TECHNISCHE MECHANIK 7 (1986) Heft 2
Manuskripteingang: 5. 7. 1985

Entwicklungsgleichungen innerer Variablen in Plastizitätstheorien

W. Göhler

1. Einleitung

Die Verwendung innerer Variablen in der Plastizitätstheorie ist eine thermodynamische Methode. Durch zusätzlich eingeführte innere (oder versteckte) Zustandsvariablen soll inelastisches Materialverhalten erfaßt werden.
Die Thermodynamik von Materialien mit inneren Variablen ist von Coleman und Gurtin [4] ausgearbeitet worden. Für die inneren Variablen werden Entwicklungsgleichungen, das sind Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit, vorgegeben.

Bei der Anwendung dieser Methode in der Plastizitätstheorie können hinsichtlich der Behandlung der Dehnungen als Zustandsvariable zwei Richtungen unterschieden werden. Für beide Richtungen finden sich in der Literatur verschiedene Ansätze von Entwicklungsgleichungen innerer Variablen, z. B. bei Rice [3], Perzyna und Voino [5], Valanis [6] bis [8] und Kratochvil [11] auf der einen Seite, sowie Kröner [12], Bruhns und Schreiber [14] auf der anderen.
Bergander [1] hat erkannt, daß viele Verfestigungsansätze aus der Literatur zur plastischen Fließtheorie einer bestimmten Art von Entwicklungsgleichungen genügen. Daraus ergibt sich eine einfache Form des elastisch-plastischen Deformationsgesetzes (Standardformulierung).
In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Plastizitätstheorien, bezüglich der Auswahl der Zustandsvariablen, in zwei Gruppen eingeteilt. Danach wird in beiden Gruppen der Einfluß bestimmter Ansätze von Entwicklungsgleichungen innerer Variablen auf das Deformationsgesetz, d. h. die Spannungs-Dehnungs-Relation, diskutiert. Eingeschlossen ist zeitabhängiges plastisches Verhalten (Viskoplastizität). Unbeachtet bleiben physikalische Interpretationen der Entwicklungsgleichungen oder der inneren Variablen selbst.

2. Definitionen und Bezeichnungen

Wir beziehen uns auf ein kartesisches Koordinatensystem. Unterstrichene Buchstaben bezeichnen Tensoren. Es treten innere Produkte und Gradienten von Tensorfunktionen auf. Deren Schreibweise wird am folgenden Beispiel demonstriert. Es seien $\underline{a}$ und $\underline{b}$ Tensoren 2. Stufe, $\underline{A}$ ein Tensor 4. Stufe, $f(\underline{A})$ eine skalawertige Tensorfunktion und $\underline{a}(\underline{b})$ eine tensorwertige Tensorfunktion. Dann gilt:

$$\underline{A} : \underline{a} = [A_{ijkl}\, a_{lk}] \; ; \quad \underline{a} : \underline{b} = [a_{ij}\, b_{ji}]$$

$$\frac{\partial f(\underline{A})}{\partial \underline{A}} = [\frac{\partial f}{\partial A_{ijkl}}] \; ; \quad \frac{\partial \underline{a}(\underline{b})}{\partial \underline{b}} = [\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{kl}}]$$

Den Spannungstensor nennen wir $\underline{\sigma}$. Der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten $\underline{d}$ wird so gewählt, daß das innere Produkt aus Spannungs- und Deformationsgeschwindigkeitstensor die spezifische mechanische Leistung $\dot{w}$ ergibt:

$$\dot{w} = \underline{\sigma} : \underline{d} \tag{2.1}$$

Bei hinreichend kleinen Deformationen ist der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten $\underline{d}$, gleich dem Tensor der Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\underline{\epsilon}}$:

$$\underline{d} = \dot{\underline{\epsilon}} \tag{2.2}$$

3. Zustandsbeschreibung plastisch deformierter Körper

Zuerst muß die Deformation des Körpers beschrieben werden. Heute geht man meist von plastischen (oder nichtelastischen) und elastischen Deformationen als Teile der Gesamtdeformation aus. Gesamtdeformationen und elastische Deformationen bei gegebenem Elastizitätsgesetz können eindeutig festgelegt werden [9]. Die Schwierigkeit, plastische Deformationen kinematisch zu definieren, umgehen viele Autoren dadurch, daß sie die spezifische mechanische Leistung $\dot{w}$ in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufspalten:

$$\dot{w} = \dot{w}_e + \dot{w}_p = \underline{\sigma} : (\underline{d}_e + \underline{d}_p) \tag{3.1}$$

Nun braucht nur noch der Tensor der plastischen Deformationsgeschwindigkeiten $\underline{d}_p$ definiert zu werden. Im weiteren beschränken wir uns auf kleine Deformationen und ersetzen $\underline{d}_p$ durch den plastischen Teil des Dehnungsgeschwindigkeitstensors $\dot{\underline{\epsilon}}_p$.
In allen Plastizitätstheorien mit inneren Variablen findet sich, explizit oder implizit, folgende Zustandsdefinition:

Der Zustand eines plastisch deformierten Körpers ist eindeutig bestimmt durch die Werte der Spannungen ($\underline{\sigma}$), der Temperatur (T) und eines Satzes innerer Variablen ($\underline{H}$).

Wir wollen in dem „formalen" Vektor $\underline{H}$ einen vollständigen Satz innerer Variablen zusammenfassen. Die Elemente von $\underline{H}$ können Tensoren beliebiger Stufe sein.
Zur Beschreibung eines Zustandes benutzen wir die spezifische freie Enthalpie ψ [2]:

$$\psi = \psi(\underline{\sigma}, T, \underline{H}) \tag{3.2}$$

Die Gleichung (3.2), oder eine entsprechende Gleichung für ein anderes thermodynamisches Potential (freie Energie), kann als erste konstitutive Gleichung jeder Plastizitätstheorie mit inneren Variablen, bezeichnet werden. Das gilt auch, wenn sie in vielen Arbeiten nicht explizit angeführt wird. Das Ziel einer Plastizitätstheorie ist die Ableitung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Im wei-

teren wird diese Bezeichnung auch dann verwendet, wenn in den entsprechenden Gleichungen Zeitableitungen von Spannungen oder Dehnungen vorkommen.
Um dieses Ziel zu erreichen, muß die Rolle der Dehnungen in der beschriebenen Zustandskonzeption festgelegt werden. Mit anderen Worten, es muß definiert werden, welcher Teil der Dehnungen die zu den Spannungen konjugierten Zustandsvariablen sind. Diese Dehnungen können aus (3.2) durch partielle Differentiation nach den Spannungen ermittelt werden.
Da nur elastische Dehnungen und Gesamtdehnungen definiert sind, kommen nur sie als Zustandsvariablen in Frage.
Wir nennen im weiteren Theorien, welche die Gesamtdehnungen als Zustandsvariablen auffassen, Plastizitätstheorien vom Typ I. In den Plastizitätstheorien vom Typ II werden die elastischen Dehnungen als Zustandsvariablen angesehen.

4. Konstitutive Gleichungen

Wir wollen die Dehnungsgeschwindigkeiten als Funktion der Zustandsvariablen $\underline{\sigma}$, T und $\underline{H}$, sowie deren Zeitableitungen darstellen. Dann können die Entwicklungsgleichungen für $\underline{H}$ direkt eingesetzt werden.

Die Zeitableitungen $\dot{\underline{\sigma}}$, $\dot{T}$, $\dot{H}$ und $\dot{\underline{\epsilon}}$ werden von nun an Geschwindigkeiten der jeweiligen Variablen genannt. Die Gleichung (3.2) ist die erste konstitutive Gleichung und wird nicht nochmals aufgeführt. Außerdem verzichten wir auf die Gleichungen für Entropie, Entropieproduktion und Wärmefluß, welche zu einem vollständigen Satz konstitutiver Gleichungen gehören, aber keinen Einfluß auf die Spannungs-Dehnungs-Relation haben. In diesem Zusammenhang sei auf vollständige Darstellungen konstitutiver Gleichungen in [2] und [4] verwiesen.

4.1. Plastizitätstheorien vom Typ I

Die Gesamtdehnungen sind Zustandsvariablen und ergeben sich aus (3.2) als Funktionen von $\underline{\sigma}$, T und $\underline{H}$. Die Werte der inneren Variablen folgen aus ihren Entwicklungsgleichungen. Die Spannungs-Dehnungs-Relationen dieser Theorien werden damit durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\underline{\epsilon} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\epsilon}(\underline{\sigma}, T, \underline{H}) \tag{4.1}$$

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} * \dot{\underline{H}} \tag{4.2}$$

$$\dot{\underline{H}} = \dot{\underline{H}}(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}; \dot{\underline{\sigma}}, \dot{T}, \dot{\underline{\epsilon}}) \tag{4.3}$$

Gleichung (4.2) ist die Zeitableitung der Gleichung (4.1) und stellt keine zusätzliche konstitutive Gleichung dar. Die Bedeutung des Symbols „*" hängt von der Art der jeweiligen inneren Variablen, d. h. dem Element von $\underline{H}$, ab. Bei skalaren inneren Variablen bedeutet „*" einfach Multiplikation. Im Falle von Vektoren bezeichnet „*" die Skalarproduktbildung. Bei Tensoren 2. Stufe ist „*" gleichbedeutend mit „:" und bei höherstufigen Tensoren mit entsprechenden inneren Produkten. Hat $\underline{H}$ N Elemente, so stellt ein mit „*" gekennzeichnetes Produkt eine Summe von N entsprechenden inneren Produkten dar.

Der Ansatz (4.3) ist so formuliert, daß er viele, aus der Literatur bekannten, Entwicklungsgleichungen enthält. Wegen der Existenz von (4.1) werden in einem konkreten Ansatz Spannungs- und Dehnungsglieder nicht gemeinsam auftreten.
Gleichung (4.2) ist die gesuchte Beziehung zwischen Dehnungsgeschwindigkeiten und den anderen Geschwindigkeiten $\dot{\underline{\sigma}}$, $\dot{T}$, $\dot{\underline{H}}$. Plastische Dehnungsgeschwindigkeiten brauchen in dieses Konzept nur dann eingeführt zu werden, wenn sie als Argumente in den Entwicklungsgleichungen vorkommen. Für diesen Fall folgen wir der Definition aus [3].
Zunächst sei daran erinnert, daß innere Variablen in die Plastizitätstheorie eingeführt wurden, um nichtelastisches, von der Deformationsgeschichte abhängiges, Materialverhalten erfassen zu können. Die exakte Aussage, daß der Spannungstensor ein Funktional der Deformationsgeschichte [9] ist, wird ersetzt durch Gleichung (4.1) bzw. durch eine nach den Spannungen aufgelöste Gleichung. Die Spannungen sind Funktionen der Zustandsvariablen $\underline{\epsilon}$, T, $\underline{H}$. Die inneren Variablen bringen dabei die Geschichtsabhängigkeit ein, d. h. sie sind selbst Funktionale der Deformationsgeschichte. Dabei gilt allerdings die Einschränkung, daß ihre Zeitableitungen (4.3) Funktionen sind. Es liegt deshalb nahe, als Tensor der plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten den Teil von (4.2) zu definieren, der an die Änderung innerer Variablen gekoppelt ist:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_p = \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} * \dot{\underline{H}} \tag{4.4}$$

Die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten sind in diesem Fall eindeutig durch die vorausgesetzten konstitutiven Gleichungen (4.1) und (4.3) bestimmt.

4.2. Plastizitätstheorien vom Typ II

Nur die elastischen Dehnungen sind Zustandsvariablen und können aus (3.2) bestimmt werden. Neben den Entwicklungsgleichungen der inneren Variablen, muß ein Ansatz für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten gefunden werden. Maßgebend für die Spannungs-Dehnungs-Relation sind somit folgende Gleichungen:

$$\underline{\epsilon}_e = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\epsilon}_e(\underline{\sigma}, T, \underline{H}) \tag{4.5}$$

$$\dot{\underline{\epsilon}}_p = \dot{\underline{\epsilon}}_p(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}; \dot{\underline{\sigma}}, \dot{T}, \dot{\underline{\epsilon}}) \tag{4.6}$$

$$\dot{\underline{H}} = \dot{\underline{H}}(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}; \dot{\underline{\sigma}}, \dot{T}, \dot{\underline{\epsilon}}) \tag{4.7}$$

Analog zu (4.3), wurde der Ansatz (4.7) so formuliert, daß er die bekannten Ansätze der Literatur enthält.
Die dominierende Rolle kommt, innerhalb der Plastizitätstheorien dieses Typs, der Theorie des plastischen Fließens zu. Obwohl der Gleichungssatz (4.5) bis (4.7) die Fließtheorie noch nicht vollständig charakterisiert, wollen wir im weiteren den Begriff Fließtheorie als Synonym für Plastizitätstheorie vom Typ II verwenden.
Die Fließtheorie definiert im Spannungsraum eine Grenzfläche. Spannungszustände auf dieser Grenzfläche führen zum plastischen Fließen. Die diese Fläche beschreibende skalare Funktion heißt Fließbedingung F:

$$F(\underline{\sigma}, T, \underline{H}) = 0 \tag{4.8}$$

Die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten sollen dem assoziierten Fließgesetz genügen:

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\lambda} \tag{4.9}$$

Mit (4.9) ist die Richtung der plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten eine bekannte Funktion der Zustandsvariablen $\underline{\sigma}$, T und $\underline{H}$.

Eine Erweiterung der Fließtheorie wird in [2] vorgeschlagen. Ausgangspunkt ist die Zerlegung des plastischen Anteils der spezifischen mechanischen Leistung $\dot{w}$, in einen dissipativen und einen latent gespeicherten Teil. Analog zerfällt dann auch die plastische Deformationsgeschwindigkeit. Für ihren „dissipativen" Teil wird das assoziierte Fließgesetz angenommen. Der „latent gespeicherte" Anteil wird proportional zu den Geschwindigkeiten der Zustandsvariablen angesetzt. Dadurch fügt sich dieser Ansatz gut in das hier diskutierte Schema ein.

5. Linear geschwindigkeitsabhängige Entwicklungsgleichungen

Es läßt sich eine, im Vergleich zu (4.3) und (4.7) speziellere, Form der Entwicklungsgleichungen finden, die eine große Zahl bekannter Ansätze enthält. Diese Form ist der folgende, in den Geschwindigkeitsgliedern lineare, Ansatz:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{H}} &= \underline{A}_0(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) + \underline{A}_T(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon})\dot{T} + \\ &\underline{A}_\sigma(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) : \underline{\dot{\sigma}} + \underline{A}_\epsilon(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) : \underline{\dot{\epsilon}}\end{aligned} \tag{5.1}$$

Die Koeffizienten $\underline{A}_0$, $\underline{A}_T$, $\underline{A}_\sigma$ und $\underline{A}_\epsilon$ sind wie $\underline{H}$ „formale" Vektoren. Es sei ein bestimmtes Element von $\underline{H}$ ein n-stufiger Tensor. Dann sind die zugeordneten Elemente von $\underline{A}_0$ und $\underline{A}_T$ ebenfalls Tensoren n-ter Stufe, während die entsprechenden Elemente von $\underline{A}_\sigma$ und $\underline{A}_\epsilon$ Tensoren der Stufe n+2 sind.

Für Plastizitätstheorien des Typs I ergibt sich durch Einsetzen von (5.1) in (4.2) folgende Spannungs-Dehnungs-Relation:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{\epsilon}}_p &= \underline{b}_0(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) + \underline{b}_T(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon})\dot{T} \\ &+ \underline{B}_\sigma(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) : \underline{\dot{\sigma}}\end{aligned} \tag{5.2}$$

Dabei sind $\underline{b}_0$ und $\underline{b}_T$ Tensoren 2. Stufe, $\underline{B}_\sigma$ ein Tensor 4. Stufe.

Auf die Angabe der konkreten Form von $\underline{b}_0$, $\underline{b}_T$ und $\underline{B}_\sigma$ wollen wir verzichten, da es den Ansatz (5.1), in dieser Form, in der Literatur nicht gibt. Es kommen nur Spezialfälle von (5.1) vor, die man in zwei Klassen einteilen kann. Diese beiden Klassen heißen in der Literatur „geschwindigkeitsabhängig" und „geschwindigkeitsunabhängig".

Eine solche Bezeichnung steht aber im Widerspruch zur Sprachregelung dieses Artikels. Denn unter „geschwindigkeitsabhängigen" Entwicklungsgleichungen wären solche ohne Geschwindigkeitsglieder zu verstehen ($\underline{A}_T = \underline{0}$, $\underline{A}_\sigma = \underline{0}$, $\underline{A}_\epsilon = \underline{0}$), während „geschwindigkeitsunabhängige" Ansätze kein absolutes Glied ($\underline{A}_0 = \underline{0}$), aber mindestens ein Geschwindigkeitsglied ($\underline{A}_T$ oder $\underline{A}_\sigma$ oder $\underline{A}_\epsilon$) enthielten.

Wir führen deshalb den Begriff Zeitabhängigkeit ein. Entwicklungsgleichungen der Form

$$\underline{\dot{H}} = \underline{A}_0(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) \tag{5.3}$$

heißen zeitabängig, in dem Sinne, daß sich die Werte der inneren Variablen, auch bei konstanten Zustandsgrößen, ändern können.

Es ist sofort zu erkennen, daß ein zeitabhängiger Ansatz (5.3) auch auf zeitabhängiges plastisches Verhalten führt, wenn die Theorien vom Typ I betrachtet werden. Einsetzen von (5.3) in (4.4) ergibt:

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p^{(I)} = \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} * \underline{A}_0(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) = \underline{b}_0(\underline{\sigma}, T, \underline{H}, \underline{\epsilon}) \tag{5.4}$$

Ansätze der Art (5.3) für skalarwertige innere Variablen sind ausführlich in [3] diskutiert. In [5] werden die plastischen Dehnungen als innere Variablen aufgefaßt und ebenfalls (5.3) postuliert. Physikalische Interpretationen, von tensorwertigen inneren Variablen, die (5.3) genügen, findet man in [11].

Zeitunabhängig werden die Ansätze (5.1), wenn $\underline{A}_0 = \underline{0}$ ist. Denn die inneren Variablen behalten ihre Werte, falls die anderen Variablen konstant sind. Zeitunabhängige Ansätze führen bei Plastizitätstheorien vom Typ I auf (5.2), mit $\underline{b}_0 = \underline{0}$. Ein solcher Ansatz wird später diskutiert (Abschnitt 6.).

Für die Erörterung der Fließtheorie vereinfachen wir (5.1) noch etwas. Nach der, im Abschnitt 4.1. erläuterten, Vorstellung, sind rein elastische Deformationen ohne Einfluß auf die inneren Variablen. Dann wird $\underline{\dot{H}}$ unabhängig von den elastischen Dehnungsgeschwindigkeiten und (5.1) reduziert sich auf:

$$\underline{\dot{H}} = \underline{A}_0 + \underline{A}_T\,\dot{T} + \underline{A}_\sigma : \underline{\dot{\sigma}} + \underline{A}_\epsilon^P : \underline{\dot{\epsilon}}_p \tag{5.5}$$

Zur Berechnung des Faktors $\dot{\lambda}$ aus (4.9), bildeten wir zunächst die Zeitableitung der Fließbedingung (4.8):

$$\dot{F} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial F}{\partial \underline{H}} * \underline{\dot{H}} \tag{5.6}$$

Nach Einsetzen von (5.5) und (4.9), folgt aus (5.6):

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} = \frac{1}{V}\Bigg\{ &\frac{\partial F}{\partial \underline{H}} * \underline{A}_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \underline{H}} * \underline{A}_\sigma\right) : \\ &\underline{\dot{\sigma}} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial \underline{H}} * \underline{A}_T\right)\dot{T}\Bigg\} \qquad \text{mit}\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$V = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{H}} * \underline{A}_\epsilon^P : \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right) \tag{5.8}$$

Setzt man (5.7) wieder in (4.9) ein, so erhält man:

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p^{(II)} = \underline{C}_0 + \underline{C}_T\,\dot{T} + \underline{C}_\sigma : \underline{\dot{\sigma}} \tag{5.9}$$

Die Tensoren $\underline{C}_0$, $\underline{C}_T$ (2. Stufe) und $\underline{C}_\sigma$ (4. Stufe) können von $\underline{\sigma}$, T, $\underline{H}$ und $\underline{\epsilon}$ abhängen. Ihre konkrete Form kann leicht mit Hilfe von (4.9), (5.7) und (5.8) ermittelt werden.

Da die inneren Variablen nicht von elastischen Deformationen abhängig sein sollen, sind umgekehrt die elastischen Dehnungen (4.5) keine Funktionen der inneren Variablen. Dann sind die elastischen Dehnungsgeschwindigkeiten $\underline{\dot{\epsilon}}_e$ linear in $\dot{T}$ und $\underline{\dot{\sigma}}$.

$$\underline{\dot{\epsilon}}_e = \frac{\partial \underline{\epsilon}_e}{\partial T}\,\dot{T} + \frac{\partial \underline{\epsilon}_e}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} \tag{5.10}$$

Die Spannungs-Dehnungs-Relation der Fließtheorie, welche aus der Addition von (5.9) und (5.10) folgt, hat damit die gleiche Form, wie die Spannungs-Dehnungs-Relation der Typ-I-Theorien (5.2).

Allerdings muß beachtet werden, daß man (5.9) nur dann erhält, wenn der Ansatz (5.5) das $\underline{\dot{\epsilon}}_p$-Glied ($\underline{A}^p_\epsilon \neq \underline{0}$) enthält. Eine zeitabhängige Entwicklungsgleichung (5.3) führt in der Fließtheorie nicht zwangsläufig auf ein zeitabhängiges Deformationsgesetz (5.4). Vielmehr muß für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten ein Ansatz der Art (5.4) gesondert aufgestellt werden. Ein solcher Ansatz könnte z. B. die Zeitabhängigkeit der Fließbedingung berücksichtigen [5]. Zeitunabhängige Ansätze der Art (5.5), mit $\underline{A}_0 = \underline{0}$, werden in [12] und [14] diskutiert.

Für $\dot{T} = 0$, $\underline{A}_0 = \underline{0}$ und $\underline{A}_\sigma = \underline{0}$ folgt aus (4.9), (5.7) und (5.10) die Standardform elastisch-plastischer Deformationsgesetze nach [1]:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{J}\,(\underline{\sigma}, T, \underline{H}) : \underline{\dot{\sigma}} = \left(\frac{\partial \underline{\epsilon}_e}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{1}{V}\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right) : \underline{\dot{\sigma}} \tag{5.11}$$

6. Entwicklungsgleichungen in materialabhängigen Zeitvariablen

Eine wichtige Rolle, vor allem in der praktischen Anwendung spielen Plastizitätstheorien, welche den Vorgang der plastischen Deformation in einem materialspezifischen Zeitmaßstab messen. An die Stelle der physikalischen Zeit t tritt eine zeitartige Variable z, die als skalare innere Variable aufgefaßt werden kann. Zeitartig heißt, daß z nicht negativ und nicht fallend ist:

$$\dot{z} \geqslant 0\,, \quad z(0) = z_0 \geqslant 0 \tag{6.1}$$

Derartige innere, zeitähnliche Variable sind z. B. die, in der Fließtheorie oft verwendete, plastische Vergleichsdehnung [1], oder die innere Zeit der endochronischen Plastizitätstheorie [6] bis [8], [10].

Die Entwicklungsgleichungen der inneren Variablen sind Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich z. Alle Argumente dieser Gleichungen werden ebenfalls als Funktionen von z aufgefaßt.

Wir lösen z aus $\underline{H}$ heraus und fassen die übrigen inneren Variablen in dem „formalen Vektor" $\underline{H}$ zusammen. Die Ableitung nach z schreiben wir:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\quad) = (\quad)$$

Die Entwicklungsgleichungen haben nun folgendes Aussehen:

$$\hat{\underline{H}}' = \hat{\underline{H}}'(\underline{\sigma}, T, z, \underline{H}, \underline{\epsilon}\,;\, \underline{\sigma}', T', \underline{\epsilon}') \tag{6.2}$$

Da die Argumente von $\underline{H}'$ selbst Funktionen von z sind, haben die Entwicklungsgleichungen im t-Maßstab die Gestalt:

$$\dot{\hat{\underline{H}}} = \hat{\underline{H}}\;\dot{z}\,. \tag{6.3}$$

Wir betrachten zuerst wieder Plastizitätstheorien vom Typ I. Aus (4.4) ergeben sich, unter Berücksichtigung von (6.3) und der Tatsache, daß z eine innere Variable ist, folgende Gleichungen für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten:

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p^{(I)} = \left(\frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial z} + \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \hat{\underline{H}}} * \hat{\underline{H}}'\right) \dot{z} = \underline{\epsilon}_p'\;\dot{z} \tag{6.4}$$

Man erkennt, daß (6.2) auch die Richtung der plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten bestimmt. Über den Charakter des Deformationsgesetzes (6.4) entscheidet der Ansatz für $\dot{z}$. Der Spezialfall (5.4) eines viskoplastischen Deformationsgesetzes ergibt sich, wenn z nur eine Funktion der Zustandsgrößen ist. Falls $\dot{z}$ proportional zu den Geschwindigkeiten ist, folgt ein zeitunabhängiges Deformationsgesetz.

Im weiteren konzentrieren wir uns auf eine spezielle Definition von $\dot{z}$ aus [8]:

$$\dot{z}^2 = \frac{1}{g(z)}\,\underline{\dot{\epsilon}}_p : \underline{\dot{\epsilon}}_p \tag{6.5}$$

g(z) ist eine Materialfunktion. Für g(z) = konst. stellt (6.5) die Definition der plastischen Vergleichsdehnung dar. Die Entwicklungsgleichungen (6.2) werden beschränkt auf:

$$\hat{\underline{H}}' = \hat{\underline{H}}'(\underline{\sigma}, T, z, \hat{\underline{H}}\,;\, \underline{\epsilon}_p') \tag{6.6}$$

Dann kann aus (6.4) die Funktion $\underline{\epsilon}_p'$ in folgender Darstellung ermittelt werden:

$$\underline{\epsilon}_p' = \underline{e}\,(\underline{\sigma}, T, z, \hat{\underline{H}}) \tag{6.7}$$

Einsetzen von (6.7) in die Definitionsgleichung von $\dot{z}$ (6.5), unter Berücksichtigung von (6.4), ergibt:

$$\dot{z}^2 = \frac{1}{g}\,\underline{e} : \underline{e}\;\dot{z}^2 \tag{6.8}$$

Die Beziehung (6.8) kann auch in Form einer skalaren Funktion $\tilde{F}$ dargestellt werden, mit der Eigenschaft:

$$\tilde{F}\,(\underline{\sigma}, T, z, \underline{H}) = \underline{e} : \underline{e} - g(z) = 0 \tag{6.9}$$

Ebenso, wie beim Berechnen des Faktors λ des assoziierten Fließgesetzes aus der Zeitableitung der Fließbedingung (Gleichungen (5.6) und (5.7)), kann $\dot{z}$ aus der Zeitableitung von (6.9) bestimmt werden, wenn (6.3) eingesetzt wird. Für $\dot{T} = 0$ erhält man:

$$\dot{z} = \frac{1}{\tilde{V}}\,\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} \qquad \text{mit} \tag{6.10}$$

$$V = -\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \hat{\underline{H}}} * \hat{\underline{H}}'\right) \tag{6.11}$$

Einsetzen von (6.10) in (6.4) zeigt, daß die Definition (6.5) zu einem zeitunabhängigen plastischen Deformationsgesetz führt, welches linear in den Spannungsgeschwindigkeiten ist.

Auffallend ist die Ähnlichkeit der Gleichungen (6.10) und (6.11) mit den im Abschnitt 5. für die Fließtheorie ermittelten Gleichungen (5.8) und (5.9). Es liegt auch nahe, die Funktion $\tilde{F}$ (6.9) als Fließbedingung aufzufassen, da nur im Falle plastischer Deformation $\tilde{F} = 0$ gilt. Ein direkter Übergang zur Fließtheorie existiert aber erst

bei weiteren einschränkenden Bedingungen, wie sie z. B. in [8] vorgegeben werden.
Es sei $\underline{\tilde{e}}$ eine in $\underline{\sigma}$ und $\underline{H}$ lineare Tensorfunktion, mit der Eigenschaft:

$$\frac{\partial \underline{\tilde{e}}}{\partial \underline{\sigma}} = a\,\underline{I}\,, \quad a > 0 \tag{6.12}$$

a ist eine Konstante und $\underline{I}$ der Einheitstensor vierter Stufe ($\underline{I} = \delta_{ij}\,\delta_{kl}$). Dann erlauben (6.4) und (6.9) die Umformung:

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p^{(I)} = \underline{\tilde{e}}\;\dot{z} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\,\frac{\dot{z}}{2a} \tag{6.13}$$

Gleichung (6.13) ist eine Variante des assoziierten Fließgesetzes (4.9).
Das bedeutet, daß für den Fall einer in $\underline{\sigma}$ und $\underline{H}$ quadratischen Fließbedingung (4.8) und Entwicklungsgleichungen der Form (6.6) Fließtheorie und Plastizitätstheorien vom Typ I (z. B. der Spezialfall der endochronischen Plastizitätstheorie nach [8] zusammenfallen. Diese Eigenschaft wird in [13] genutzt, um Verfestigungsansätze der Fließtheorie mit denen aus [8] zu vergleichen.
Für die Erörterung der Fließtheorie mit beliebiger Fließbedingung (4.8) nutzen wir eine Besonderheit der Definitionsgleichung (6.5).
Unter der Annahme, daß die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten das assoziierte Fließgesetz (4.9) nur geringfügig verletzen, kann die aus (6.5) folgende Gleichung für $\dot{z}$ nach den kleinen Störungen entwickelt werden [10]. Das Ergebnis ist:

$$\dot{z} = \frac{1}{g q_1}\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\epsilon}}_p \qquad \text{mit} \tag{6.14}$$

$$q_1 = \sqrt{\frac{1}{g}\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}} \tag{6.15}$$

Mit (6.14) folgt aus (6.3):

$$\dot{\underline{\hat{H}}} = \frac{1}{g q_1}\,\hat{H}'\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\epsilon}}_p \tag{6.16}$$

Damit kann dieses Problem auf den im Abschnitt 5 diskutierten Ansatz (5.5) zurückgeführt werden. Für $\dot{T} = 0$, $\underline{A}_0 = \underline{0}$ und $\underline{A}_\sigma = \underline{0}$ erhält man aus (5.7), (5.8), (6.14) und (6.16):

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p = \frac{1}{V_s}\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\,\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} \tag{6.17}$$

mit

$$V_s = -q_1\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \underline{\hat{H}}} * \underline{\hat{H}}'\right). \tag{6.18}$$

Wir setzen in (6.14) und (6.16) das assoziierte Fließgesetz (4.9) ein und erhalten die Darstellung:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q_1\,\dot{\lambda} \\ \dot{\underline{\hat{H}}} &= \underline{\hat{H}}'q_1\,\dot{\lambda} = \underline{Q}_2\,\dot{\lambda} \quad . \end{aligned} \tag{6.19}$$

Die Gleichung (6.18) kann umgeformt werden in:

$$V_s = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\,q_1 + \frac{\partial F}{\partial \underline{H}} * \underline{Q}_2\right) \tag{6.20}$$

Die Gleichungen (6.19) haben die in [1] postulierte Normalform von Verfestigungsansätzen und (6.17), (6.20) entsprechen der Standardform elastisch-plastischer Deformationsgesetze aus [1].

Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, daß in der Plastizitätstheorie kleiner Deformationen die Entwicklungsgleichungen für innere Variablen den Charakter des Deformationsgesetzes bestimmen. In den Geschwindigkeiten lineare Entwicklungsgleichungen führen auf ebenfalls lineare Beziehungen zwischen den plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten und anderen Geschwindigkeitsgrößen. Als Spezialfälle sind zeitabhängiges und zeitunabhängiges Deformationsverhalten eingeschlossen. Die Standardformulierung elastisch-plastischer Deformationsgesetze nach [1] ist enthalten. Die Normalform der Verfestigungsansätze, wie sie [1] postuliert, kann auf eine spezielle Form von Entwicklungsgleichungen, die linear in den plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten sind, zurückgeführt werden.

LITERATUR

[1] Bergander, H.: Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung. ZAMM 60 (1980), S. 509 – 519.

[2] Lehmann, T.: Some Theoretical Considerations and Experimental Results Concerning Elastic-Plastic-Stress-Strain Relations. Ing. Archiv 52 (1982), S. 391 – 403.

[3] Rice, J. R.: Inelastic Constitutive Relations für Solids: An Internal Variable Theory And Applications To Metal Plasticity. J. Mech. Phys. Solids 19 (1971), S. 433 – 455.

[4] Coleman, B. D., Gurtin, M. E.: Thermodynamics with Internal State Variables. J. Chem. Phys. 47 (1967), S. 597.

[5] Perzyna, P., Wojno, W.: Thermodynamic of a Rate Sensitive Plastic Material. Arch. Mech. 20 (1968), S. 499 – 510.

[6] Valanis, K. C.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part. I. General theory, Arch. Mech. 23 (1971), S. 517.

[7] Valanis, K. C.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part. II. Applicatin to mechanical behaviour of metals. Arch. Mech. 23 (1971), S. 535.

[8] Valanis, K. C.: Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of the endochronic theory. Arch. Mech. 32 (1980), S. 171 – 191.

[9] Truesdell, C., Noll, W.: The nonlinear field theories of mechanics. Vol. III, Springer, Berlin (West) (1972).

[10] Bazant, Z. P.: Endochronic inelasticity and incremental plasticity. Int. J. Solids Structures 14 (1978), S. 691 – 714.

[11] Kratochvil, J.: Meaning of Internal Variables in Plasticity. Lett. Appl. Ing. Sci. 16 (1978), S. 403 – 413.

[12] Kröner, E.: Dislocation: A new Concept in the Continuum Theory of Plasticity. J. Math. and Phys. 42 (1963), S. 27 – 37.

[13] Göhler, W.: Vergleich von Verfestigungsansätzen durch numerische Simulation beliebiger Belastungsvorgänge. Techn. Mech. (1985), S. 66 – 71.

[14] Bruhns, O. T.: Ein Stoffmodell zur Beschreibung inelastischer Deformationen. ZAMM 64 (1984), S. T 115 – T 118.

Anschrift des Verfassers:

Dr. W. Göhler
Technische Universität Dresden
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
8027 Dresden, Mommsenstr. 13