TECHNISCHE MECHANIK 7 (1986) Heft 2
Manuskripteingang: 24. 4. 1985

Nichtlineare Schwingungen mechanischer Systeme mit elastisch-plastischen Materialeigenschaften

Nguyen van Dao, Hoang van Da

0. Einleitung

Viele Aufgaben der Schwingungen mechanischer Systeme mit elastisch-plastischen Materialeigenschaften führen zur Untersuchung der folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2} - \beta d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \Gamma (\Theta, x, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots), \tag{0.1}$$

$$L_k [u] = L_k (u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) = 0, \quad (k = x;\ k = 0, l)^{1)} \tag{0.2}$$

bzw.

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} + \alpha b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \mu F (\Theta, x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots), \tag{0.3}$$

$$L_{1j} [w] = L_{1j} (\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0, \; L_{2j} [w] = L_{2j} (w, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}) = 0, \; (j = x;\ j = 0, l) \tag{0.4}$$

bzw.

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) + \xi \omega^2 \nabla^4 w = \mu F (\Theta, x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots), \tag{0.5}$$

$$L_{1j} [w] = L_{1j} (\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0, \; L_{2j} [w] = L_{2j} (w, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}) = 0, \tag{0.6}$$

$$L_{1k} [w] = L_{1k} (\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0, \; L_{2k} [w] = L_{2k} (w, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}) = 0,$$

$$(j = x;\ j = 0, b.\ k = y;\ k = 0, c)$$

Die Randwertaufgaben (0.1) bis (0.2) und (0.3) bis (0.4) wurden von vielen Autoren behandelt [6]. Die Untersuchung der Aufgabe (0.5) bis (0.6) ist noch am Anfang.
In dieser Arbeit wird zuerst die Bewegungsgleichung der dünnen rechteckigen Platten bei Berücksichtigung der elastisch-plastischen Materialeigenschaften erstellt. Sie hat die Form von (0.5) – (0.6). Danach werden die asymptotischen Lösungen dieser Gleichung aufgebaut. Die Eigenschaften der Lösung werden gezeigt.

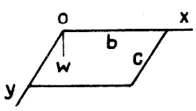

Bild 1

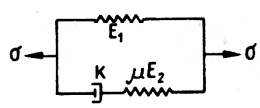

Bild 2

1. Die Bewegungsgleichungen

Betrachtet wird die Platte mit den Abmessungen nach Bild 1. Die Materialeigenschaft wird durch das Modell in Bild 2 beschrieben. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung ist dabei durch die Beziehung

1) Der Autor bezeichnet hier und im folgenden mit $k = x;\ k = 0, l$ die Randwerte für $x = 0, l$.

$$\sigma = E\epsilon\,, \tag{1.1}$$

$$E = \frac{E_1 + K(1 + E_1/\mu E_2)\dfrac{\partial}{\partial t}}{1 + \dfrac{K}{\mu E_2}\dfrac{\partial}{\partial t}}\,, \tag{1.2}$$

gegeben.
Durch Einsetzen von (1.2) in den Ausdruck für die Biegesteifigkeit der Platte

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\,, \tag{1.3}$$

in der Gleichung

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\nabla^4 w = \mu f(t, x, y, w, \ldots)\,, \tag{1.4}$$

ergibt sich nach einigen Umformungen die folgende Gleichung für die Plattenschwingung

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^4 w) + \xi\omega^2\nabla^4 w = \mu\Big[\frac{1}{M}\Big(\xi f + \frac{\partial f}{\partial t}\Big) - \frac{E_2}{E_1}\omega^2\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^4 w)\Big]\,. \tag{1.5}$$

In (1.5) sind w die Durchbiegung, h die Dicke der Platte, ν die Poissonsche Konstante, f nichtlineare Funktion von t, x, y, w, . . . , die als bekannt vorausgesetzt wird, ∇ der Nablaoperator und

$$\xi = \frac{E_2}{k}\,, \qquad \omega^2 = \frac{D_1}{M}\,, \qquad D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu^2)}\,. \tag{1.6}$$

Zur Vereinfachung setzen wir M = 1. Die Gleichung (1.5) hat dann die Form

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^4 w) + \xi\omega^2\nabla^4 w = \mu F(\Theta, x, y, w, \ldots)\,, \tag{1.7}$$

Dabei ist $\dfrac{d\Theta}{dt} = \gamma$, F ist eine periodische Funktion mit der Periode 2π für Θ, μ ist ein kleiner Parameter.

Die Randbedingungen werden in der Form vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} &L_{ij}[w] = L_{ij}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0\,, \quad L_{2j}[w] = L_{2j}\Big(w, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big) = 0\,, \\ &L_{1k}[w] = L_{1k}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0\,, \quad L_{2k}[w] = L_{2k}\Big(w, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big) = 0\,, \\ &\qquad (j = x;\ j = 0, b,\ k = y;\ k = 0, c)\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dabei sind L_{1j}, L_{2j}, L_{1k}, L_{2k} lineare Operatoren mit konstanten Koeffizienten.

2. Holonomes System

Die Bewegungsgleichung besitzt die Form

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^4 w) + \xi\omega^2\nabla^4 w = \mu F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots\Big)\,, \tag{2.1}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nicht explizit von t abhängig. Bei $\mu = 0$ ergibt sich aus (2.1)

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^4 w) + \xi\omega^2\nabla^4 w = 0\,. \tag{2.2}$$

Die Lösung von (2.1) wird in der Form

$$w_o(x, y, t) = Z(x, y)\,T(t) \tag{2.3}$$

gesucht.
Durch Einsetzen (2.3) in (2.2) und (1.8) ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{d^3 T}{d t^3} + \xi \frac{d^2 T}{d t^2} + \beta^2 \omega^2 \frac{dT}{dt} + \xi \beta^2 \omega^2 T = 0 , \tag{2.4}$$

$$\nabla^4 Z - \beta^2 Z = 0 \tag{2.5}$$

mit den Randbedingungen

$$L_{1j}[Z] = 0, \quad L_{2j}[Z] = 0, \quad L_{1k}[Z] = 0, \quad L_{2k}[Z] = 0, \tag{2.6}$$
$$(j = x;\ j = 0, b;\ \ k = y;\ k = 0, c).$$

Nehmen wir an, daß die Eigenwerte $\{\beta_{rs}\}$ und die entsprechenden orthogonalen Eigenfunktionen $Z_{rs}(x, y)$ bestimmt wurden, dann besitzt die partikuläre Lösung von (2.2) die Form

$$w_0(x, y, t) = \sum_{r,s=1}^{\infty} A_{rs} Z_{rs} \cos(\Omega_{rs} t + \psi_{rs}) . \tag{2.7}$$

Dabei sind A_{rs}, ψ_{rs} die aus Anfangsbedingungen bestimmten Konstante und Ω_{rs} die Eigenfrequenzen,

$$\Omega_{rs}^2 = \omega^2 \beta_{rs}^2 . \tag{2.8}$$

2.1. *Der Fall einer Frequenz*

Wir setzen voraus, daß das System (2.4) eine nicht abklingende Lösung mit der Frequenz Ω_{11} hat und keine innere Resonanz vorliegt, d. h.

$$(\Omega_{rs} - n\Omega_{11}) \neq 0 . \qquad (n, r, s = 1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

In diesem Fall kann die Lösung der Randwertaufgabe (2.1), (1.8) in Form der Reihe

$$w(x, y, t) = Z_{11}\, a \cos\varphi + \mu U_1(x, y, a, \varphi) + \mu^2 U_2(x, y, a, \varphi) + \mu^3 \ldots , \tag{2.10}$$

gesucht werden. Dabei sind $\varphi = (\Omega_{11} t + \psi)$ und $U_1, U_2 \ldots$ periodische Funktionen des Winkels φ mit der Periode 2π. Die Größen a und ψ werden durch das Gleichungssystem

$$\frac{da}{dt} = \mu A_1(a) + \mu^2 A_2(a) + \mu^3 \ldots , \quad \frac{d\psi}{dt} = \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \mu^3 \ldots \tag{2.11}$$

bestimmt.

Durch Bestimmung der Ableitung von w nach t gemäß (2.10) und (2.11) und Einsetzen der erhaltenen Ergebnisse in (2.1), danach durch Vergleichen der Koeffizienten der gleichen Potenz von μ erhalten wir in erster Näherung

$$\Omega_{11}^3 \frac{\partial^3 U_1}{\partial \varphi^3} + \xi \Omega_{11}^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} + \Omega_{11} \omega^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^4 U_1) + \xi \omega^2 \nabla^4 U_1 = F_1$$
$$+ [(2\Omega_{11}^2 A_1 + 2\xi a \Omega_{11} B_1) \cos\varphi + (2\xi \Omega_{11} A_1 - 2a\Omega_{11}^2 B_1) \sin\varphi] Z_{11} . \tag{2.12}$$

Dabei ist $F_1 = F(x, y, Z_{11}\, a \cos\varphi, \frac{\partial Z_{11}}{\partial x}\, a \cos\varphi, \ldots)$ und U_1 erfüllt die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} L_{ij}[U_1] &= 0, \quad L_{2j}[U_1] = 0, \\ L_{1k}[U_1] &= 0, \quad L_{2k}[U_1] = 0, \end{aligned} \qquad (j = x;\ j = 0, b.\ \ k = y;\ k = 0, c) . \tag{2.13}$$

Zur Bestimmung U_1 entwickeln wir F_1 und U_1 nach den Eigenfunktionen $\{ Z_{rs}(x, y) \}$:

$$U_1 = \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \varphi) Z_{rs} , \quad F_1 = \sum_{r,s=1}^{\infty} F_{1rs}(a, \varphi) Z_{rs} , \quad F_{1rs} = \int_0^b \int_0^c F_1 Z_{rs}\, dx\, dy \Big/ \int_0^b \int_0^c Z_{rs}^2\, dx\, dy . \tag{2.14}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichung (2.12) und Vergleichen der Koeffizienten von Z_{rs} ergibt sich

$$\Omega_{11}^3 \frac{\partial^3 V_{111}}{\partial \varphi^3} + \xi \Omega_{11}^2 \frac{\partial^2 V_{111}}{\partial \varphi^2} + \Omega_{11}^3 \frac{\partial U_{111}}{\partial \varphi} + \xi \Omega_{11}^2 U_{111} = F_{111}$$
$$+ [(2\Omega_{11}^2 A_1 + 2\xi a \Omega_{11} B_1) \cos\varphi + (2\xi \Omega_{11} A_1 - 2a\Omega_{11}^2 B_1) \sin\varphi] , \tag{2.15}$$

$$\Omega_{11}^3 \frac{\partial^3 U_{1rs}}{\partial\varphi^3} + \xi\,\Omega_{11}^2 \frac{\partial^2 U_{1rs}}{\partial\varphi^2} + \Omega_{11}\,\Omega_{rs}^2 \frac{\partial U_{111}}{\partial\varphi} + \xi\,\Omega_{rs}^2 U_{1rs} = F_{1rs} \tag{2.16}$$

$$(r, s = 1, 2, \ldots;\; r = s \neq 1).$$

Aus (2.14) folgt, daß U_1 die Randbedingung (2.13) erfüllt. Zur Bestimmung von U_{1rs} entwickeln wir U_{1rs} und F_{1rs}:

$$U_{1rs} = \sum_{n=0}^{\infty} [v_{1n}^{rs}(a)\cos n\varphi + w_{1n}^{rs}(a)\sin n\varphi],\quad F_{1rs} = \sum_{n=0}^{\infty} [g_{1n}^{rs}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{rs}(a)\sin n\varphi] \tag{2.17}$$

Dabei sind

$$g_{10}^{rs}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_{1rs}\,d\varphi,\quad g_{1n}^{rs}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{1rs}(a)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad h_{1n}^{rs}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{1rs}\sin n\varphi\,d\varphi$$

die bekannten Größen und $v_{1n}^{rs}(a)$, $w_{1n}^{rs}(a)$ sind zu bestimmen. Durch Einsetzen von (2.17) in (2.16) und (2.15) und Koeffizientenvergleich mit der zusätzlichen Bedingung, daß U_{111} keine Ausdrücke $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ enthält, ergeben sich die folgenden Beziehungen zur Bestimmung A_1, B_1 und U_1:

$$A_1 = -\frac{(\Omega_{11}\, g_{11}^{11}(a) + \xi\, h_{11}^{11}(a))}{2\,\Omega_{11}\,(\Omega_{11}^2 + \xi^2)},\quad B_1 = -\frac{(\xi\, g_{11}^{11}(a) - \Omega_{11}\, h_{11}^{11}(a))}{2\,a\,\Omega_{11}\,(\Omega_{11}^2 + \xi^2)}, \tag{2.18}$$

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{[(\xi\, g_{1n}^{rs}(a) - n\,\Omega_{11}\, h_{1n}^{rs}(a))\cos n\varphi + (n\,\Omega_{11}\, g_{1n}^{rs}(a) + \xi\, h_{1n}^{rs}(a))\sin n\varphi]}{(\xi^2 + n^2\,\Omega_{11}^2)(\Omega_{rs}^2 - n^2\,\Omega_{11}^2)}\, Z_{rs}(x, y) \tag{2.19}$$

$$(r = s = 1,\; n \neq 1).$$

2.2. *Der Fall mehrerer Frequenzen*

Es wird angenommen, daß die Lösung von (2.2) bei bestimmter Anfangsbedingung N^2 nicht abklingende Schwingungen (N eine gerade Zahl) mit den Frequenzen Ω_{11}, $\Omega_{12}, \ldots \Omega_{NN}$ enthält.
Für diese Frequenzen wird angenommen, daß es keine innere Resonanz gibt, d. h.

$$[\Omega_{rs}^2 - \sum_{k,l=1}^{N} q_{kl}\,\Omega_{kl}] \neq 0, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots) \tag{2.20}$$

Dabei sind q_{kl} Konstanten, die von der rechten Seite von (2.1) abhängig sind. In diesem Fall ist die partikuläre Lösung der Gleichung (2.1) von $2N^2$ Konstanten abhängig und erscheint in der Form

$$w(x, y, t) = \sum_{k,l=1}^{N} Z_{kl}\, a_{kl}\cos\Phi_{kl} + \mu\, U_1(x, y, a, \Phi) + \mu^2\, U_2(x, y, a, \Phi) + \mu^3 \ldots, \tag{2.21}$$

wobei

$$\frac{d a_{kl}}{dt} = \mu\, A_{1kl}(a) + \mu^2 A_{2kl}(a) + \mu^3 \ldots,\qquad \frac{d\psi_{kl}}{dt} = \mu\, B_{1kl}(a) + \mu^2 B_{2kl}(a) + \mu^3 \ldots,$$

$$\Phi_{kl} = (\Omega_{kl}\, t + \psi_{kl}),\quad a = (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{NN}),\quad \Phi = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots \Phi_{NN}). \tag{2.22}$$

Durch Bestimmung der Ableitung von w nach t gemäß (2.21), (2.22) und durch Vergleichen der Koeffizienten der gleichen Potenzen von μ erhalten wir in erster Näherung

$$L_3[U_1] + \xi L_2[U_1] + \omega^2 L_1[\nabla^4 U_1] + \xi\,\omega^2\nabla^4 U_1 = F_1$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{N} [(2\,\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + 2\xi\, a_{kl}\,\Omega_{kl}\, B_{1kl})\cos\Phi_{kl} + (2\xi\,\Omega_{kl}\, A_{1kl} - 2\,a_{kl}\,\Omega_{kl}^2\, B_{1kl})\sin\Phi_{kl}]\, Z_{kl}. \tag{2.23}$$

Die Funktion U_1 muß die Randbedingung

$$L_{1j}[U_1] = 0,\quad L_{2j}[U_1] = 0,\quad L_{1k}[U_1] = 0,\quad L_{2k}[U_1] = 0 \tag{2.24}$$

$$(j = x;\; j = 0, b.\; k = y;\; k = 0, b)$$

erfüllen. Dabei sind

$$F_1 = F(x, y, \sum_{k,l=1}^{N} Z_{kl}\, a_{kl} \cos\Phi_{kl}, \sum_{k,l=1}^{N} \frac{\partial Z_{kl}}{\partial x} a_{kl} \cos\Phi_{kl}, \ldots),$$

$$L_1[U_1] = (\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} \frac{\partial}{\partial\Phi_{kl}}) U_1, \quad L_2[U_1] = (\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} \frac{\partial}{\partial\Phi_{kl}})^2 U_1, \quad L_3[U_1] = (\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} \frac{\partial}{\partial\Phi_{kl}})^3 U_1 .$$

Durch Entwicklung U_1 und F_1 nach den Eigenfunktionen gemäß (2.14), durch Einsetzen der erhaltenen Ergebnisse in (2.23) und Vergleichen der Koeffizienten von Z_{rs} ergeben sich die Beziehungen:

$$L_3[U_{1kl}] + \xi L_2[U_{1kl}] + \Omega_{kl}^2 L_1[U_{1kl}] + \xi \Omega_{kl}^2 U_{1kl} = F_{1kl}$$

$$+ [(2\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + 2\xi a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl}) \cos\Phi_{kl} + (2\xi\Omega_{kl} A_{1kl} - 2 a_{kl} \Omega_{kl}^2 B_{1kl}) \sin\Phi_{kl}] \tag{2.25}$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots N),$$

$$L_3[U_{1rs}] + \xi L_2[U_{1rs}] + \Omega_{rs}^2 L_1[U_{1rs}] + \xi\Omega_{rs}^2 U_{1rs} = F_{1rs} \quad [r, s = (N+1), (N+2), \ldots]. \tag{2.26}$$

Zur Bestimmung von U_{1rs} werden F_{1rs} und U_{1rs} nach Φ entwickelt:

$$U_{1rs} = \sum_p U_{1p}^{rs}(a)\, e^{ip\Phi}, \quad F_{1rs} = \sum_p F_{1p}^{rs}(a)\, e^{ip\Phi}$$

$$F_{1p}^{rs}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{N^2}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_{1rs}\, e^{-ip\Phi}_{d\phi} \qquad p = (p_{11}, p_{12}, \ldots p_{NN}). \tag{2.27}$$

Setzen wir (2.27) in (2.25) und (2.26) ein, dann ergibt sich

$$\sum_p (\xi + iL_1)(\Omega_{kl}^2 - L_2)\, U_{1p}^{kl}(a)\, e^{ip\Phi} = \sum_p F_{1p}^{kl}(a)\, e^{ip\Phi} +$$

$$+ [(2\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + 2\xi a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl}) \cos\Phi_{kl} + (2\xi\Omega_{kl} A_{1kl} - 2 a_{kl} \Omega_{kl}^2 B_{1kl}) \sin\Phi_{kl}], \tag{2.28}$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots N)$$

$$\sum_p (\xi + iL_1)(\Omega_{rs}^2 - L_2)\, U_{1p}^{rs}(a)\, e^{ip\Phi} = \sum_p F_{1p}^{rs}(a)\, e^{ip\Phi}, \quad [r, s = (N+1), (N+2), \ldots] \tag{2.29}$$

mit

$$L_1 = \sum_{k,l=1}^{N} p_{kl} \Omega_{kl}, \quad L_2 = L_1^2 = (\sum_{k,l=1}^{N} p_{kl} \Omega_{kl})^2 .$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten gleicher Potenzen in den Gleichungen (2.28), (2.29) ergibt sich

$$U_{1p}^{rs}(a) = \frac{F_{1p}^{rs}(a)}{(\xi + iL_1)(\Omega_{rs}^2 - L_2)}, \tag{2.30}$$

Für $r, s \leqslant N$ ist $(\Omega_{rs}^2 - L_2) \neq 0$.

Wird (2.30) in (2.27) und danach in (2.14) eingesetzt, folgt der Ausdruck zur Bestimmung U_1:

$$U_1 = \sum_p \sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{[\int_0^b \int_0^c \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_1 Z_{rs}\, e^{-i(p_{11}\Phi_{11} + p_{12}\Phi_{12} + \ldots p_{NN}\Phi_{NN})}\, dx\, dy\, d\Phi_{11}\, d\Phi_{12} \ldots d\Phi_{NN}] \times}{(2\pi)^{N^2} (\xi + iL_1)(\Omega_{rs}^2 - L_2) \int_0^b \int_0^c Z_{rs}^2\, dx\, dy} \tag{2.31}$$

$$\times\ Z_{rs}\, e^{i(p_{11}\Phi_{11} + \ldots p_{NN}\Phi_{NN})}$$

Aus (2.28) ist zu sehen, daß für

$$e^{i(p_{11}\Phi_{11} + p_{12}\Phi_{12} + \ldots + p_{NN}\Phi_{NN})} = e^{\pm i\Phi_{kl}}, \tag{2.32}$$

folgt:

$$(\Omega_{kl}^2 - L_2) = 0 ; \qquad (k, l = 1, 2 \ldots N) . \tag{2.33}$$

Mit der zusätzlichen Bedingung, daß U_{1rs} die Größen $\cos \Phi_{kl}$ und $\sin \Phi_{kl}$ nicht enthält, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die Gleichung zur Bestimmung von A_1, B_1

$$\begin{aligned}(\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + \xi a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl}) &= - \frac{1}{(2\pi)^{N^2}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_{1kl}(a, \Phi) \cos \Phi_{kl} \, d\Phi = - G_{kl}(a) , \\ (\xi \Omega_{kl} A_{1kl} - a_{kl} \Omega_{kl}^2 B_{1kl}) &= - \frac{1}{(2\pi)^{N^2}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_{1kl}(a, \Phi) \sin \Phi_{kl} \, d\Phi = - H_{kl}(a)\end{aligned} \tag{3.34}$$

oder

$$A_{1kl} = - \frac{(\Omega_{kl} G_{kl} + \xi H_{kl})}{\Omega_{kl} (\Omega_{kl}^2 + \xi^2)} , \qquad B_{1kl} = - \frac{(\xi G_{kl} - \Omega_{kl} H_{kl})}{a_{kl} \Omega_{kl}^2 + \xi^2)} \tag{2.35}$$

In erster Näherung wurden hiermit die Lösungen von (2.21) bestimmt.

3. Nichtholonomes System

3.1. Einfache Resonanz

Die Bewegungsgleichung hat nun die Form

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) + \xi \omega^2 \nabla^4 w = \epsilon F(\Theta, x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots) . \tag{3.1}$$

Hierbei sind $\Theta = (\gamma t + \Theta_o)$, γ, Θ_o Konstante.

Es wird angenommen, daß bei der Eigenfrequenz Ω_{11} und der Frequenz der äußeren Kraft γ folgende Beziehung

$$\Omega_{11} = \frac{p}{q} \gamma + \mu \Delta \tag{3.2}$$

gilt, wobei p und q ganze teilerfremde Zahlen und Δ der Frequenzunterschied sind.

Die partikuläre Lösung von (3.1) wird in der Form

$$w(x, y, t) = Z_{11} a \cos \varphi + \mu U_1 (x, y, a, \varphi, \Theta) + \mu^2 U_2 (x, y, a, \varphi, \Theta) + \mu^3 \ldots \tag{3.3}$$

gesucht. Hierbei ist $\varphi = (\frac{p}{q} \Theta + \psi)$ und a, ψ sind aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \mu A_1 (a, \psi) + \mu^2 A_2 (a, \psi) + \mu^3 \ldots , \\ \frac{d\psi}{dt} &= (\Omega_{11} - \frac{p}{q} \gamma) + \mu B_1 (a, \psi) + \mu^2 B_2 (a, \psi) + \mu^3 \ldots\end{aligned} \tag{3.4}$$

zu bestimmen.

Durch Bestimmung der Ableitung von w nach t gemäß (3.3), (3.4), Einsetzen dieser Ableitung in (3.1) und durch Vergleichen der Koeffizienten gleicher Potenz von μ erhalten wir in erster Näherung

$$\begin{aligned}&L_3 [U_1] + \xi L_2 [U_1] + \omega^2 L_1 [\nabla^4 U_1] + \xi \omega^2 \nabla^4 U_1 = F_1 \\ &+ [(2 \Omega_{11}^2 A + 2 \xi a \Omega_{11} B_1) \cos \varphi + (2 \xi \Omega_{11} A_1 - a 2 \Omega_{11}^2 B_1) \sin \varphi] Z_{11} .\end{aligned} \tag{3.5}$$

Die Funktion U_1 muß die folgenden Randbedingungen

$$L_{ij} [U_1] = 0 , \quad L_{2j} [U_1] = 0 , \quad L_{1k} [U_1] = 0 , \quad L_{2k} [U_1] = 0 , \tag{3.6}$$

$$(j = x; \; j = 0, b . \;\; k = y; \; k = 0, c) .$$

erfüllen. Dabei sind

$$L_1 = (\Omega_{11} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \Theta}) U_1 , \quad L_2 = (\Omega_{11} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \Theta})^2 U_1 , \quad L_3 = (\Omega_{11} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \Theta})^3 U_1 .$$

Die zu bestimmende Funktion U_1 und Funktion F_1 werden nach den Eigenfunktionen $\left\{ Z_{rs}(x, y) \right\}$ in der Form

$$U_1 = \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \varphi, \Theta)\, Z_{rs}, \quad F_1 = \sum_{r,s=1}^{\infty} F_{1rs}(a, \varphi, \Theta)\, Z_{rs},$$

$$F_{1rs} = \int_0^b \int_0^c F_1\, Z_{rs}\, dx\, dy \Big/ \int_0^b \int_0^c Z_{rs}^2\, dx\, dy \tag{3.7}$$

entwickelt.
Damit erfüllt die Funktion U_1 die Randbedingung (3.6).
Durch Einsetzen von (3.7) in (3.5) und durch Vergleichen der Koeffizienten von Z_{rs} ergeben sich die Ausdrücke

$$L_3[U_{111}] + \xi L_2[U_{111}] + \Omega_{11}^2 L_1[U_{111}] + \xi \Omega_{11}^2 U_{111} = F_{111} +$$

$$+ \left[(2\Omega_{11}^2 A_1 + 2\xi a \Omega_{11} B_1) \cos\varphi + (2\xi\Omega_{11} A_1 - 2a\Omega_{11}^2 B_1) \sin\varphi \right], \tag{3.8}$$

$$L_3[U_{1rs}] + \xi L_2[U_{1rs}] + \Omega_{rs}^2 L_1[U_{1rs}] + \xi \Omega_{rs}^2 U_{1rs} = F_{1rs}. \tag{3.9}$$

$$(r, s = 1, 2, \dots, \quad r = s \neq 1).$$

Die zu bestimmenden Funktionen U_{1rs} und F_{1rs} werden wie oben in der Form

$$U_{1rs} = \sum_{r,m} U_{1nm}^{rs}(a)\, e^{i(n\Theta + m\varphi)}, \quad F_{1rs} = \sum_{n,m} F_{1nm}^{rs}(a)\, e^{i(n\Theta + m\varphi)},$$

$$F_{1nm}^{rs}(a) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{1rs}\, e^{-i(n\Theta + m\varphi)}\, d\varphi\, d\Theta, \tag{3.10}$$

entwickelt.
Durch Einsetzen von (3.10) in (3.8) und (3.9), Vergleichen der Koeffizienten von $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$, mit der zusätzlichen Bedingung, daß U_{111} die Größen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ nicht enthält, ergibt sich nach einigen Berechnungen:

$$U_{1nm}^{rs}(a) = \frac{F_{1nm}^{rs}(a)}{[\xi + i(m\Omega_{11} + n\gamma)]\,[\Omega_{rs}^2 - (m\Omega_{11} + n\gamma)^2]} \tag{3.11}$$

$$[r, s = 1, 2, \dots; \; r = s = 1, \quad qn + p(m \pm 1) \neq 0].$$

Setzen wir (3.11) in (3.10) und anschließend in (3.7) ein, so erhalten wir den Ausdruck zur Bestimmung von U_1

$$U_1 = \sum_{n,m} \sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^c F_1\, Z_{rs}\, e^{-i(n\Theta + m\varphi)}\, dx\, dy\, d\varphi\, d\Theta \cdot Z_{rs}\, e^{i(n\Theta + m\varphi)}}{4\pi^2 [\xi + i(m\Omega_{11} + n\gamma)]\,[\Omega_{rs}^2 - (m\Omega_{11} + n\gamma)^2] \int_0^b \int_0^c Z_{rs}^2\, dx\, dy} \tag{3.12}$$

$$[r = s = 1, \quad qn + p(m \pm 1) \neq 0].$$

Die Größen A_1, B_1 werden aus den Gleichungen

$$2\Omega_{11}^2 A_1 + 2\xi a \Omega_{11} B_1 = -\frac{2}{4\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma_\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{111}\, e^{-ip\sigma(\varphi - \frac{p}{q}\Theta)} \cos\varphi\, d\varphi\, d\Theta = -2G(a),$$

$$2\xi\Omega_{11} A_1 - 2a\Omega_{11}^2 B_1 = -\frac{2}{4\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma_\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{111}\, e^{-ip\sigma(\varphi - \frac{p}{q}\Theta)} \sin\varphi\, d\varphi\, d\Theta = -2H(a) \tag{3.13}$$

bestimmt. Daraus folgt

$$A_1 = -\frac{(\Omega_{11} G + \xi H)}{\Omega_{11}(\Omega_{11}^2 + \xi^2)}, \quad B_1 = -\frac{(\xi G - \Omega_{11} H)}{a\Omega_{11}(\Omega_{11}^2 + \xi^2)}. \tag{3.14}$$

Hiermit ist in erster Näherung die Lösung von (3.3) vollständig bestimmt.

3.2. *Allgemeine Resonanz*

Betrachtet wird die Bewegungsgleichung der Platte in der Form

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) + \xi \omega^2 \nabla^4 w = \mu F (\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_h, x, y, w, \ldots), \tag{3.15}$$

dabei ist

$$\frac{d\Theta\nu}{dt} = \gamma_\nu, \ (\nu = 1, 2, \ldots h). \tag{3.16}$$

Wir nehmen an, daß für $\mu = 0$ und unter den bestimmten Anfangsbedingungen die Gleichung (3.15) N^2 nichtabklingende Schwingungen mit den Eigenfrequenzen $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \ldots \Omega_{NN}$ hat, die die Bedingung fehlender innerer Resonanz (2.20) erfüllen. Außerdem setzen wir voraus, daß zwischen den Eigenfrequenzen und den Frequenzen der äußeren Kraft folgende Beziehung

$$q_{11}^{(j)} \omega_{11} + q_{12}^{(j)} \omega_{12} + \ldots + q_{NN}^{(j)} \omega_{NN} + p_1^{(j)} \gamma_1 + p_2^{(j)} \Theta_2 + \ldots p_h^{(j)} \Theta_h = 0 \tag{3.17}$$

$$(j = 1, 2, \ldots \rho)$$

gilt. Dabei sind $q_{kl}^{(j)}$, $p_\nu^{(j)}$ die bestimmten geraden Konstante, die von der rechten Seite von (3.15) abhängig sind, und

$$\omega_{kl} = \Omega_{kl} - \mu \delta_{kl}, \ (k,l = 1, 2, \ldots N); \tag{3.18}$$

δ_{kl} ist der Frequenzunterschied.

Die von $2N^2$ Konstanten abhängige partikuläre Lösung der Randwertaufgabe (3.15), (1.8) wird dann in der Form

$$w(x, y, t) = \sum_{k,l=1}^{N} Z_{kl} a_{kl} \cos\Phi_{kl} + \mu U_1(x, y, a, \Phi, \Theta) + \mu^2 U_2(x, y, a, \Phi, \Theta) + \mu^3 \ldots \tag{3.19}$$

gesucht. Hiermit sind

$$a = (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{NN}); \quad \Phi = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots \Phi_{NN}); \ \Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_h), \ \Phi_{kl} = (\eta_{kl} + \psi_{kl}). \tag{3.20}$$

Die Funktionen η_{kl} erfüllen die Beziehung

$$\frac{d\eta_{kl}}{dt} = \omega_{kl}, \tag{3.21}$$

$$q_{11}^{(j)} \eta_{11} + q_{12}^{(j)} \eta_{12} + \ldots q_{NN}^{(j)} \eta_{NN} + p_1^{(j)} \Theta_1 + p_2^{(j)} \Theta_2 + \ldots p_h^{(j)} \Theta_h = 0. \tag{3.22}$$

Die zu bestimmenden Funktionen $U_1, U_2, \ldots$ sind periodische Funktionen von Φ und Θ mit der Periode 2π. Die Größen a_{kl}, ψ_{kl} werden aus den Gleichungen

$$\frac{da_{kl}}{dt} = \mu A_{1kl}(a, \psi) + \mu^2 A_{2kl}(a, \psi) + \mu^3 \ldots, \quad \frac{d\psi_{kl}}{dt} = \mu\delta_{kl} + \mu B_{1kl}(a, \psi) + \mu^2 B_{2kl}(a, \psi) + \mu^3 \ldots, \tag{3.23}$$

$$\psi = (\psi_{11}, \psi_{12}, \ldots \psi_{NN})$$

bestimmt.

Durch Bestimmung der Ableitung von w nach t gemäß (3.19), (3.22), Einsetzen dieser Ableitung in (3.15) und durch Vergleichen der Koeffizienten gleicher Potenz von μ erhalten wir in erster Näherung

$$L_3[U_1] + \xi L_2[U_1] + \omega^2 L_1[\nabla^4 U_1] + \xi\omega^2 \nabla^4 U_1 = F_1$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{N} [(2\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + 2\xi a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl}) \cos\Phi_{kl} + (2\xi \Omega_{kl} A_{1kl} - 2\Omega_{kl}^2 a_{kl} B_{1kl}) \sin\Phi_{kl}] Z_{kl} \tag{3.23}$$

$$L_1[U_1] = \Big(\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} \frac{\partial}{\partial\Phi_{kl}} + \sum_{\nu=1}^{h} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial\Theta_\nu}\Big) U_1, \quad L_2[U_1] = \Big(\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} \frac{\partial}{\partial\Phi_{kl}} + \sum_{\nu=1}^{h} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial\Phi_\nu}\Big)^2 U_1,$$

$$L_3[U_1] = \Big(\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} \frac{\partial}{\partial\Phi_{kl}} + \sum_{\nu=1}^{h} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial\Phi_\nu}\Big)^3 U_1, \quad F_1 = F_1 = F(\Phi, x, y, \sum_{k,l=1}^{N} Z_{kl} a_{kl} \cos\Phi_{kl}, \ldots).$$

Die Funktion U_1 erfüllt die folgenden Randbedingungen:

$$L_{ij}[U_1] = 0, \quad L_{2j}[U_1] = 0, \quad L_{1k}[U_1] = 0, \quad L_{2k}[U_1] = 0 \tag{3.24}$$
$$(j = x;\ j = 0, b.\quad k = y;\ k = 0, c).$$

Setzen wir die Ausdrücke von U_1 und F_1 gemäß (3.7) in (3.23) ein und vergleichen wir die Koeffizienten der Eigenfunktionen, dann erhalten wir

$$L_3[U_{1kl}] + \xi L_2[U_{1kl}] + \Omega_{kl}^2 L_1[U_{1kl}] + \xi \Omega_{kl}^2 U_{1kl} = F_{1kl}$$
$$+ [(2\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + 2\xi a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl}) \cos\Phi_{kl} + (2\xi \Omega_{kl} A_{1kl} - 2 a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl}) \sin\Phi_{kl}] \tag{3.25}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots N),$$

$$L_3[U_{1\,rs}] + \xi L_2[U_{2rs}] + \Omega_{rs}^2 L_1[U_{1rs}] + \xi \Omega_{rs}^2 U_{1rs} = F_{1rs} \tag{3.26}$$
$$[r, s = (N+1), (N+2), \ldots].$$

Zur Bestimmung der unbekannten Funktionen U_{1rs} werden die bekannten Funktionen F_{1rs} und U_{1rs} nach Φ, Θ in der Form

$$F_{1rs} = \sum_{p,q} F_{1pq}^{rs}(a)\, e^{i(q_{11}\Phi_{11} + q_{12}\Phi_{12} + \ldots + q_{NN}\Phi_{NN} + p_1\Theta_1 + p_2\Theta_2 + \ldots + p_h\Theta_h)}$$
$$= \sum_{p,q} F_{1pq}^{rs}(a)\, e^{i(q\Phi + p\Theta)}, \quad F_{1pq}^{rs}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{N^2+h}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_{1rs}(a, \Phi, \Theta)\, e^{i(p\Theta + q\Phi)}\, d\Phi\, d\Theta, \tag{3.27}$$

$$U_{1rs} = \sum_{p,q} U_{1pq}^{rs}(a)\, e^{i(q_{11}\Phi_{11} + q_{12}\Phi_{12} + \ldots + q_{NN}\Phi_{NN} + p_1\Theta_1 + p_2\Theta_2 + \ldots + p_h\Theta_h)}$$
$$= \sum_{p,q} U_{1pq}^{rs}(a)\, e^{i(q\Phi + p\Theta)}, \quad q = (q_{11}, q_{12}, \ldots q_{NN}), \quad p = (p_1, p_2, \ldots p_h) \tag{3.28}$$

entwickelt. Dabei sind $F_{1pq}^{rs}(a)$ bekannte Größen und $U_{1pq}^{rs}(a)$ noch zu bestimmen.
Durch Einsetzen von (3.27) (3.28) in (3.26) ergibt sich:

$$\sum_{p,q} (\xi + iL_1)(\Omega_{kl}^2 - L_2)\, U_{1pq}^{kl}(a)\, e^{i(q\Phi + p\Theta)} = \sum_{p,q} F_{1pq}^{kl}(a)\, e^{i(q\Phi + p\Theta)}$$
$$+ [(2\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + 2\xi a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl}) \cos\Phi_{kl} + (2\xi \Omega_{kl} A_{1kl} - 2 a_{kl} \Omega_{kl}^2 B_{1kl}) \sin\Phi_{kl}] \tag{3.29}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots N)$$

$$\sum_{p,q} (\xi + iL_1)(\Omega_{rs}^2 - L_2)\, U_{1pq}^{rs}(a)\, e^{i(q\Phi + p\Theta)} = \sum_{p,q} F_{1pq}^{rs}(a)\, e^{i(q\Phi + p\Theta)} \tag{3.30}$$
$$[r, s = (N+1), (N+2), \ldots]$$

mit

$$L_1 = \Big(\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} q_{kl} + \sum_{\nu=1}^{h} \gamma_\nu p_\nu\Big), \quad L_2 = \Big(\sum_{k,l=1}^{N} \Omega_{kl} q_{kl} \ \ \sum_{\nu=1}^{h} \gamma_\nu p_\nu\Big)^2.$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten in den Gleichungen (3.29) (3.30) erhalten wir

$$U_{1pq}^{rs}(a) = \frac{F_{1pq}^{rs}(a)}{[(\xi + iL_1)(\Omega_{rs}^2 - L_2)]} \tag{3.31}$$

Für $r, s \leqslant N$ folgt $(\Omega_{rs}^2 - L_2) \neq 0$.

Wird dieser Ausdruck in (3.28) und das Ergebnis in (3.7) eingesetzt, so ergibt sich der Ausdruck zur Bestimmung von U_1:

$$U_1 = \sum_{p,q} \sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{\int_0^b \int_0^c \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_1 \, Z_{rs} \, e^{-i(q\Phi+p\Theta)} \, dx\, dy\, d\Phi\, d\Theta \; Z_{rs} \, e^{i(q\Phi+p\Theta)}}{(2\pi)^{N^2+h} \left[(\xi + iL_1)(\Omega_{rs}^2 - L_2) \int_0^b \int_0^c Z_{rs}^2 \, dx\, dy \right.} \tag{3.32}$$

Für $r, s \leqslant N$ folgt $(\Omega_{rs}^2 - L_2) \neq 0$.

Aus Gleichung (3.29) ist es leicht zu sehen, daß in der Entwicklung (3.27) die Funktion F_{1rs} die Größe $\cos\Phi_{kl}$, $\sin\Phi_{kl}$ mit den Koeffizienten

$$q_{nm} = q_{nm\mu}^{kl}, \quad p_\nu = p_{\nu\mu}^{kl}, \qquad (n, m = 1, 2 \dots N;\ v = 1, 2, \dots h) \tag{3.33}$$

enthält.

Mit der Annahme, daß die Funktion U_{1rs} diese Größen nicht enthält, ergibt sich aus (3.33) die Beziehung

$$[\Omega_{kl}^2 - (\sum_{n,m=1}^{N} q_{nm\mu}^{kl} \Omega_{nm} + \sum_{\nu=1}^{h} p_{\nu\mu}^{kl} \gamma_\nu)^2] = 0 \tag{3.34}$$

und

$$[(2\Omega_{kl}^2 A_{1kl} + 2\xi a_{kl} \Omega_{kl} A_{1kl}) \cos\Phi_{kl} + (2\xi \Omega_{kl} A_{1kl} - 2 a_{kl} \Omega_{kl}^2 B_{1kl}) \sin\Phi_{kl}] = - \sum_{p,q} F_{1pq}^{kl}(a)\, e^{i(q_\mu^{kl}\Phi + p_\mu^{kl}\Phi)} \tag{3.35}$$

$$q_{11\mu}^{kl} \Phi_{11} + q_{12\mu}^{kl} \Phi_{12} + \dots + q_{NN\mu}^{kl} \Phi_{NN} + p_{1\mu}^{kl} \Phi_1 + p_{2\mu}^{kl} \Phi_2 + \dots + p_{h\mu}^{kl} \Phi_h = \pm \Phi_{kl} + \kappa_{kl\mu}. \tag{3.36}$$

Außerdem erhalten wir aus (3.21)

$$q_{11}^{(j)} \Phi_{11} + q_{12}^{(j)} \Phi_{12} + \dots + q_{NN}^{(j)} \Phi_{NN} + p_1^{(j)} \Theta_1 + p_2^{(j)} \Theta_2 + \dots + p_h^{(j)} \Theta_h = q_{11}^{(j)} \psi_{11} + q_{12}^{(j)} \psi_{12} + \dots + q_{NN}^{(j)} \psi_{NN}.$$

Durch Multiplizieren der Gleichung (3.37) mit dem Multiplikator $R_{kl\mu}^{(j)}$, der nach Voraussetzung bekannt ist, durch Summieren der erhaltenen Gleichungen nach j und danach durch Gleichsetzen mit (3.36) ergeben sich die zu bestimmenden Größen

$$q_{nm\mu}^{kl} = \sum_{j=1}^{\rho} q_{nm}^{(j)} R_{kl\mu}^{(j)}, \quad (k, l \neq n, m) \tag{3.38}$$

$$q_{kl\mu}^{kl} = \pm 1 + \sum_{j=1}^{\rho} q_{kl}^{(j)} R_{kl\mu}^{(j)}, \tag{3.39}$$

$$p_{\nu\mu}^{kl} = \sum_{j=1}^{\rho} p_\nu^{(j)} R_{kl\mu}^{(j)}, \tag{3.40}$$

$$\kappa_{kl\mu} = \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{n,m=1}^{N} R_{kl\mu}^{(j)} q_{nm}^{(j)} \psi_{nm}. \tag{3.41}$$

Setzen wir die Größen q_μ^{kl}, p_μ^{kl} aus (3.39) und (3.40) in die Gleichung (3.35) ein und vergleichen wir danach die Koeffizienten von $\cos\Phi_{kl}$ und $\sin\Phi_{kl}$, dann erhalten wir zur Bestimmung A_{1kl} und B_{1kl} die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Omega_{kl}^2 A_{1kl} + \xi a_{kl} \Omega_{kl} B_{1kl} &= G_{kl}, \\ \xi \Omega_{kl} A_{1kl} - a_{kl} \Omega_{kl}^2 B_{1kl} &= H_{kl}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Daraus ergibt sich

$$A_{1kl} = -\frac{(\Omega_{kl} G_{kl} + \xi H_{kl})}{\Omega_{kl} (\Omega_{kl}^2 + \xi^2)}, \qquad B_{1kl} = -\frac{(\xi G_{kl} - \Omega_{kl} H_{kl})}{a_{kl} \Omega_{kl} (\Omega_{kl}^2 + \xi^2)}, \tag{3.43}$$

mit

$$G_{kl} = \sum_\mu \exp(i \sum_{j=1}^{\rho} R_{kl\mu}^{(j)} \psi_j) \frac{1}{(2\pi)^{N^2+h}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_{1kl}(a, \Phi, \Theta) \exp(-i \sum_{j=1}^{\rho} R_{kl\mu}^{(j)} \psi_j) \cos\Phi_{kl} \, d\Phi_{11} \, d\Phi_{12} \dots$$

$$\dots d\Phi_{NN} \, d\Theta_1 \, d\Theta_2 \dots d\Theta_h,$$

$$H_{kl} = \sum_{\mu} \exp\left(i \sum_{j=1}^{\rho} R^{(j)}_{kl\mu} \psi_j\right) \frac{1}{(2\pi)^{N^2+h}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_{1kl}(a, \Phi, \Theta) \exp\left(-i \sum_{j=1}^{\rho} R^{(j)}_{kl\mu} \bar{\psi}\right) \sin\Phi_{kl}\, d\Phi_{11}\, d\Phi_{12} \dots$$

Dabei ist

$$\dots d\Phi_{NN}\, d\Theta_1\, d\Theta_2 \dots d\Theta_h$$

$$\psi_j = q^{(j)}_{11} \psi_{11} + q^{(j)}_{12} \psi_{12} + \dots + q^{(j)}_{NN} \psi_{NN} ,$$

$$\bar{\psi}_j = q^{(j)}_{11} \Phi_{11} + q^{(j)}_{12} \Phi_{12} + \dots + q^{(j)}_{NN} \Phi_{NN} + p^{(1)}_1 \Theta_1 + p^{(j)}_2 \Theta_2 + \dots p^{(j)}_h \Theta_h .$$

Im Fall der allgemeinen Resonanz ist damit die Lösung von (3.19) in erster Näherung bestimmt.

4. Anwendung

4.1. Aufgabenstellung

Als Anwendung der vorangehenden Theorie wird die Schwingung der rechteckigen Platte in Bild 1 untersucht. Die Platte liegt auf dem elastischen Fundament mit den zwei Bettungskoeffizienten k_1, k_2 und unter Wirkung einer gleichverteilten harmonischen Belastung $q(t)$. Die Platte ist am Rand gelenkig gelagert. In diesem Fall hat die Bewegungsgleichung der Platte die Form

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\omega^2 \nabla^4 w - k_2 \nabla^2 w + k_1 w) + \xi(\omega^2 \nabla^4 w - k_2 \nabla^2 w + k_1 w)$$

$$= [\mu(\xi\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \omega^2 \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^4 w) + \xi q(t) + \frac{\partial}{\partial t} q(t)] \tag{4.1}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} w \Big|_{x=0,b} &= 0 , \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Big|_{x=0,b} = 0 , \\ w \Big|_{y=0,c} &= 0 , \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{y=0,c} = 0 . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Hierbei sind ξ, ω^2 Konstante gemäß (1.6).

4.2. Lösung

Die Belastung der Platte wird in der Form

$$q(t) = \mu\, q_0 \sin \gamma t \tag{4.3}$$

angenommen.

Die Reaktionsbelastung des Fundaments hat die Form

$$f = -k_1 w^3 - \frac{k_2}{2} [(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}] . \tag{4.4}$$

In diesem Fall besitzt die rechte Seite der Gleichung (4.1) die Form

$$F = \left\{\xi \; -k_1 w^3 - \frac{k_2}{2} [(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}]\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{- k_1 w^3\right.$$

$$\left. - \frac{k_2}{2} [(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}]\right\} - \omega^2 \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^4 w) + \xi q_0 \sin \gamma t + q_0 \gamma \cos \gamma t . \tag{4.5}$$

Aus den Ergebnissen des dritten Abschnitts erhalten wir in erster Näherung die Lösung der Randwertaufgabe (4.1), (4.2) für den Fall der Grundresonanz ($p = q = 1$):

$$w = \frac{\sin \pi x}{b} \frac{\sin \pi y}{c} a \cos(\gamma t + \psi) . \tag{4.6}$$

Die Größen a und ψ werden dabei aus den Gleichungen

$$2\gamma \frac{da}{dt} = -h \xi \gamma a - P_0 \cos \psi ,$$

$$2a\gamma\,\frac{d\psi}{dt} = a(\Omega_{11}^2 - \gamma^2) - Q\,a^3 + h\,\Omega_{11}^2\,a + p_0\,\sin\psi \tag{4.7}$$

bestimmt. In (4.7) sind

$$h = \mu\,\frac{\omega^2 E_2 \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)^2}{E_1(\Omega_{11}^2 + \xi^2)}\,, \qquad p_0 = \mu\,\frac{16\,q_0}{\pi^2}\,, \tag{4.8}$$

$$Q = \mu\,\frac{9}{64}\left[-3k_1 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{\pi^4}{b^4} + \frac{\pi^4}{c^4}\right)\right], \tag{4.9}$$

$$\Omega_{11}^2 = \left[D\left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)^2 + k_2\left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right) + k_1\right]. \tag{4.10}$$

Wird die rechte Seite von (4.1) gleich Null gesetzt, dann ergibt sich die Gleichung der Resonanzkurve:

$$f(a_0, \gamma^2) = \left[a_o(\Omega_{11}^2 - \gamma^2) - Q\,a_0^3 + h\,\Omega_{11}^2\,a_0\right]^2 + h^2\,\xi^2\,\gamma^2\,a_0^2 - p_0^2 = 0\,, \tag{4.11}$$

$$\gamma^2 = -Q\,a_0^2 + (1+h)\,\Omega_{11}^2 \pm \sqrt{\frac{p_0^2}{a_0^2} - h^2\,\xi^2\,\gamma^2}\;. \tag{4.12}$$

Die Bilder 3, 4 und 5 zeigen die Resonanzkurven für

$\Omega_{11}^2 = 1,\quad Q = -1,\quad p_0^2 = 0{,}45,\quad h^2 = 0{,}09,\quad \xi^2 = 2,3\,,$

$\Omega_{11}^2 = 1,\quad Q = +1,\quad p_0^2 = 0{,}45,\quad h^2 = 0{,}09,\quad \xi^2 = 2,3\,,$

$\Omega_{11}^2 = 1,\quad Q = 0,\quad p_0^2 = 0{,}45,\quad h^2 = 0{,}09,\quad \xi^2 = 2,3\,.$

Zur Untersuchung der Stabilität der erhaltenen stationären Lösungen betrachten wir die Variationsgleichungen von (4.7), sie haben die Form

$$\begin{aligned} 2\gamma\,\frac{d\,\delta a}{dt} &= -h\,\xi\,\gamma\,\delta a + p_0\,\sin\psi_0\,\delta\psi\,,\\ 2a_0\gamma\,\frac{d\,\delta\psi}{dt} &= \left[(\Omega_{11}^2 - \gamma^2) - 3Q\,a_0^2 + h\,\Omega_{11}^2\right]\delta a + p_0\,\cos\psi_0\,\delta\psi\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die charakteristische Gleichung von (4.13) besitzt die Form

$$4\gamma^2\Lambda^2 + \left[(\Omega_{11}^2 - \gamma^2) - Q\,a_0^2 + h\,\Omega_{11}^2\right]\left[(\Omega_{11}^2 - \gamma^2) - 3Q\,a_0^2 + h\,\Omega_{11}^2\right] + h^2\,\xi^2\,\gamma^2 = 0\,. \tag{4.14}$$

Daraus folgt die Stabilitätsbedingung der stationären Lösung:

$$\left[(\Omega_{11}^2 - \gamma^2) - Q\,a_0^2 + h\,\Omega_{11}^2\right]\left[(\Omega_{11}^2 - \gamma^2) - 3Q\,a_0^2 + h\,\Omega_{11}^2\right] + h^2\,\xi^2\,\gamma^2 > 0\,. \tag{4.15}$$

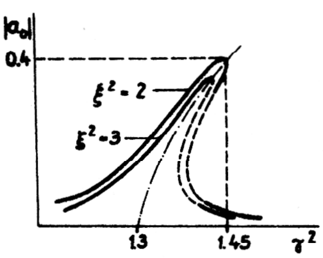

Bild 3

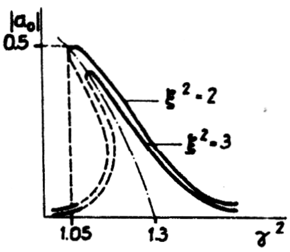

Bild 4

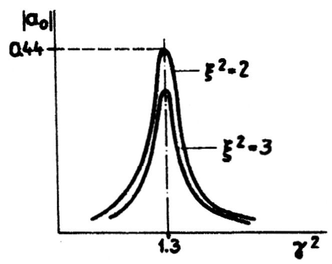

Bild 5

Aus (4.11) sehen wir, daß die Bedingung (4.15) der Bedingung

$$\frac{\partial f(a_0, \gamma^2)}{2 a_0 \partial a_0} > 0 \tag{4.16}$$

äquivalent ist.

Die Bedingung (4.16) zeigt, daß nur die ausgezogenen Teile der Resonanzkurven stabil sind.

5. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

1. Die Bewegungsgleichung der dünnen rechteckigen Platte mit elastisch-plastischen Materialeigenschaften wird erstellt. Im Unterschied zur Bewegungsgleichung der Platte mit Material nach dem Hookeschen Modell ist sie hier eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung in der Zeitvariablen t.
2. Die asymptotischen Lösungen dieser Gleichungen werden aufgebaut. Sie sind nicht nur für zweidimensionale, sondern auch für eindimensionale Aufgaben anwendbar.
3. In Abhängigkeit von der Bettungskoeffizienten k_1, k_2 können die Resonanzkurven von „hartem" oder „weichem" Typ ($Q > 0$) sein.
4. Obwohl keine Dämpfung berücksichtigt ist, kann die Amplitude der stationären Lösung nicht bis unendlich zunehmen, d. h. die elastisch-plastischen Materialeigenschaften haben die Wirkung einer Dämpfung. Der Resonanzbereich wird im Vergleich zum Hookeschen Modell geringfügig verschoben.

LITERATUR

[1] Nguyen van Dao; Osinsky, Z.: Parametric oscillation of an uniform beam in a rheological model. Proceedings of second conference on mechanics. Hanoi 1977.

[2] Nguyen van Dao: Nonlinear oscillations of high order systems. National center for scientific research of Vietnam 1979.

[3] Kaiser, W.; Pankratz, G.; Vater, B.: Beitrag zur theoretischen Untersuchung des dynamischen Verhaltens mechanischer Systeme mit viskoelastischen Materialeigenschaften. Beitrag CXLV, Forschungsberichte zur Tagung „Dynamik und Getriebetechnik" Dresden 1979. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979.

[4] Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.: Асимптотические решения уравнений в частных производных. Изд. Киевск. Университета, Киев, 1976.

[5] Ржаницын А. Р.: Теория ползучести. Москва, 1968

[6] Чан Ким Тьи: Асимптотические решения уравнений в частных производных высшего порядка. Укр. мат. журнал, 34 (1982), № 3, с. 253 – 256.

[7] Хоанг Ван Да: Параметрические колебания вязкоупругой тонкой прямоугольной пластины. Прикладная механика, Киев, 1983.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. Nguyen van Dao
Nationales Forschungszentrum der SR Vietnam

Dipl.-Ing. Hoang van Da
Polytechnische Hochschule Hanoi