

# Identifikation dynamischer Systeme - vergleichende Betrachtungen zu Zeit- und Frequenz-Bereichsverfahren

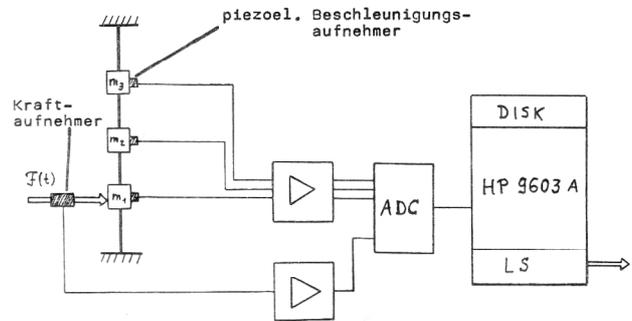
Bodo Heimann, Wolfgang Tischer, Ladislav Pust, Jan Vesely

## 1. Parameteridentifikation im Zeitbereich bei transients Erregung

### 1.1. Versuchsaufbau und Meßwerterfassung

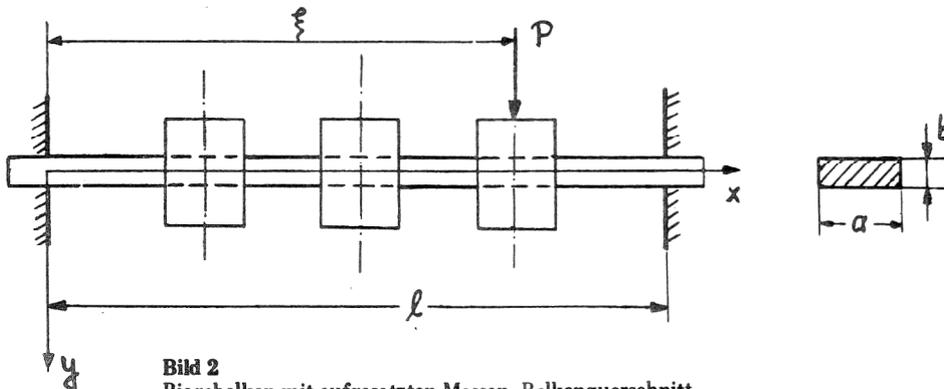
Der Versuchsaufbau sowie die Meßwerterfassung sind schematisch in Bild 1 dargestellt.

Als Versuchsobjekt diente ein beidseitig fest eingespannter elastischer Balken mit einem Querschnitt entsprechend Bild 2, auf dem 3 Zusatzmassen angebracht wurden. Wichtige Kenngrößen des Modells sind in Tabelle 1 zusammengefaßt. Das System wurde durch einen Kraftsprung (wahlweise in Masse  $m_1$  oder Masse  $m_2$ ) in horizontaler Richtung zu Schwingungen angeregt. Dazu wurde der Balken zunächst in  $y$ -Richtung mit einem dünnen Draht vorgespannt. Beim Durchtrennen des Drahtes fällt die Vorspannkraft sprunghaft auf Null, gleichzeitig wird ein Triggersignal erzeugt, welches den Beginn der Digitalisierung der Meßwerte durch den Rechner auslöst. Die Kraftmessung erfolgt durch eine Kraftmeßdose mit einem Frequenzgang von 0 – 20 kHz, die speziell für Sprungsignale geeignet ist. Als Antwortsignal wurden die Beschleunigungen an den drei Einzelmassen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  durch piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer

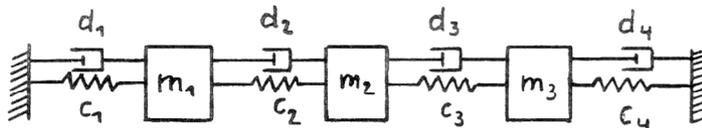


**Bild 1**  
Meßaufbau

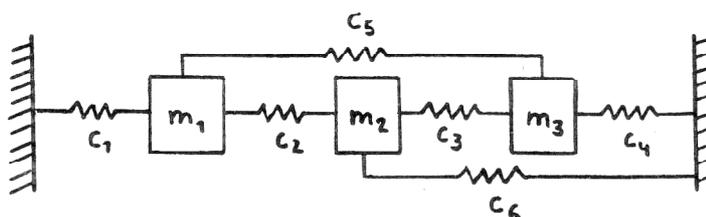
(16 Hz – 20 kHz) gemessen. Die Massen der Aufnehmer sind in Tabelle 1 enthalten. Die Meßsignale werden über Meßverstärker in den A/D-Konverter des Auswertrechners (Measurement and Control System HP 9603 A) geleitet. Dort erfolgte die Speicherung der Daten zunächst auf Platten.



**Bild 2**  
Biegebalken mit aufgesetzten Massen, Balkenquerschnitt



**Bild 2 a**  
Modell I



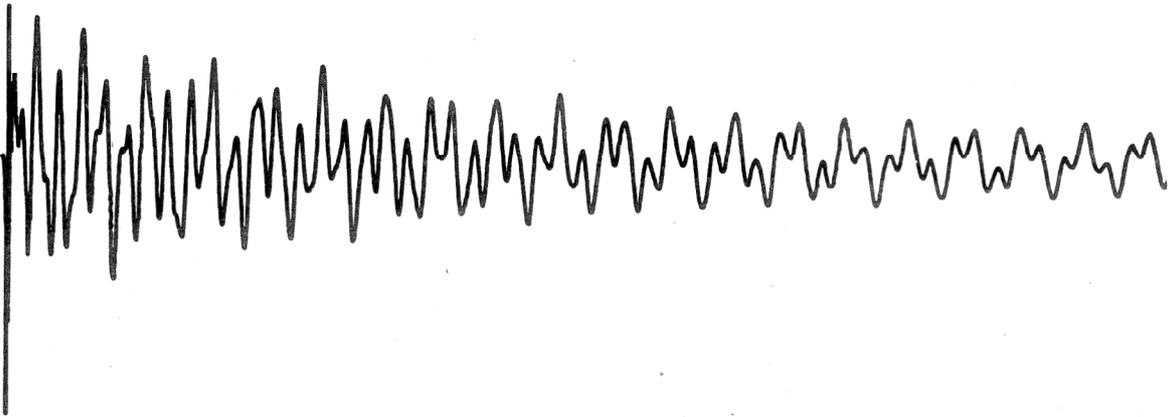
**Bild 2 b**  
Modell II (die Dämpfungselemente sind hier nicht eingezeichnet)

**Tabelle 1**  
Kenngrößen des Modells

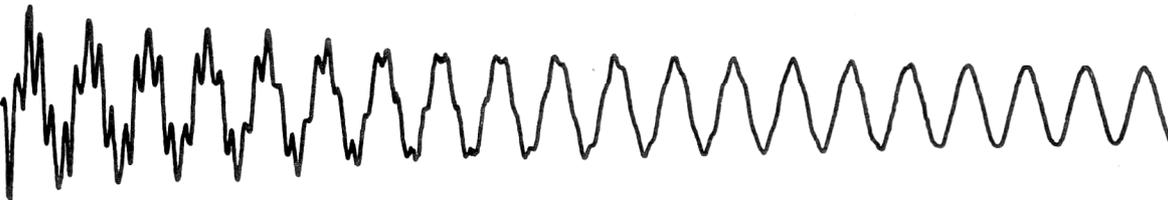
Element	Masse
Balken	146,1 g
Einzelmasse	167 g
Beschleunigungs- aufnehmer	1 g
Kraftaufnehmer	15,6 g

### 1.2. Meßergebnisse, Frequenzanalysen

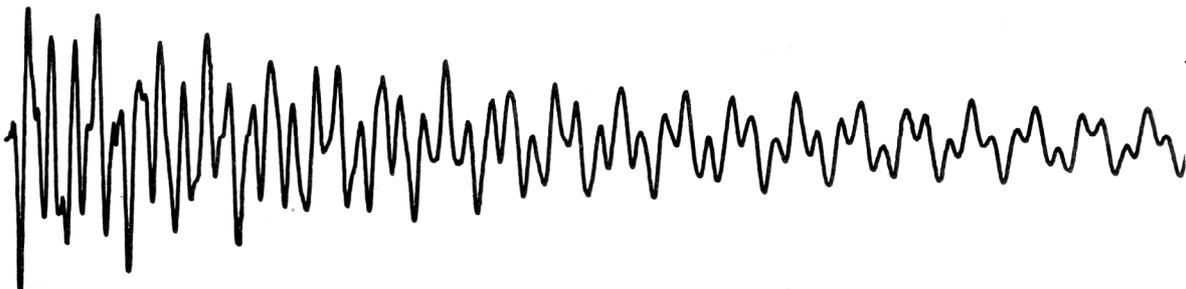
Auf den Bildern 3 bis 6 sind die Meßergebnisse für den Versuch mit der Bezeichnung NDR 41 grafisch dargestellt. Der Kraftsprung erfolgte von 4,8 N auf Null, wobei das Nullniveau nicht exakt erreicht wird, sondern eine Abweichung von  $-0.625$  N besteht. Entsprechend den theoretischen Abschätzungen am Modell (Abschnitt 1.3.) wurden die analogen Meßsignale mit einer Frequenz von  $f_{\text{abt.}} = 4$  kHz abgetastet. Auf den Grafiken sind jeweils 2040 Meßpunkte dargestellt. Für das Abtastintervall und die Gesamtmeßzeit erhält man entsprechend



**Bild 3**  
Beschleunigung auf  $m_1$

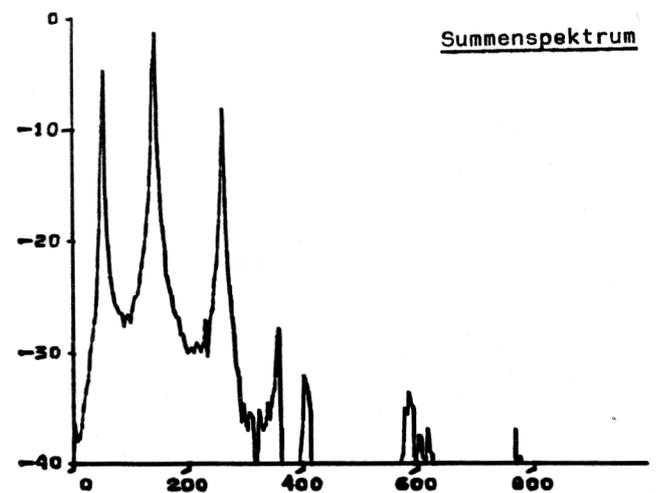
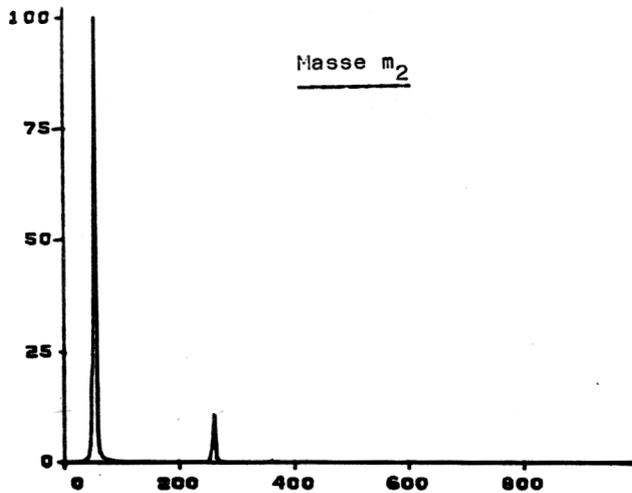
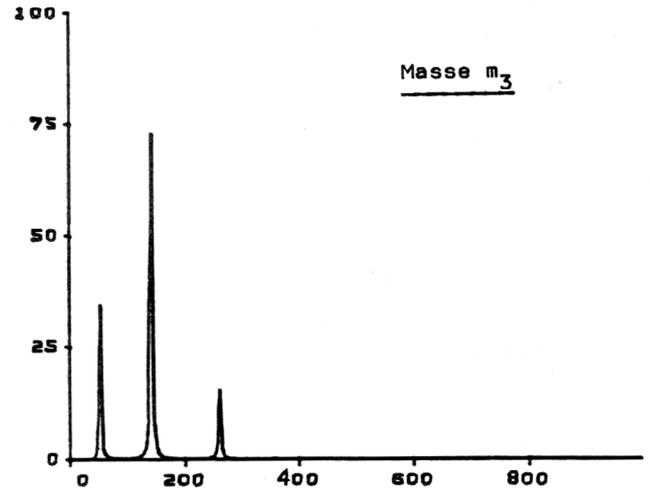
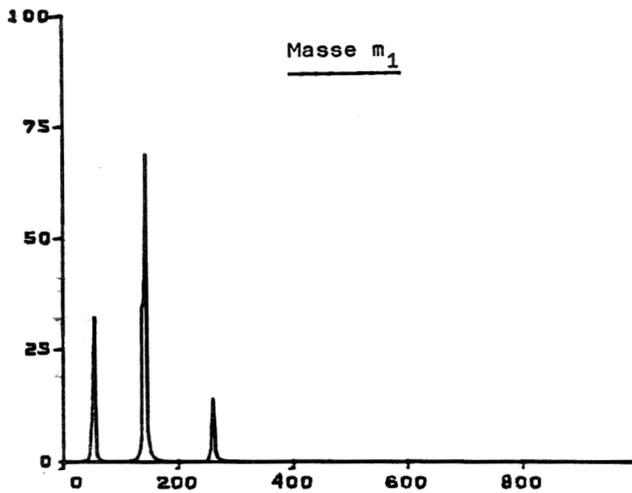


**Bild 4**  
Beschleunigung auf  $m_2$



**Bild 5**  
Beschleunigung auf  $m_3$

**Bild 6**  
Kraftverlauf (Erregung der Masse  $m_1$ )



**Bild 7**  
Amplitudenspektren

$$h = \frac{1}{f_{\text{abt.}}} = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

und

$$T = N \cdot h = 0.51 \text{ s.}$$

Zur Parameteridentifikation wurde der Versuch NDR 41 (Erregerkraft auf Masse  $m_1$ ) verwendet.

Zur Erstausswertung und Kontrolle der Meßdaten wurden die Amplitudenspektren gebildet. Die Spektren des Versuches NDR 41 sind in den Bildern 7 und 8 dargestellt.

**Bild 8**  
Amplitudenspektren der Beschleunigungs-Zeit-Verläufe

Bild 8 zeigt außerdem die Summe der drei Teilspektren im logarithmischen Maßstab. Daraus sind deutlich 3 dominierende Eigenfrequenzen bei

$$f_1 = 54,7 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 144,5 \text{ Hz}$$

und  $f_3 = 261,7 \text{ Hz}$  zu erkennen.

Die Spektren bestätigen die Möglichkeit, das untersuchte Objekt als lineares mechanisches Schwingungssystem mit 3 Freiheitsgraden zu modellieren, worauf im folgenden näher eingegangen wird.

Zur Identifikation im Zeitbereich war die gleichzeitige Messung der 3 Beschleunigungsverläufe und der Erregerkraft notwendig. Diese Forderung wurde im Rahmen der erreichbaren Genauigkeit realisiert.

### 1.3. Modell und Bewegungsgleichungen

Der Biegebalken mit den 3 aufgesetzten Massen wurde als lineares Schwingungssystem mit dem Freiheitsgrad 3 modelliert. Als verallgemeinerte Koordinaten der Bewegungsgleichungen werden die Absolutauslenkungen der 3 Einzelmassen in y-Richtung definiert, die mit  $y_1, y_2, y_3$  bezeichnet werden. Setzt man für die Bewegung der Einzelmassen jeweils geschwindigkeitsproportionale viskose Dämpfung voraus, so gelten bei kleinen Auslenkungen die linearen Bewegungsgleichungen

$$\underline{M}\ddot{\vec{y}} + \underline{D}\dot{\vec{y}} + \underline{C}\vec{y} = \vec{F}(t) \quad (1.1)$$

mit der Massenmatrix

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_3 \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

dem Vektor der verallgemeinerten Koordinaten  $\vec{y}$  sowie dem Erregervektor  $\vec{F}(t)$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}; \quad \vec{F}_1(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder } \vec{F}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

und den i. allg. vollbesetzten Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{31} & \dots & d_{33} \end{bmatrix}; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{31} & \dots & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Für den Test des Identifikationsverfahrens werden zwei Ersatzmodelle des in Bild 1 dargestellten Systems betrachtet (vgl. Bild 2 a und Bild 2 b). Die Ersatzmodelle stellen lineare Schwingerketten dar, wobei die schwingenden Massen auf unterschiedliche Weise durch Dämpfungs- und Federelemente miteinander verknüpft sind. Die Bewegungsgleichungen für das Modell I lauten in der Form (1.1):

$$\underline{M}_I \ddot{\vec{y}} + \underline{D}_I \dot{\vec{y}} + \underline{C}_I \vec{y} = \vec{F}_I(t)$$

$$\underline{M}_I = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{C}_I = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}$$

mit

$$\underline{D}_I = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 \end{bmatrix}; \quad \vec{F}_I(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Für das Modell II:

mit

$$\underline{M}_I = \underline{M}_{II}; \quad \vec{F}_I = \vec{F}_{II}$$

$$\underline{C}_{II} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & -c_5 \\ -c_2 & c_2 + c_3 + c_6 & -c_3 \\ -c_5 & -c_3 & c_3 + c_4 + c_5 \end{bmatrix};$$

$$\underline{D}_{II} \text{ analog } \underline{C}_{II}. \quad (1.6)$$

### E I G E N M O D E S

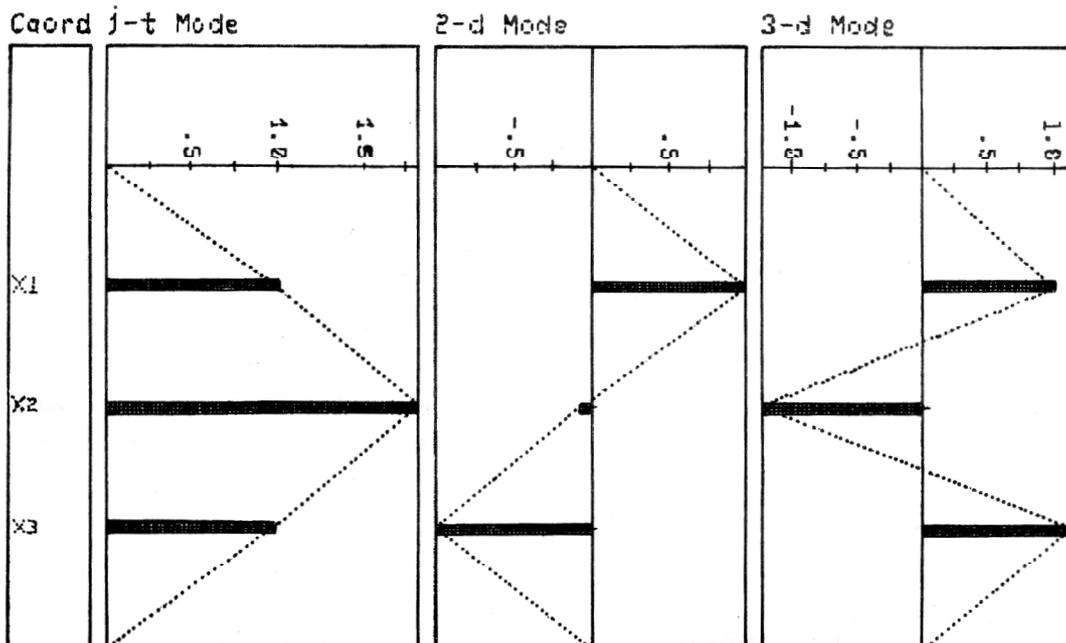


Bild 9  
Eigenformen nach Gleichung (2.11)

Außerdem kann die statische Steifigkeitsmatrix eines Systems entsprechend Bild 2 berechnet werden. Dazu besetzt man die Einzelmassen durch die an den Stellen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  angreifenden Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ . Nach dem Prinzip der linearen Überlagerung der Wirkungen der drei Einzelkräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  erhält man für die Durchbiegungen

$$\begin{bmatrix} 27 & 32 & 13 \\ 32 & 64 & 32 \\ 13 & 32 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{64 \cdot 192 EI}{l^3} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Daraus folgt die statische Steifigkeitsmatrix zu

$$\underline{C}_{\text{stat}} = \frac{64 \cdot 192 EI}{32 \cdot 7 l^3} \begin{bmatrix} 22 & -14 & 6 \\ -14 & 35 & -14 \\ 6 & -14 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 2.11 & -1.34 & 0.58 \\ -1.34 & 1.68 & -1.34 \\ 0.58 & -1.34 & 2.11 \end{bmatrix} 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (1.8)$$

Die Eigenfrequenzen, berechnet aus dem Eigenwertproblem

$$\det(\omega^2 \underline{M} - \underline{C}_{\text{stat}}) = 0, \quad (1.9)$$

haben die Werte

$$\begin{aligned} f_1 &= 57.7 \text{ Hz} \\ f_2 &= 145.1 \text{ Hz} \\ f_3 &= 255.7 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Sie befinden sich in guter Übereinstimmung mit den aus den Amplitudenspektren ermittelten Werten.

Die mit (1.9) berechnete Modalmatrix lautet:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1.0000\text{E}+00 & 1.0000\text{E}+00 & 1.0000\text{E}+00 \\ 1.8205\text{E}+00 & -5.6908\text{E}-02 & -1.2268\text{E}+00 \\ 9.8379\text{E}-01 & -1.0094\text{E}+00 & 1.1556\text{E}+00 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

die Eigenformen sind auf Bild 9 dargestellt.

#### 1.4. Parameteridentifikation

Für die weiteren Betrachtungen kann vorausgesetzt werden, daß die Massenmatrix  $\underline{M}$  vollständig bekannt ist. Das **Ziel der Identifikation** besteht nun in der Bestimmung der Parametermatrizen  $\underline{D}$  und  $\underline{C}$  aus den Meßdaten. Dazu fand die Methode der kleinsten Quadrate (least square method) Anwendung. Zusammenfassend können folgende Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Methode formuliert werden [1], [2]:

- Zeitdiskrete Abtastung der Meßsignale (Vektor der verallgemeinerten Koordinaten und Erregervektoren) in  $N$  äquidistanten Zeitpunkten  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).
- Messung der Zeitverläufe sämtlicher Ausgangs- und Eingangssignale am realen Objekt (vollständige Beobachtung).
- Zulässig sind Meßrauschen und Eingangsruschen, die mittelwertfreie, nicht autokorrelierte, stationäre und

ergodische Zufallsvektorprozesse (Gaußsche Prozesse) darstellen sollen.

- Linearität der Bewegungsgleichungen bez. der zu identifizierenden Parameter (d. h., die Bewegungsgleichungen können i. allg. nichtlinear in den Koordinaten sein).

Die Annahme, daß die Massenmatrix bekannt ist, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Mit der Einführung der Matrizen und Vektoren

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} \underline{D}^T \\ \underline{C}^T \end{bmatrix}; \quad \underline{Y}_N = \begin{bmatrix} \ddot{\vec{y}}_1^T \\ \vdots \\ \ddot{\vec{y}}_N^T \end{bmatrix}; \quad \underline{M}^T = \begin{bmatrix} \vec{F}_1^T \\ \vdots \\ \vec{F}_N^T \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \vec{y}_k &= \vec{y}(k \cdot h) \\ \vec{F}_k &= \vec{F}(k \cdot h) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\underline{X}_N = \begin{bmatrix} -\dot{\vec{y}}_1^T & | & -\dot{\vec{y}}_1^T \\ \vdots & & \vdots \\ -\dot{\vec{y}}_N^T & | & -\dot{\vec{y}}_N^T \end{bmatrix}; \quad \underline{\epsilon}_N = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_N^T \end{bmatrix} \quad \text{-- Gleichungsfehler}$$

kann (1.1) in der Form

$$\underline{Y}_N = \underline{X}_N \underline{\Theta} + \underline{\epsilon}_N \quad (1.13)$$

geschrieben werden, welche bereits die typische LS-Form darstellt. Die in (1.13) auftretenden Größen  $\vec{y}_k$ ,  $\dot{\vec{y}}_k$ ,  $\ddot{\vec{y}}_k$  und  $\vec{F}_k$  sind Meßwertvektoren. Auf (1.13) kann unmittelbar die LS-Methode angewendet werden. Die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate

$$s = \text{tr}[(\underline{Y}_N - \underline{X}_N \underline{\Theta})^T (\underline{Y}_N - \underline{X}_N \underline{\Theta})] = \text{tr}[\underline{\epsilon}_N^T \underline{\epsilon}_N] \quad (1.14)$$

führt auf die explizite Schätzformel

$$\underline{\Theta}_N = (\underline{X}_N^T \underline{X}_N)^{-1} \underline{X}_N^T \underline{Y}_N \quad (1.15)$$

unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit der sogenannten Normalmatrix (Informationsmatrix)  $\underline{X}_N^T \underline{X}_N$  (Problem der Identifizierbarkeit). Unter bestimmten Bedingungen können Konvergenzeigenschaften wie Erwartungstreue, Konsistenz bzw. Konvergenz im quadratischen Mittel gezeigt werden. Unter realen Meßbedingungen sind diese Voraussetzungen meist nicht erfüllt, bei den geschätzten Parametern tritt ein systematischer Fehler (Bias) auf, der mit wachsendem  $N$  nicht verschwindet und u. a. von der Stärke der Meß- und Eingangsruschen abhängt.

In manchen Fällen müssen nicht die gesamten Matrizen, sondern nur einzelne Elemente von  $\underline{M}$ ,  $\underline{D}$  oder  $\underline{C}$  bestimmt werden. Diese werden dann in einem sogenannten Parametervektor zusammengefaßt und die Gleichungen in eine Form entsprechend (1.13) gebracht [3], [4]. So sind in Gleichung (1.6) nur jeweils 6 Dämpfungs- und Steifigkeitsparameter zu identifizieren. Faßt man diese im Parametervektor

$$\vec{\Theta}^T = [c_1 \cdots c_6 \quad d_1 \cdots d_6] \quad (1.16)$$

zusammen, so kann (1.6) in der Form

$$\underline{M} \ddot{\vec{y}}_k - \vec{F}_k =$$

$$-\begin{bmatrix} x_1 & x_1-x_2 & 0 & \dots & 0 & \dot{x}_1-\dot{x}_3 & 0 \\ 0 & & x_2-x_3 & \dots & 0 & 0 & \dot{x}_2 \\ 0 & 0 & x_3-x_2 & \dots & \dot{x}_3 & \dot{x}_3-\dot{x}_1 & 0 \end{bmatrix} \vec{\Theta} \rightarrow$$

$$\vec{\varphi}_k = \underline{\psi}_k^T \cdot \vec{\Theta} \quad (1.17)$$

geschrieben werden und ist damit in (1.13) überführbar, wenn man die Matrizen  $\underline{Y}_N$  und  $\underline{X}_N$  wie folgt definiert:

$$\underline{Y}_N = \begin{bmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \vec{\varphi}_N \end{bmatrix}; \underline{X}_N = \begin{bmatrix} \underline{\psi}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\psi}_N^T \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

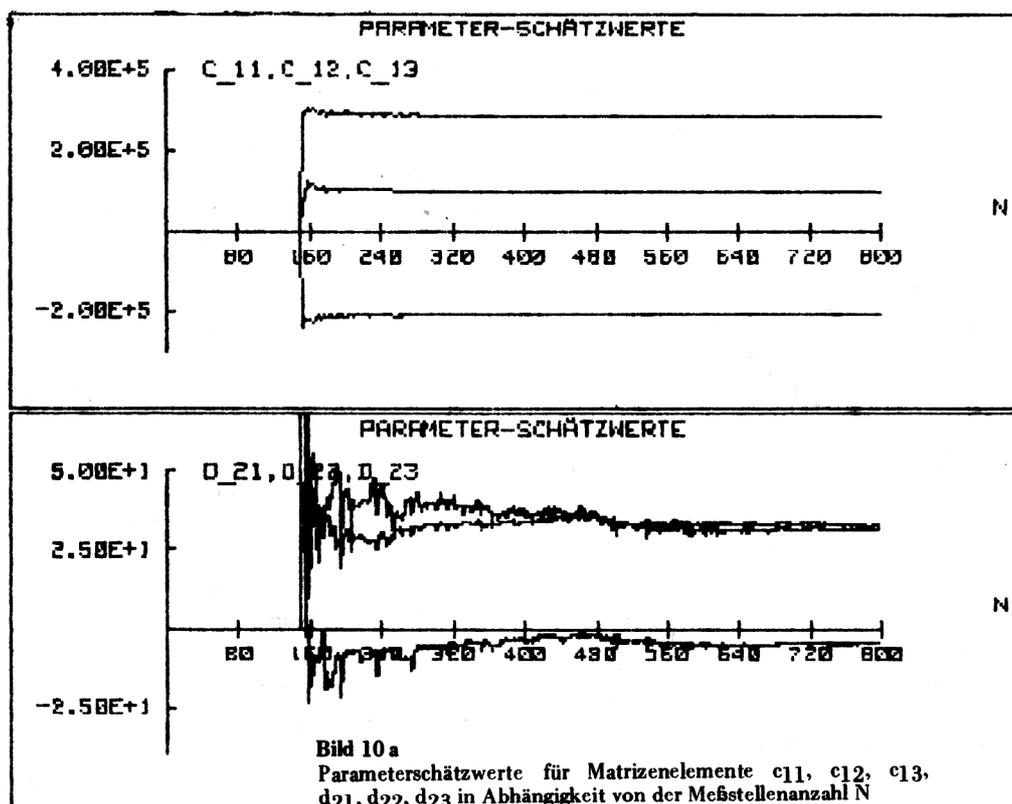
**Tabelle 2**  
**Resultate**

**Identifizierte Parameter:**

	I			II		
Steifigkeitsmatrix: in $\left[\frac{N}{m}\right]$	2.8760E+05	-2.0990E+05	1.0149E+05	2.7810E+05	-1.8890E+05	9.3480E+04
	-1.7260E+05	2.2440E+05	-1.6210E+05	-1.8890E+05	2.4020E+05	-1.8220E+05
	1.0850E+05	-2.0640E+05	2.8240E+05	9.3480E+04	-1.8220E+05	2.7150E+05
Dämpfungsmatrix: in $\left[\frac{Ns}{m}\right]$	-5.8260E+00	3.3230E+00	-2.6680E+01	2.5390E+00	-8.5160E+00	0.0000E+00
	-4.9330E+00	3.1380E+01	3.2610E+01	-8.5160E+00	7.3970E+00	2.1190E+00
	-1.9870E+00	-7.1880E+01	-1.5810E+01	0.0000E+00	2.1190E+00	2.8380E+00
Eigenfrequenzen:	$f_1 = 60.21 \text{ Hz}$ $f_2 = 145.99 \text{ Hz}$ $f_3 = 266.25 \text{ Hz}$			$f_1 = 64.18 \text{ Hz}$ $f_2 = 146.34 \text{ Hz}$ $f_3 = 262.22 \text{ Hz}$		
Dämpfungsmaße:	$D_1 = 0.0112$ $D_2 = 0.0074$ $D_3 = 0.00804$			$D_1 = 0.00591$ $D_2 = 0.00798$ $D_3 = 0.0125$		
Modalmatrix:	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	wie I		
	1.8575E+00	-4.8919E-02	-1.1174E+00			
	9.3372E-01	-1.0514E+00	1.0721E+00			

### 1.5. Resultate

In Tabelle 2, Spalte I sind die Ergebnisse der Parameteridentifikation für das System (1.1.) zusammengestellt. Dabei wurden die vollen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen (insgesamt 18 Parameter) identifiziert. Ausgewählte Parameterverläufe in Abhängigkeit von der Meßstellenanzahl N sind in Bild 10 dargestellt. Mit zunehmendem N konvergieren die Parameterschätzwerte gegen konstante Werte. Aufgrund der Schätzfehler erhält man i. allg. nichtsymmetrische Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen. Bild 11 zeigt die Eigenformen des symmetrischen Teils der Steifigkeitsmatrix. Die zugehörige Modalmatrix ist ebenfalls in Tabelle 2 enthalten und stimmt



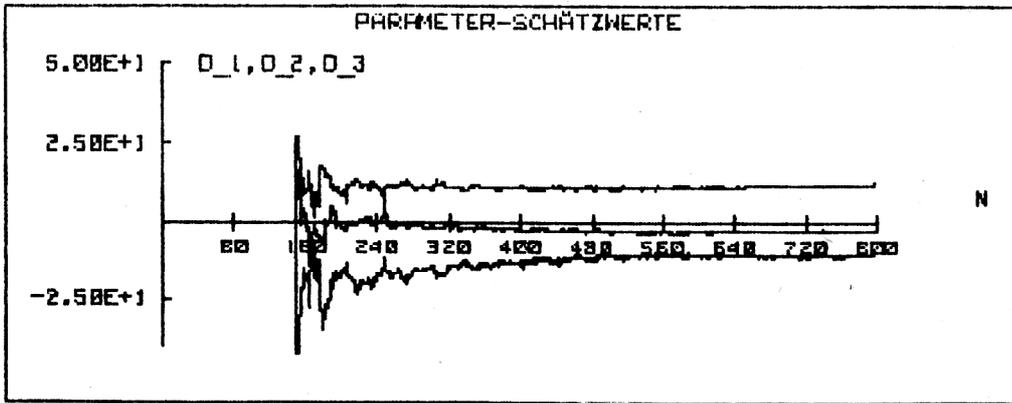


Bild 10 b  
Parameterschätzwerte für die Dämpfungsparameter  $d_1, d_2, d_3$ ,  
in Abhängigkeit von der Meßstellenanzahl N (Tabelle 2, II)

E I G E N M O D E S

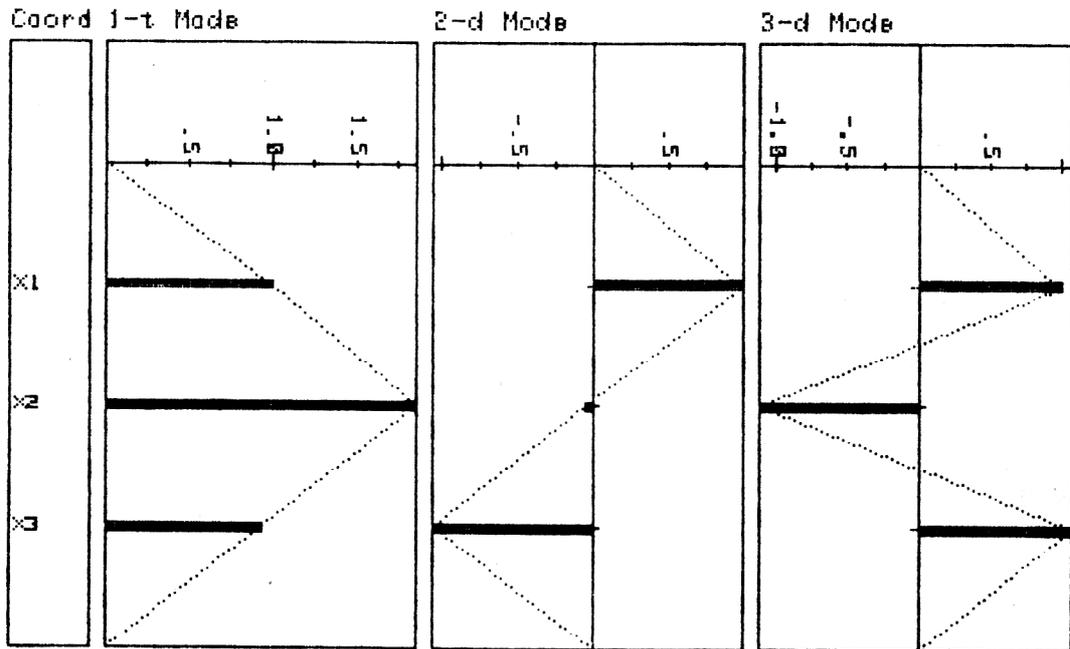
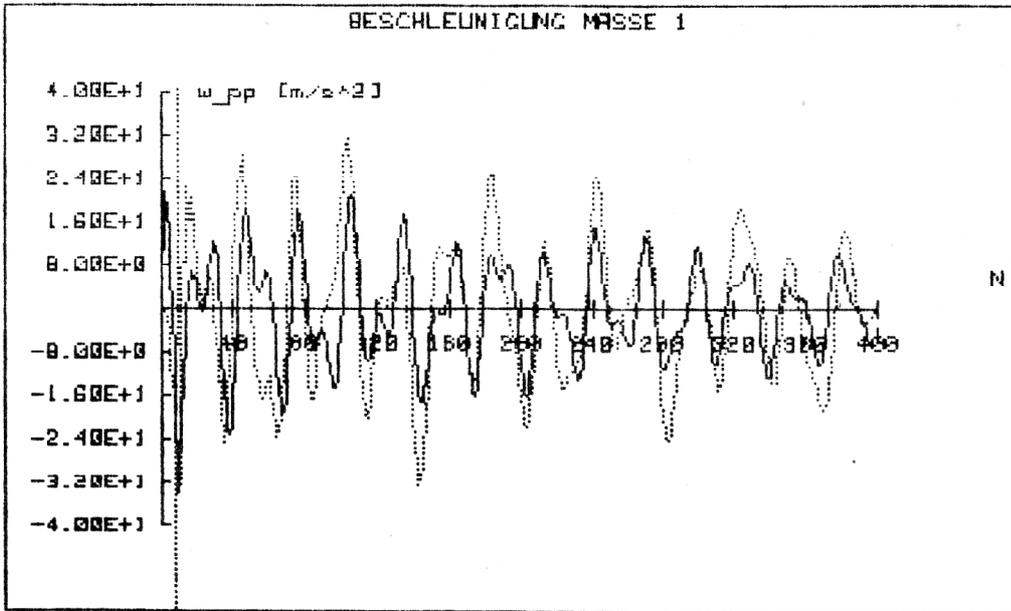


Bild 11  
Eigenform des symmetrischen Teils der geschätzten Steifigkeits-  
matrix Tabelle 2, I)

Tabelle 3  
Meßergebnisse

Resonanzen		1		2		3	
Eigenfrequenzen: f	D	f	D	f	D	f	D
Erregung an der Stelle	1	56,11	0,00264	148,60	0,00451	264,85	0,00595
	2	56,04	0,00319	—	—	265,71	0,00716
	3	55,91	0,00284	148,65	0,00446	265,55	0,00524
Resultierende Eigenfrequenz		$f_1 = 56,02 \text{ Hz}$		$f_2 = 148,62 \text{ Hz}$		$f_3 = 265,37 \text{ Hz}$	
Dämpfungsmaß		$D_1 = 0,00289$		$D_2 = 0,00448$		$D_3 = 0,00611$	
Schwingungsform		1 : 1,85 : 1,13		1 : 0,04 : -1,02		1 : -1,35 : 1,05	



**Bild 12**  
Vergleich der Beschleunigungsverläufe der Masse  $m_1$   
— berechnet  
..... gemessen

gut mit (1.11.) sowie der experimentell ermittelten aus Tabelle 3 überein. Die aus den geschätzten Systemmatrizen gebildete Zustandsmatrix besitzt einfache, jeweils komplex konjugierte Eigenwerte mit negativen Realteilen, d. h., das lineare System ist asymptotisch stabil. Die Eigenfrequenzen weichen bis zu 7 % von den aus den Resonanzkurvenmessungen ermittelten Werten (vgl. Abschnitt 3) ab, größere Abweichungen treten bei den Dämpfungsmaßen auf. Eine Ausnahme bildet die modale Dämpfung der 1. Eigenform. Die Ursache hierfür ist darin zu sehen, daß durch eine Sprungerregung die höheren Eigenformen nach dem Kraftsprung zunächst stärker angeregt werden. Hinzu kommt eine begrenzte Anzahl von Meßwerten der Sprungantwort des Systems. In diesem Fall approximiert der Parameterschätzer im Zeitbereich „zuerst“ die höheren Eigenformen.

Dieser Effekt spiegelt sich auch in dem in Bild 12 dargestellten Vergleich des gemessenen Beschleunigungsverlaufes der Masse  $m_1$  und des mit den geschätzten Systemmatrizen sowie der gemessenen Erregerkraft berechneten Beschleunigungsverlaufes wider.

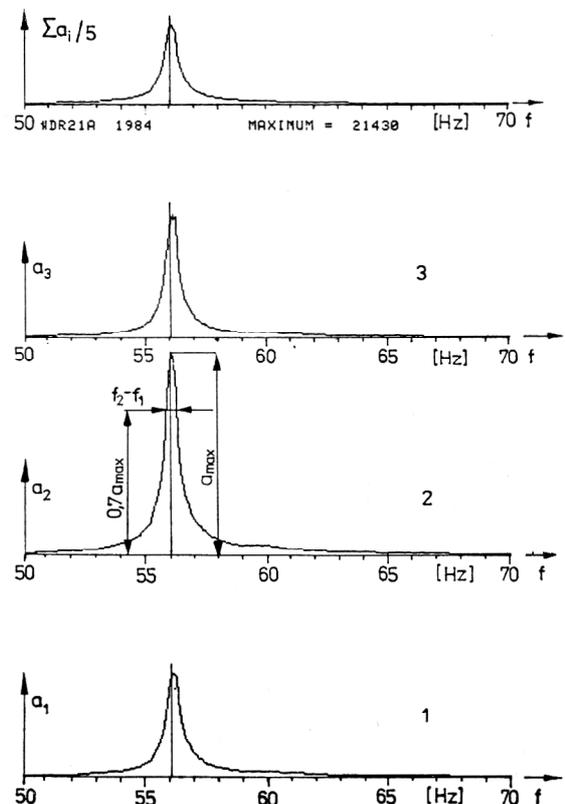
Eine verbesserte Schätzung der modalen Dämpfung der 1. Eigenform erhält man durch einen Ansatz nach Gleichung (1.5), indem man die bereits hinreichend genau geschätzten Steifigkeitsparameter als bekannt voraussetzt und den Parametervektor  $\Theta^T = [d_1 \dots d_4]$  bestimmt, s. Bild 13. Der Wert für  $D_1$  ist in Tabelle 2 unter Spalte II enthalten.

## 2. Systemparameterbestimmung bei harmonischer Erregung

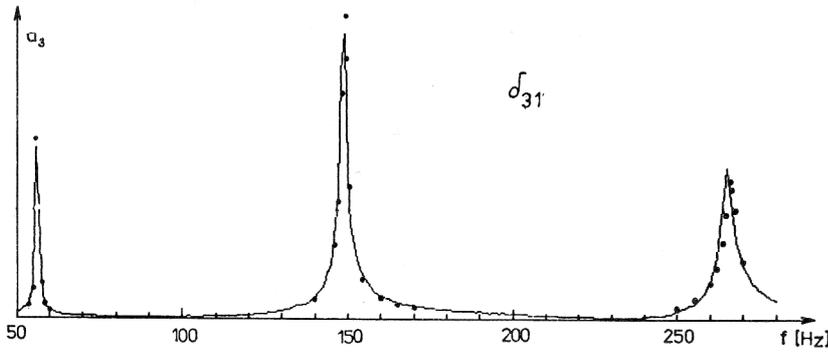
Der Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen war das in den Abschnitten 1.1. und 1.3. beschriebene physikalisch-mathematische Modell. An den diskreten Massenpunkten wirkte die harmonische Erregerkraft  $F_0 e^{i\omega t}$  mit veränderlicher Frequenz  $\omega = 2\pi f$  im Be-

reich  $f = 40$  bis  $280$  Hz. Diese mittels eines programmierbaren Generators UT CSAV [5] gesteuerte Erregerfrequenz wurde mit einem Schritt von  $1$  Hz, im Resonanzbereich mit einem beträchtlich kleinerem Schritt von  $0,01$  Hz variiert.

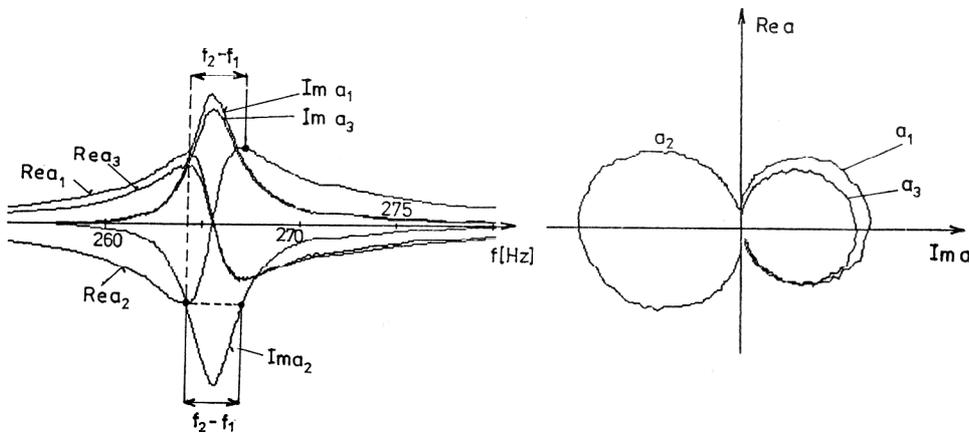
Die Systemantwortsignale wurden mit Hilfe von Beschleunigungsgebern Brüel & Kjaer des Typs 8307 gemessen, nach der Signalverstärkung digitalisiert und im Auswertsystem Measuring and Control System HP 9603 A verarbeitet. Das Schema des Meßsystems sowie das Vor-



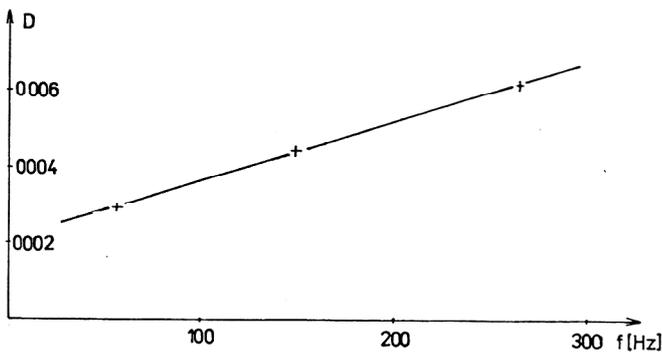
**Bild 13**  
Resonanzamplituden



**Bild 14**  
Resonanzamplituden



**Bild 15**  
Komplexe Antwortsignale



**Bild 16**  
Dämpfung als Funktion der Eigenfrequenz

verarbeitungsmeßverfahren ist in [6] beschrieben. In den Rechner wurden während des Meßvorganges direkt komplexe Resonanzkurven eingegeben, d. h. Amplituden und Phasenwinkel als Funktion der Erregerfrequenz. Als Beispiel sind in Bild 13 die in den Punkten 1, 2, 3 gemessenen Resonanzamplituden bei der Erregung an der Stelle 3 im Frequenzbereich von 50 bis 70 Hz angeführt. Aus Bild 14 ist der Resonanzkurvenverlauf der Stelle 3, der durch Erregung an der Stelle 1 für den gesamten Frequenzbereich von 50 bis 280 Hz ermittelt wurde, ersichtlich. Die gesamte Resonanzkurvenschar wurde in eine Matrix dynamischer Nachgiebigkeiten  $\delta$  mit den Elementen  $\delta_{ij}(\omega) = \frac{a_i(\omega)}{F_j}$  geordnet:

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11}(\omega) & \delta_{12}(\omega) & \delta_{13}(\omega) \\ \delta_{21}(\omega) & \delta_{22}(\omega) & \delta_{23}(\omega) \\ \delta_{31}(\omega) & \delta_{32}(\omega) & \delta_{33}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Theoretisch kann dann nach Inversion die Matrix der dynamischen Steifigkeiten

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} c_{11} - m_{11}\omega^2 + i\omega b_{11} & c_{12} - m_{12}\omega^2 + i\omega b_{12} & c_{13} - m_{13}\omega^2 + i\omega b_{13} \\ c_{21} - m_{21}\omega^2 + i\omega b_{21} & c_{22} - m_{22}\omega^2 + i\omega b_{22} & c_{23} - m_{23}\omega^2 + i\omega b_{23} \\ c_{31} - m_{31}\omega^2 + i\omega b_{31} & c_{32} - m_{32}\omega^2 + i\omega b_{32} & c_{33} - m_{33}\omega^2 + i\omega b_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ermittelt werden, aus deren Elementen für einige Frequenzen  $\omega$  die gesuchten Werte der Steifigkeit, Dämpfung und Masse  $c_{rs}$ ,  $b_{rs}$ ,  $m_{rs}$  bestimmt werden können. Das auf Matrizeninversion beruhende Verfahren führte zu nicht hinreichend genauen Resultaten.

Grundsätzlich bessere Resultate ergab die Rechnerverarbeitung der Resonanzkurven mit Hilfe der statistischen Vektorauswertung von Auslenkungen bzw. Beschleunigungen in den Punkten 1, 2 bzw. 3. Die grundlegenden Methoden zur Bestimmung der Eigenfrequenzen sind in [6] angeführt. Da es sich in unserem Fall um isolierte, gegenseitig voneinander genügend entfernte Resonanzen handelt, war es möglich, mit guter Genauigkeit Eigenfrequenzen direkt aus den Resonanzkurven zu bestimmen.

Dämpfungskoeffizienten bzw. das Dämpfungsmaß  $D$  wurden ebenfalls auf mehrere Arten bestimmt. Das Dämpfungsmaß wurde aus der in der Höhe von  $0,7 a_{max}$  gemessenen Breite des Resonanzgebietes (vgl. Bild 13) nach der Formel

$$2D = \frac{f_2 - f_1}{f_{\text{mittel}}}, \text{ wo } f_{\text{mittel}} = \frac{f_2 + f_1}{2} \text{ ist,}$$

berechnet als auch aus der Breite des Resonanzgebietes des Imaginärteiles  $\text{Im } a$  der komplexen Antwortsignale und weiter aus der Minimum-Maximum-Resonanzkurvenentfernung des Realteils  $\text{Re } a$  der Antwortsignale.

Einige Beispiele dieser Kurven für das dritte Resonanzgebiet sind aus Bild 15 ersichtlich.

Die Resultate einer solchen Verarbeitung von gemessenen Resonanzkurven sind zusammengefaßt in der Tabelle 3 angegeben. Zuerst sind die an einzelnen Stellen 1, 2, 3 ermittelten Werte für die erste, zweite und dritte

Resonanz angeführt\*). Aus diesen Werten wurden dann die resultierenden mittleren Eigenfrequenzen und das Dämpfungsmaß berechnet. Die letzte Zeile enthält Informationen über die Schwingungsform, die aus dem Verhältnis der Resonanzamplituden hervorgeht.

Aus der Tabelle 3 ist weiter zu ersehen, daß das Dämpfungsmaß proportional zur wachsenden Eigenfrequenz ist (vgl. Bild 16).

Zur Eigenwertbestimmung wurde auch die von O. Danek und J. Kozanek ausgearbeitete Methode der Glättung angewendet. Diese Methode beruht auf einer geeigneten Kurvenanpassung durch die im Kennedy-Panc-Diagramm (Ortskurve) aufgetragenen Meßpunkte und gibt komplexe Eigenwerte des identifizierten Systems an.

In Bild 17 ist der Resonanzkurvenverlauf zu sehen, der an der Masse 2 bei der dritten Resonanz im Frequenzbereich 264 bis 267 Hz mit einer Schrittweite von 0.1 Hz gemessen wurde. Links ist die Amplituden-Frequenzkurve aufgetragen, rechts die gemessenen Punkte im Kennedy-Panc-Diagramm. Die fünfte Iteration des Auswertungsverfahrens ist in Bild 18 angedeutet.

In der Tabelle 4 sind die für den gewählten Ausgangswert  $f = 266,4$  Hz iterativ gewonnenen Eigenfrequenzen und das Dämpfungsmaß angeführt.

Es ist offensichtlich, daß diese Werte schon nach dem dritten iterativen Schritt im gegebenen Genauigkeitsbereich liegen. Tabelle 5 enthält die durch die Glättungsmethode bestimmten Eigenfrequenzen und das Dämpfungsmaß.

Vergleicht man die Resultate beider Methoden, so ist eine gute Übereinstimmung bei der Eigenwertbestimmung zu sehen; die Differenz ist kleiner als 0,1 %. Das Dämpfungsmaß weist etwas größere Differenzen von

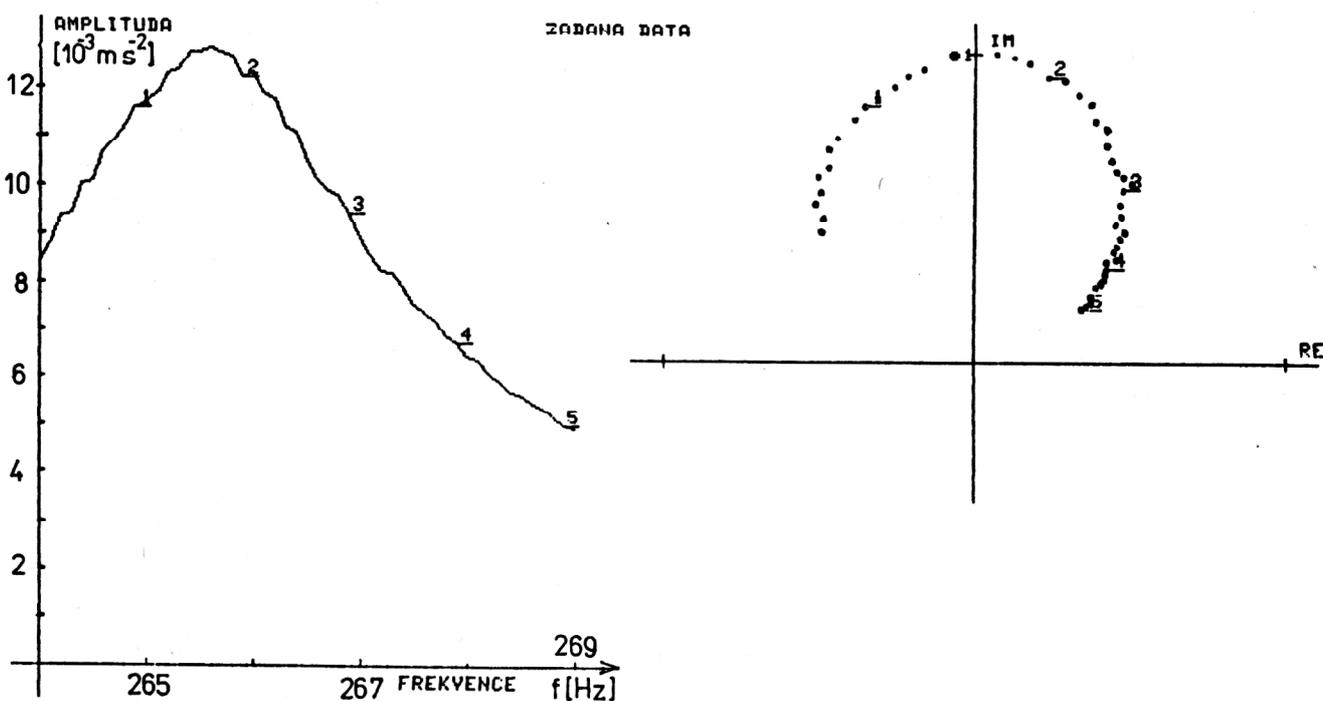


Bild 17  
Resonanzgebiet

\*) An der Stelle 2 bei der zweiten Resonanz wurde kein ausgeprägter Resonanzgipfel gemessen, denn die betreffende Eigenform besitzt an dieser Stelle den Knotenpunkt.

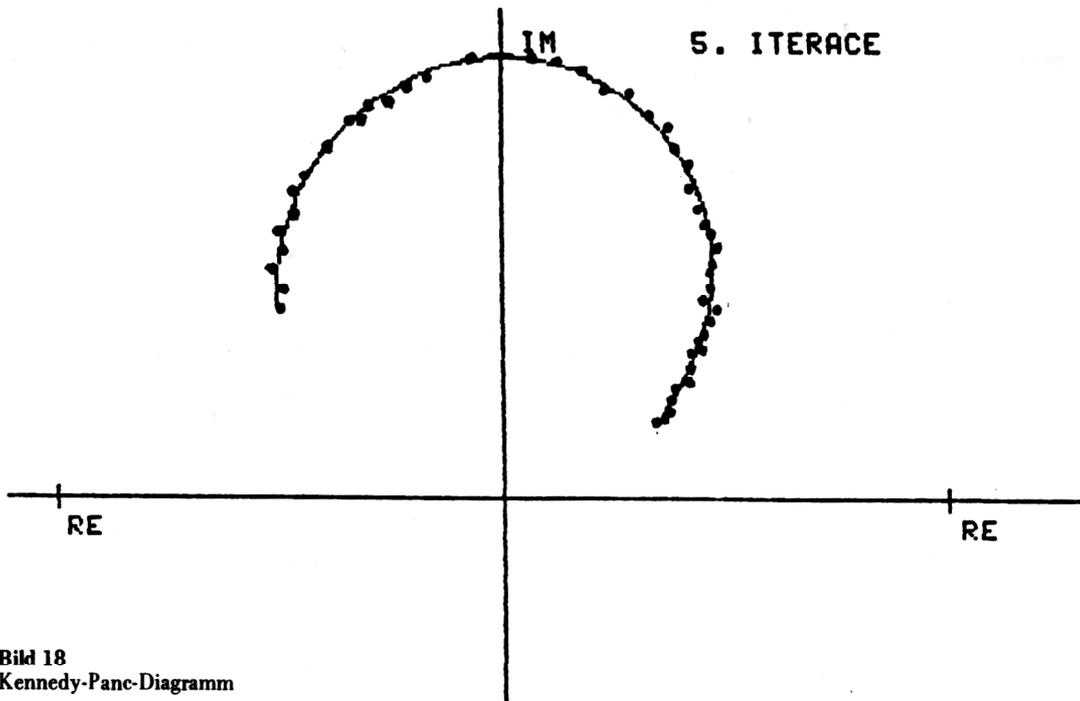


Bild 18  
Kennedy-Panc-Diagramm

Tabelle 4  
Eigenfrequenz und Dämpfungsmaße

Iteration	Eigenfrequenz Hz	Dämpfungsmaß
1	265,40	5,09E-03
2	265,50	5,49E-03
3	265,51	5,50E-03
4	265,51	5,50E-03
5	265,51	5,50E-03

5 % bis 11 % auf. Trotzdem liegen diese Resultate noch in den Grenzen der technischen Genauigkeitsbereiche.

Aus den bestimmten Modaleigenschaften kann sowohl die Steifigkeits- als auch die Dämpfungsmatrix des untersuchten Systems berechnet werden. Die Massenmatrix  $\underline{M}$  kann aus der geometrischen Modellkonfiguration und den Massen einzelner Bestandteile berechnet werden. Die dem Balken aufgesetzten Massen betragen jeweils 167 g. Die Masse des freien Balkenteiles beträgt 146,09 g. In Bezug auf die Balkendeformation, bei der sich die Balkenenden nicht bewegen und in der Einspannung auch die Krümmung der Biegelinie sich nicht ändert, kann die Verkleinerung der effektiven Trägermasse auf 120 g, d. h. 0,72 % der Gesamtmasse abgeschätzt werden. Die abgestimmte Masse einzelner Gewichte ist dann

$$m_1 = m_2 = m_3 = 167 + 120/3 = 207 \text{ g}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0,207 & 0 & 0 \\ & 0,207 & 0 \\ 0 & 0 & 0,207 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Die normierten Eigenvektoren werden mittels der Beziehung

$$a_{jk} = \frac{a_{jk}^*}{\sqrt{\sum_j m_j a_{jk}^{*2}}} ; \quad j, k = 1, 2, 3$$

bestimmt, wobei  $a_{jk}^*$  aus der letzten Zeile der Tabelle 1 abgelesen wird.

Diese Vektoren bilden die Modalmatrix

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 0,919 & 1,538 & 1,109 \\ 1,703 & 0,063 & -1,469 \\ 1,042 & -1,569 & 1,166 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

für die

$$\underline{T}_a \underline{M} \underline{a} = \underline{E} \quad (2.5a)$$

$$\underline{T}_a \underline{C} \underline{a} = \underline{\Omega} \quad (2.5b)$$

gilt. Hierbei ist  $\underline{E}$  die Einheitsmatrix,  $\underline{\Omega}$  die Diagonalmatrix der Eigenfrequenzen mit den Elementen  $\Omega_j^2$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Die Eigenkreisfrequenzen sind:

$$\Omega_1 = 2\pi f_1 = 351,98 \text{ s}^{-1}$$

$$\Omega_2 = 933,80 \text{ s}^{-1}$$

$$\Omega_3 = 1667,37 \text{ s}^{-1},$$

d. h.

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 123890 & 0 & 0 \\ 0 & 871982 & 0 \\ 0 & 0 & 2780120 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Durch die Berechnung nach Gleichung (2.5b) ergibt sich

$$\underline{C} = \underline{T}_a^{-1} \underline{\Omega} \underline{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 289900 & -195900 & 90080 \\ -195900 & 244200 & -186600 \\ 90080 & -186600 & 252300 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Setzt man eine proportionale Dämpfung voraus, gilt die Beziehung

$$\underline{T}_a \underline{R} \underline{a} = \underline{\kappa} \quad (2.8)$$

**Tabelle 5**  
Versuchsergebnisse

Resonanzen		1		2		3	
Eigenfrequenzen: f	D	f	D	f	D	f	D
Erregung an der Stelle	1	56,12	0,00235	148,58	0,00488	264,67	0,00576
	2	56,03	0,00313	—	—	265,54	0,00800
	3	55,86	0,00252	148,54	0,00488	265,44	0,00550
Resultierende Eigenfrequenz		56,04		148,56		265,22	
Dämpfungsmaß		0,00257		0,00488		0,00642	
Abweichungen von f (Tabelle 3)		0,036 %		0,040 %		0,057 %	
D		11 %		8,9 %		5,0 %	

mit  $\kappa$  als Diagonalmatrix mit den Elementen

$$\begin{aligned} \kappa_j &= 2 D_j \Omega_j ; j = 1, 2, 3 \\ \kappa_1 &= 2,034 \\ \kappa_2 &= 8,367 \\ \kappa_3 &= 20,375. \end{aligned}$$

Die entsprechende Dämpfungsmatrix lautet dann

$$\underline{B} = \underline{T}_a^{-1} \underline{\kappa}_a^{-1} = \begin{bmatrix} 2,398 & -1,349 & 0,5102 \\ -1,349 & 1,915 & -1,289 \\ 0,5102 & -1,289 & 2,094 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 3. Schlußfolgerungen aus den durchgeführten Messungen und den entsprechenden Identifikationsergebnissen

Messungen mit Hilfe harmonischer Erregung ermöglichen es, hinreichend genaue Amplituden- und Phasensonanzkurven zu erhalten. Aus diesen Ergebnissen können direkt ohne komplizierte Berechnungen die Resonanzfrequenz (für kleine Dämpfung ist sie gleich der Eigenfrequenz) und das Dämpfungsmaß bestimmt werden. Näherungsweise können auch die Eigenschwingungsformen bestimmt werden. Die auf die Einheitserregerkraft umgerechneten Resonanzkurven geben direkte Angaben über die dynamische Nachgiebigkeit des untersuchten Objektes, woraus die Matrizen dynamischer Nachgiebigkeiten gebildet werden können.

Die Umrechnung der dynamischen Nachgiebigkeitsmatrizen, die bei realen gedämpften Systemen immer komplex sind, auf Matrizen dynamischer Steifigkeiten gab keine hinreichend genauen Resultate, aus denen man direkt Elemente der Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen ermitteln kann. Als Ausgangspunkt wurde deshalb die Verarbeitung modaler Eigenschaften angewendet. Aus den ermittelten Eigenfrequenzen und dem Dämpfungsmaß wurden mit Hilfe der normierten Schwingungsformen die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen berechnet. Es zeigte sich, daß die so erhaltenen

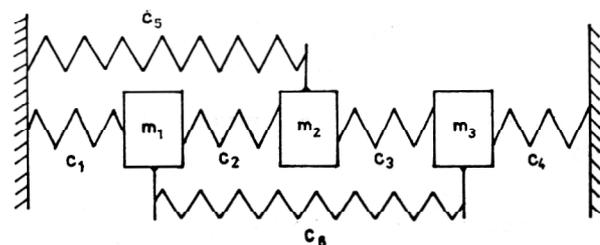
Steifigkeitsmatrizen mit maximalen Werten in der Hauptdiagonale voll besetzt sind. Die kleinsten Werte besitzen die von der Diagonale am weitesten entfernten Elemente mit den Indices 13 und 31. Macht man von dem in Bild 19 angedeuteten Schema des Berechnungsmodells Gebrauch, dessen Steifigkeitsmatrix

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_1+c_2+c_6 & -c_2 & -c_6 \\ -c_2 & c_2+c_5+c_3 & -c_3 \\ -c_6 & -c_3 & c_4+c_3+c_6 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

ist, so folgen aus dem Vergleich der Gleichungen (2.7) und (2.8) die Steifigkeit des Berechnungsmodells

$$\begin{aligned} c_1 &= 184080 \text{ Nm}^{-1} \\ c_2 &= 195900 \text{ Nm}^{-1} \\ c_3 &= 186600 \text{ Nm}^{-1} \\ c_4 &= 155780 \text{ Nm}^{-1} \\ c_5 &= -138300 \text{ Nm}^{-1} \\ c_6 &= -90080 \text{ Nm}^{-1} \end{aligned}$$

Negative Werte  $c_5, c_6$  entstehen dadurch, daß die Massen untereinander nicht durch gewöhnliche Federn auf Zug, sondern auf Biegebeanspruchung gekoppelt sind. Ähnlich wird die Dämpfungsmatrix nach (2.9) berech-



**Bild 19**  
Identifiziertes System

net. Die Berechnungsmodellstruktur der Dämpfungerscheinungen ist dem Schema in Bild 19 ähnlich, in dem nur die Federn der Steifigkeiten  $c_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) durch Dämpfer mit Konstanten  $b_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) ersetzt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} b_1 &= 1,559 \\ b_2 &= 1,349 \\ b_3 &= 1,289 \\ b_4 &= 1,3152 \\ b_5 &= -0,723 \\ b_6 &= -0,5102 \end{aligned}$$

Das identifizierte mathematische Modell hat dadurch die Form

$$\underline{M}\ddot{\underline{y}} + \underline{B}\dot{\underline{y}} + \underline{C}\underline{y} = \underline{F}e^{i\omega t}$$

wo  $\underline{M}$  durch (2.3),  $\underline{B}$  durch (2.9) und  $\underline{C}$  durch (2.7) gegeben sind,  $\underline{y}$  ist ein Spaltenvektor

$$\underline{y} = {}^T[y_1, y_2, y_3]$$

und enthält die Auslenkung einzelner Massen.

Zur Genauigkeitsverifizierung des angewendeten Identifikationsprozesses wurden Resonanzkurven des Systems (2.11) berechnet, für das die angeführten Matrizen  $\underline{M}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  sowie die Erregerkraft

$$\underline{F} = {}^T[0,294;0;0] \text{ bzw. } {}^T[0;0,294;0] \text{ oder } {}^T[0;0;0,294]$$

verwendet wurde. Die berechneten und durch Messungen erhaltenen Werte stimmen sehr gut überein (die Resonanzfrequenz mit einem Fehler  $< 0,2\%$ , die Amplituden mit einem Fehler von  $< 8\%$ ). Ein Beispiel der Übereinstimmung der Meßresultate mit den berechneten ist in Bild 14 angedeutet. Durch Punkte gekennzeichnete Werte sind die durch Berechnung erhaltenen Resonanzkurven.

Aufgrund der durchgeführten Meßergebnisse sowie der Resultate weiterer am UT-CSAV durchgeführten Messungen an Modellen komplizierter Systeme kann festgestellt werden, daß sich bei linearen Systemen mit mehreren Freiheitsgraden als die genaueste Identifikationsmethode die auf der Bestimmung der Modaleigenschaften beruhenden Methode mit nachfolgender Bestimmung der Matrizen  $\underline{M}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  zeigt. Die direkte Identifikationsmethode weist infolge der Inversion schon bei kleinen Meßfehlern der Eingangscharakteristiken schlechtere Werte, mindestens um eine Größenordnung, aus.

Im Ergebnis der Anwendung von Parameterschätzverfahren im Zeitbereich werden unmittelbar die physikalischen Systemparameter (z. B. Steifigkeiten, Dämpfungen) bestimmt. Aus den geschätzten Systemmatrizen lassen sich die Eigenformen, Modalmatrix, modale Parameter sowie der komplexe Frequenzgang berechnen.

Eine wichtige Voraussetzung für erwartungstreue, konsistente Schätzungen ist die permanente Anregung sämtlicher im mathematischen Modell erfaßten Eigenfrequenzen des Systems während der gesamten Meßzeit. Bei der hier angewendeten Sprungerregung werden unmittelbar nach dem Kraftsprung die höchsten Eigenfre-

quenzen intensiv angeregt (vgl. Bilder 3 bis 5). Dadurch ist zu erklären, daß der Parameterschätzer die höheren Eigenformen und die entsprechenden modalen Parameter am besten identifiziert. Infolge der begrenzten Meßzeit war im vorliegenden Beispiel eine genauere Identifikation der 1. Eigenform nicht möglich.

Daher ist eine Sprungerregung für Zeitbereichsverfahren nur bedingt geeignet. Der Parameterschätzer liefert jedoch insbesondere für die höheren Eigenformen brauchbare Ergebnisse.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Goodwin, G. C.; Payne, R. L.: Dynamic system identification. Experiment design and data analysis. Academic Press, New York, London, 1971.
- [ 2 ] Diesing, H.; Tischer, W.: Anwendung von Parameterschätzverfahren zur Identifikation mechanischer Schwingungssysteme. Technische Mechanik, 1982.
- [ 3 ] Rekursive Algorithmen zur Parameteridentifikation linearer mechanischer Systeme auf der Basis von Schätzverfahren. Tagungsmaterialien Dynamik und Getriebetechnik, Dresden 1985, Bd. B XXXIII.
- [ 4 ] Heimann, B.; Diesing, H.; Tischer, W.: Least square parameter estimation in linear and nonlinear dynamik systems. Proceedings 14. Conference Dynamics of Machines, Liblice (CSSR), 12. – 16. Sept. 1983.
- [ 5 ] Prochazka, P.: Automatizace mericho systemu pro modelove metody vyzkumu kmitani mechanickych soustav (Automization of the Measurement System for Research Model Methods of Mechanical System Vibrations). Strojnický časopis 24, 1983, c. 1 – 2, str. 167 – 174.
- [ 6 ] Pust, L.: Vyoj modelovych metod v dynamice (Development of Model Methods in Dynamics). Strojnický časopis 34, 1983, c. 1 – 2, str. 175 – 188.
- [ 7 ] Kozanek, J.: Vyhodnoceni prenosove funkce z namerenych dat (the Evaluation of the Frequency Transfer Function from Experimental Data). Strojnický časopis 33, 1982 c. 3, str. 281 – 289.