{\partial N_{xi}}{\partial m} = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (20)$$

Diese Aufgabe kann man einfach numerisch lösen, zum Beispiel für folgende Daten:  $a = 0,285 \text{ m}$ ,  $b = 0,185 \text{ m}$ ,  $t = 1,0 \text{ mm}$ ,  $E = 68694,8 \text{ MPa}$ ,  $G_K = 25,162 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $t = 0,001 \text{ m}$ . Die aus den Formeln (19) für unterschiedliche Kerndicken  $c$  ermittelten kritischen Belastungen  $P_{Kr1}$  und  $P_{Kr2}$  sind in der Tabelle 1 und grafisch in Bild 4 angegeben.

Tabelle 1

Werte der kritischen Belastungen  $P_{Kr1}$  und  $P_{Kr2}$  und zugehörige Zahl der Halbwellen in Abhängigkeit von der Kerndicke

Fall Nr.	c [m]	$m_1$	$P_{Kr1}$ [N] nach (19.1)	$m_2$	$P_{Kr2}$ [N] nach (19.2)
1	0,004	1	28245	20	231039
2	0,005	1	36658	19	209453
3	0,008	1	62879	16	175602
4	0,01	1	80778	15	164777
5	0,012	1	98834	15	158049
6	0,015	1	126063	14	152319
7	0,017	11	141105	14	150303
8	0,018	12	142473	14	149645
9	0,0235	13	145705	13	147327
10	0,04	13	146464	13	146558

### 3.4. Die Formen des Stabilitätsverlustes

Aus der Auflösung des Gleichungssystems (18) geht folgendes hervor:

– Die Form von  $N_{x1}$  entspricht dem unsymmetrischen Verschiebungszustand  $U = \bar{W} = 0$  oder  $U_1 = -U_2$  und  $W_1 = W_2$  (vgl. Bild 5 b). Dieser Verschiebungszustand

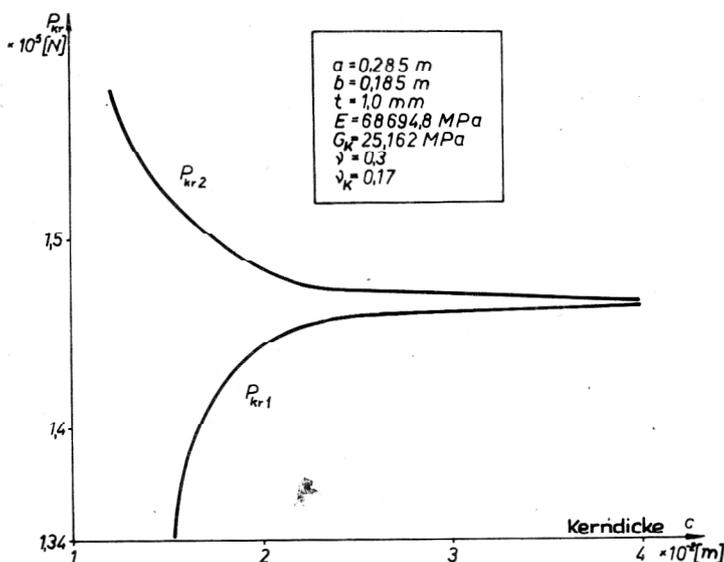


Bild 4 Kritische Belastungen  $P_{Kr1}$  und  $P_{Kr2}$  als Funktionen der Kerndicke.

Es ist zu ersehen, daß die kritischen Belastungen  $P_{Kr} = N_{xkr} b$  nach der Formel (19.1) kleiner als die nach der Formel (19.2) sind, d. h.

$$P_{Kr1} \leq P_{Kr2}.$$

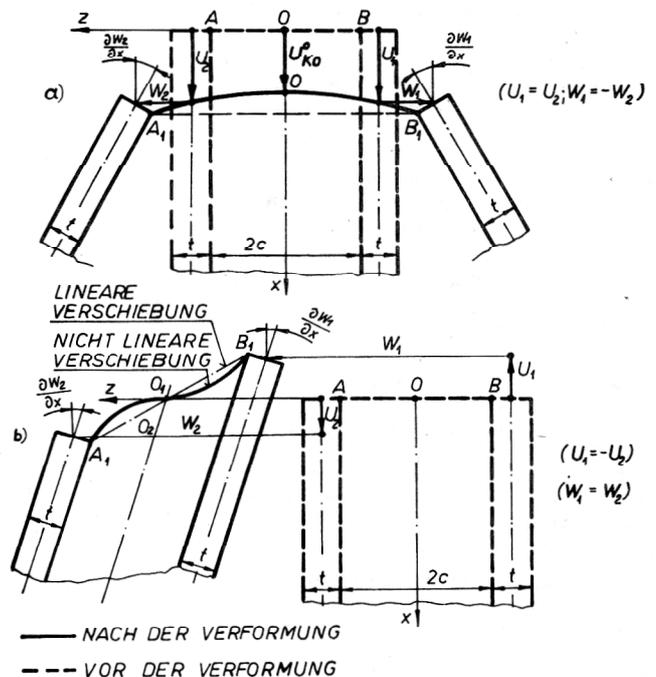


Bild 5

Die zwei Verschiebungszustände von Dreischichtplatten

- a) symmetrisch
- b) unsymmetrisch

entspricht der in den Arbeiten [7; Bild 2b, d] und [6; Bild 4] dargestellten Form.

- Die Form von  $N_{x2}$  entspricht dem symmetrischen Verschiebungszustand  $\bar{U} = \bar{W} = 0$  oder  $U_1 = U_2$  und  $W_1 = -W_2$  (vgl. Bild 5 a). Dieser Verschiebungszustand entspricht der in [7; Bild 2c] dargestellten Form.

Man kann also feststellen, daß nach den erhaltenen Lösungen  $P_{kr1}$  als der kleinste Wert der kritischen Belastungen maßgebend ist. Dies bestätigt zugleich die Richtigkeit der in den Arbeiten [6], [7] angegebenen Lösungen.

#### LITERATUR

- [1] Aleksandrov, A. Ja., Brjukker, L. E., Kuršin, L. M., Prusakov, A. P.: Rasčet trechslonnych panelej. Oborongiz, Moskva 1960.
- [2] Gough, G. S., Elan, C. F., de Bruyne, N. A.: The stabilization of a thin sheet by a continuous supporting medium. J. Royal Aeron. Scien, 44, June 1940, S. 12 – 43.
- [3] Grigoljuk, E., Čulkov, P. P.: Ustojećivost' i kolebanija trechslonnych oboloček. Moskva 1973.
- [4] Korolev, V. I.: Simmetricnaja forma poteri ustojčivosti trechslonnych plastin i oblocek. Vestnik Mosk. Univ., Nr. 5, 1956.
- [5] Libove, G., Batdorf, S.: General small-deflection theory for flat sandwich plates. NACA, TN 1526.
- [6] Romanow, Fr.: Kritische Belastungen von Mehrschichtkonstruktionen. Wiss. Arbeiten des Instituts für Konstruktion und Betrieb der Techn. Hochschule Wroclaw. Seria Monografie Nr. 8, Wroclaw 1979.
- [7] Romanow, Fr.: Hyperbolischer dreiaxialer Verschiebungszustand von flachen Sandwichkonstruktionen und schwachgewölbten Sandwich-Schalen. Bauingenieur, 6 (1983).
- [8] Timoshenko, S., Goodier, J. N.: Theory of Elasticity. New York, Toronto, London, 1951.
- [9] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S.: Theory of plates and shells. New York, Toronto, London, 1959.
- [10] Jankowski, Z., Romanow, Fr., Stopa, R.: Versuche über die Bestimmung des Verschiebungszustandes des Kerns in gedrückten Sandwichstäben. X. Symposium über Versuche in der Mechanik fester Körper, Warszawa 1982.
- [11] Neuber, H.: Theorie der Druckstabilität der Sandwich-Platte. Z. Angew. Mat. u. Mechanik, 32, 325 – 35 (1952); 33, 10 – 25 (1953).
- [12] Bufler, H.: Axialsymmetrisches Ausknicken kreisförmiger Verbundplatten. Ingenieur-Archiv, 34, 385 – 391 (1965).
- [13] Bufler, H.: Die Druckstabilität rechteckiger Verbundplatten. Ingenieur-Archiv, 34, 109 – 128, (1965)