

Behandlung der Kraftübertragung zwischen parallelen elastischen Scheiben durch Integralgleichungen II

P. Pfau

1. Aufgabenstellung

In einem vorangehenden Aufsatz [1] wurde für die Kraftübertragung zwischen zwei parallelen elastischen Scheiben unendlicher Ausdehnung, die in einem begrenzten Kontaktgebiet H Schubelastisch verbunden sind und allein im Unendlichen belastet werden, das folgende Integralgleichungssystem 2. Art hergeleitet (vgl. [1], Gl. (13)):

$$\left. \begin{aligned} p_x(x, y) - \lambda \frac{1}{A_H} \iint_H [\bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) p_x(\xi, \eta) + \bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) p_y(\xi, \eta)] d\xi d\eta &= \bar{C}_x - \bar{W}_y \\ p_y(x, y) - \lambda \frac{1}{A_H} \iint_H [\bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) p_x(\xi, \eta) + \bar{G}_{yy}(x, y, \xi, \eta) p_y(\xi, \eta)] d\xi d\eta &= \bar{C}_y + \bar{W}_x \end{aligned} \right\} (1)$$

$(x, y) \in H$

Die gesuchten Funktionen $p_x(x, y)$ und $p_y(x, y)$ beschreiben die Verteilung der tangentialen Kontaktkräfte, die zwischen den Scheiben übertragen werden, über das Kontaktgebiet, vgl. Bild 1. Es handelt sich um stetige, beschränkte Funktionen mit stetigen und beschränkten Ableitungen.

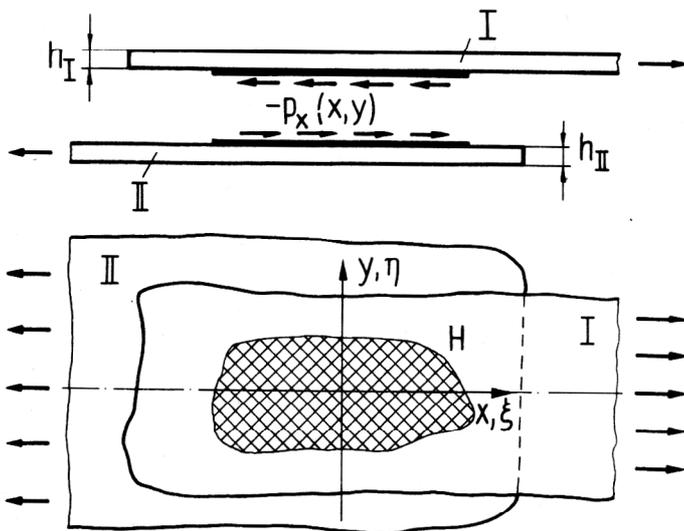


Bild 1
Prinzipskizze des behandelten Lastfalles

Die Einflußfunktionen $\bar{G}_{ik}(x, y, \xi, \eta)$ beschreiben, bis auf einen konstanten Faktor, das Verschiebungsfeld in der unendlich ausgedehnten elastischen Scheibe unter Einzellastangriff im Quellpunkt (ξ, η) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) &= (3-\nu) \ln |r| + (1+\nu) \frac{(y-\eta)^2}{r^2} \\ \bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) &= \bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) = -(1+\nu) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} \\ \bar{G}_{yy}(x, y, \xi, \eta) &= (3-\nu) \ln |r| + (1+\nu) \frac{(x-\xi)^2}{r^2} \end{aligned} \right\} (2)$$

$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$

Für beide Scheiben wurden gleiche Querdehnzahlen ν vorausgesetzt. A_H bezeichnet den Flächeninhalt des Kontaktgebietes, λ ist der dimensionslose Parameter des Integralgleichungssystems:

$$\lambda = \frac{1+\nu}{4\pi} \left(\frac{1}{E_I h_I} + \frac{1}{E_{II} h_{II}} \right) \frac{A_H}{\beta} \quad (3)$$

Mit $E_I h_I$, $E_{II} h_{II}$ werden die beiden Scheibensteifigkeiten, mit β der Nachgiebigkeitskoeffizient der Schubkopplung bezeichnet, der die Differenzen der Scheibenverschiebungen mit den jeweiligen Komponenten der übertragenen Tangentialkraft verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} v_{xII}(x, y) - v_{xI}(x, y) &= \beta p_x(x, y) \\ v_{yII}(x, y) - v_{yI}(x, y) &= \beta p_y(x, y) \end{aligned} \right\} (4)$$

$(x, y) \in H$

Die rechten Seiten der Integralgleichungen enthalten drei Parameter, die, vorerst unbekannt, durch drei Nebenbedingungen festgelegt sind, die die Integralgrößen der Kraftübertragung angeben:

$$\left. \begin{aligned} \iint_H p_x(\xi, \eta) d\xi d\eta &= -F_x \\ \iint_H p_y(\xi, \eta) d\xi d\eta &= -F_y \\ \iint_H [-p_x(\xi, \eta) \eta + p_y(\xi, \eta) \xi] d\xi d\eta &= -M. \end{aligned} \right\} (5)$$

In [1] wird auf die Lösungseigenschaften des angegebenen Systems eingegangen. Trotz der logarithmischen Singularitäten in den Hauptdiagonalgliedern der Kernmatrix bleibt die Fredholmsche Theorie voll anwendbar, insbesondere ist die gleichmäßige Konvergenz der Neumannschen Reihen für kleine λ sichergestellt. Da alle Eigenwerte des Systems reell und negativ sind, treten im gegebenen physikalischen Zusammenhang keine Eigenwerte auf.

Im vorliegenden Aufsatz sollen Ausgangsgleichungen und Nebenbedingungen zu einem Integralgleichungssystem mit bekannten rechten Seiten und erweiterten Kernfunktionen verdichtet werden. Weitere Themen der Arbeit sind die Neumannsche Reihenentwicklung der Lösungsfunktionen, deren qualitative Auswertung und de-

ren Interpretation als Ergebnis eines mechanisch begründeten Iterationsverfahrens.

Um den Formelaufwand in Grenzen zu halten, wird der Symmetriefall der Übertragung einer Kraft F_x über eine Kontaktfläche H behandelt, die gegenüber der x -Achse symmetrisch ausgebildet ist. Es gilt also

$$F_y = 0, \quad M = 0 \quad (6)$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} p_x(x, -y) &= p_x(x, y) \\ p_y(x, -y) &= -p_y(x, y) \\ \bar{C}_y &= 0, \quad \bar{W} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2. Kompaktere Formulierung des Problems

Die Transformation des Ausgangssystems (1) und seiner Nebenbedingungen (5) zu einem verdichteten System mit bekannten rechten Seiten gelingt mit Hilfe einer Integrationsprozedur, die die in den Nebenbedingungen formulierten Integralgrößen in die Grundgleichungen einbezieht. Integration der ersten Gleichung (1) über das Kontaktgebiet im x, y -System ergibt unter Beachtung von (5), (6) und (7)

$$\begin{aligned} & \iint_H p_x(x, y) dx dy - \lambda \iint_H \left\{ \frac{1}{A_H} \iint_H [\bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) p_x(\xi, \eta) \right. \\ & \left. + \bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) p_y(\xi, \eta)] d\xi d\eta \right\} dx dy \\ & = C_x \iint_H dx dy = C_x A_H, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_x &= -\frac{F_x}{A_H} - \lambda \frac{1}{A_H} \iint_H \left\{ \frac{1}{A_H} \iint_H [\bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) p_x(\xi, \eta) \right. \\ & \left. + \bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) p_y(\xi, \eta)] dx dy \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Damit lautet das verdichtete Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} & p_x(x, y) \\ & - \lambda \frac{1}{A_H} \iint_H \left\{ [\bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) \right. \\ & - \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) dx dy] p_x(\xi, \eta) + [\bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) \\ & - \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) dx dy] p_y(\xi, \eta) \left. \right\} d\xi d\eta = -\frac{F_x}{A_H}, \\ & p_y(x, y) \\ & - \lambda \frac{1}{A_H} \iint_H \left\{ \bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) p_x(\xi, \eta) \right. \\ & \left. + \bar{G}_{yy}(x, y, \xi, \eta) p_y(\xi, \eta) \right\} d\xi d\eta = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Die in den eckigen Klammern stehenden Kernfunktionen der ersten Gleichung sind gegenüber den ursprünglichen Einflußfunktionen auf charakteristische Weise erweitert. Es handelt sich um eine Normierung der Einflußfunktionen im x, y -System dergestalt, daß eine Integration der erweiterten Kernfunktionen über das Kontaktgebiet im x, y -System den Wert Null ergibt

$$\begin{aligned} & \iint_H [\bar{G}_{xk}(x, y, \xi, \eta) \\ & - \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xk}(x, y, \xi, \eta) dx dy] dx dy \\ & = (1 - \frac{A_H}{A_H}) \iint_H \bar{G}_{xk}(x, y, \xi, \eta) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

daß also, geometrisch ausgedrückt, positive und negative Teilvolumina zwischen Einflußfläche und neuem Nullniveau gleich groß sind und sich gegenseitig aufheben!

3. Neumannsche Reihenentwicklung der Lösungsfunktionen

Die Neumannschen Reihen der gesuchten Lösungsfunktionen entsprechen dem Ergebnis einer Potenzreihenentwicklung des Lösungsprofils nach Potenzen des Integralgleichungsparameters λ . Ihre Berechnung erfolgt am zweckmäßigsten mit dem Ansatz

$$p_x(x, y) = p_{x_0}(x, y) + \lambda p_{x_1}(x, y) + \lambda^2 p_{x_2}(x, y) + \dots \quad (12)$$

$$p_y(x, y) = p_{y_0}(x, y) + \lambda p_{y_1}(x, y) + \lambda^2 p_{y_2}(x, y) + \dots,$$

der in (10) einzusetzen ist, und durch anschließenden Koeffizientenvergleich aller Glieder gleicher λ -Potenz.

Das Ergebnis besteht in folgender rekursiver Berechnungsprozedur für die Reihenkoeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} p_{x_0}(x, y) &= -\frac{F_x}{A_H} = \text{const} \\ p_{y_0}(x, y) &= 0 \\ p_{x_n}(x, y) &= \frac{1}{A_H} \iint_H \left\{ [\bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) \right. \\ & - \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) dx dy] p_{x_{n-1}}(\xi, \eta) \\ & \left. + [\bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) \right. \\ & - \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xy}(x, y, \xi, \eta) dx dy] p_{y_{n-1}}(\xi, \eta) \left. \right\} d\xi d\eta \\ p_{y_n}(x, y) &= \frac{1}{A_H} \iint_H \left\{ \bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{x_{n-1}}(\xi, \eta) \right. \\ & \left. + \bar{G}_{yy}(x, y, \xi, \eta) \cdot p_{y_{n-1}}(\xi, \eta) \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Die nullten Glieder der Neumannschen Reihen erweisen sich also im behandelten Symmetriefall nicht nur als unabhängig von λ , sondern auch als unabhängig von den Ortskoordinaten x und y . Das p_{x_0} -Ergebnis bringt die gleichmäßige Verteilung der Tangentialkraft F_x über das Kontaktgebiet H zum Ausdruck, die Querkomponente p_{y_0} verschwindet. Dieses Teilergebnis stimmt mit der exakten Lösung des Problems im Grenzfall $\lambda = 0$ über-

ein, also im Fall extrem nachgiebiger Schubkopplung [1].

Das tatsächliche Tangentialkraftprofil über dem Kontaktgebiet wird durch die höheren Reihenglieder beschrieben. Besondere Bedeutung kommt dabei den beiden linearen Reihengliedern zu. Diese geben die Grundtendenz an, mit der sich das Tangentialkraftrelief bei langsam anwachsendem λ -Wert aus dem Niveau der gleichmäßigen Verteilung heraushebt. Die Formeln für die entsprechenden Reihenkoeffizienten sind besonders einfach aufgebaut:

$$p_{x1}(x, y) = -\frac{F_x}{A_H} \iint_H \frac{1}{A_H} [\bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) - \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) dx dy] d\xi d\eta, \quad (15)$$

$$p_{y1}(x, y) = -\frac{F_x}{A_H} \iint_H \frac{1}{A_H} \bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (16)$$

Es handelt sich um Integralfunktionen der einfachen bzw. normierten Einflußfunktionen (2) der unendlich ausgedehnten elastischen Scheibe unter Einzellastangriff. Damit wird aber eine qualitative Voraussage des Ergebnisses möglich. Der zweite Summand des Koeffizienten $p_{x1}(x, y)$ liefert eine Konstante, leistet also keinen Beitrag zur Beschreibung des eigentlichen Reliefs. Seine Bedeutung für das Resultat besteht nach (11) darin, daß das Integral des linearen Reihengliedes über das Kontaktgebiet verschwindet, daß also die entsprechenden Tangentialkräfte Gleichgewichtsgruppen bilden:

$$\iint_H p_{x1}(x, y) dx dy = 0. \quad (17)$$

Analoge Nullbedingungen gelten auch für die höheren Reihenglieder. Aus (14) und (11) folgt

$$\iint_H p_{xn}(x, y) dx dy = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Für $p_{yn}(x, y)$ ist diese Eigenschaft aus Symmetriegründen (7) ohnehin gegeben.

Das konkrete $p_{x1}(x, y)$ -Relief wird von der klassischen Einflußfunktion $\bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta)$ bestimmt. Aus (15) und (2) folgt

$$p_{x1}(x, y) = \frac{F_x}{A_H} \iint_H \frac{1+\nu}{4\pi A_H} [(3-\nu) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + (1+\nu) \frac{(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}] d\xi d\eta + C. \quad (19)$$

Die Einflußfunktion wird also im Aufpunkt (x, y) festgehalten und über alle Quellpunkte (ξ, η) des Kontaktgebietes integriert. Das kann aber wegen der Symmetrie der Einflußfunktion auch anders interpretiert werden: festgehalten wird der Quellpunkt (x, y) , integriert wird über alle Aufpunkte (ξ, η) des Kontaktgebietes! Berechnet wird also das Volumen zwischen Einflußfläche und altem Nullniveau, wobei der Pol der Einflußfläche in den interessierenden Feldpunkt (x, y) gelegt wird. Von wesentlichem Einfluß ist der mittlere Logarithmuswert der

Abstände zwischen Pol und allen anderen Feldpunkten. Dieser Wert ist relativ klein (bzw. negativ), wenn der Pol in der Mitte der Kontaktfläche liegt, wächst aber zusehends an, wenn der Pol aus der Mitte heraus an den Rand des Kontaktgebietes rückt. Größtwerte sind in jenen Randpunkten zu erwarten, die relativ weit von der Mitte entfernt liegen. Auf diese Weise läßt sich eine geometrische Vorstellung von der Gesetzmäßigkeit gewinnen, daß sich Tangentialkraftprofile der behandelten Problemklasse immer trogförmig ausbilden, mit niedrigen Lastwerten im Inneren und mit hohen in den Randbereichen des jeweiligen Kontaktgebietes, vgl. [2]. Die Trogform ist nie rotationssymmetrisch, auch nicht bei rotationssymmetrischen Kontaktflächen, denn \bar{G}_{xx} enthält ja neben der zitierten Logarithmusfunktion eine weitere Funktion mit Winkeleinfluß, die etwas höhere Belastungen der Randgebiete mit großen y -Abständen bewirkt.

4. Mechanisch begründetes Iterationsverfahren

Die vorgestellten Ergebnisse können auch auf rein mechanischem Wege gewonnen werden, und zwar mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, das die gleichmäßige Verteilung der übertragenen Tangentialkraft über das Kontaktgebiet als Startnäherung verwendet:

$$p_{x \text{ start}} = p_{x_0} = -\frac{F_x}{A_H}, \quad p_{y \text{ start}} = p_{y_0} = 0. \quad (20)$$

Eine erste Korrektur dieser Näherung

$$p_x = -\frac{F_x}{A_H} + \Delta_1 p_x; \quad p_y = \Delta_1 p_y \quad (21)$$

dient dem Ziel, das gestörte Gesetz der Schubverformung (4) wieder herzustellen. Die von der Startnäherung hervorgerufenen Verschiebungen

$$v_{xII} = -\frac{F_x}{A_H} \frac{1+\nu}{4\pi E_{II} h_{II}} \iint_H \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + C_{xII}$$

$$v_{yII} = -\frac{F_x}{A_H} \frac{1+\nu}{4\pi E_{II} h_{II}} \iint_H \bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$v_{xI} = \frac{F_x}{A_H} \frac{1+\nu}{4\pi E_I h_I} \iint_H \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + C_{xI}$$

$$v_{yI} = \frac{F_x}{A_H} \frac{1+\nu}{4\pi E_I h_I} \iint_H \bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (22)$$

geben den Bedingungen (4) die folgende Gestalt:

$$-\frac{F_x}{A_H} + \Delta_1 p_x = -\frac{F_x}{A_H} \lambda \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \bar{C}_x, \quad (23)$$

$$\Delta_1 p_y = -\frac{F_x}{A_H} \lambda \frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{yx}(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (24)$$

Der Parameter λ ist in (3) definiert. Da die Korrekturkräfte $\Delta_1 p_x$ das vorhandene Kräftegleichgewicht nicht verletzen dürfen, müssen sie eine Gleichgewichtsgruppe bilden:

$$\iint_H \Delta_1 p_x(x, y) dx dy = 0. \quad (25)$$

Diese Forderung führt auf eine Bestimmungsgleichung für die Konstante \bar{C}_x mit dem Ergebnis

$$\bar{C}_x = -\frac{F_x}{A_H} + \frac{F_x}{A_H} \lambda \frac{1}{A_H}$$

$$\iint_H \left[\frac{1}{A_H} \iint_H \bar{G}_{xx}(x, y, \xi, \eta) dx dy \right] d\xi d\eta. \quad (26)$$

Mit (23), (24) und (26) sind die Korrekturkräfte bestimmt. Die Ergebnisausdrücke stimmen gerade mit den linearen Reihengliedern (15) und (16) der entsprechenden Neumannschen Reihen überein:

$$\Delta_1 p_x = \lambda p_{x1}(x, y), \quad \Delta_1 p_y = \lambda p_{y1}(x, y). \quad (27)$$

Das angegebene Korrekturverfahren kann beliebig oft wiederholt werden. Höhere Korrekturglieder, angesetzt, um das erneut verletzte Gesetz der Schubverformung (4) wieder herzustellen, führen auf die höheren Reihenglieder der Neumannschen Reihen:

$$\Delta_n p_x = \lambda^n p_{xn}(x, y), \quad \Delta_n p_y = \lambda^n p_{yn}(x, y). \quad (28)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Damit liegt ein mechanisch begründetes Iterationsverfahren vor, das sich auch auf andere Startnäherungen verallgemeinern läßt.

Das Verfahren macht auch den Mechanismus deutlich, mit dem die Konvergenz der Neumannschen Reihen bei zunehmender Vergrößerung des λ -Wertes verloren geht, nämlich durch Überkompensation vorhandener Fehler, durch Berechnung überhöhter Korrekturglieder, aus denen alternierende Reihen mit wachsenden Gliedern resultieren. Dem kann durch geeignete Dämpfung der Korrekturglieder begegnet werden, und genau darin besteht auch das Wesen von Verfahren der Konvergenzbeschleunigung und der analytischen Fortsetzung der Lösungen über den ursprünglichen Konvergenzkreis der Neumannschen Reihen hinaus, vgl. z. B. [3].

5. Zahlenbeispiel

Als einfachstes Beispiel sei wieder, wie in [1], die Übertragung einer Kraft F_x längs einer auf der x-Achse angeordneten geraden Naht der Länge $2a$ mit konstanter Schubsteifigkeit betrachtet.

Gesucht ist der Verlauf der Linienlast $p_x(x)$ über die Nahtlänge, der nach [1], (18) und (19), von folgender Integralgleichung mit Nebenbedingung beschrieben wird:

$$\left. \begin{aligned} p_x(x) - \lambda_{(L)} \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| p_x(\xi) d\xi &= C, \\ \int_{-1}^1 p_x(\xi) d\xi &= -F_x/a, \quad |x| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Größen x und ξ bezeichnen, unter Weglassen der Querstriche, die dimensionslosen Koordinaten $\bar{x} = x/a$ und $\bar{\xi} = \xi/a$.

Für den dimensionslosen Integralgleichungsparameter $\lambda_{(L)}$ gilt

$$\lambda_{(L)} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi} \left(\frac{1}{E_I h_I} + \frac{1}{E_{II} h_{II}} \right) \frac{a}{\beta_{(L)}}, \quad (30)$$

$\beta_{(L)}$ ist die Proportionalitätskonstante aus dem linearen Schubkopplungsgesetz

$$v_{xII}(x) - v_{xI}(x) = \beta_{(L)} p_x(x), \quad |x| \leq 1. \quad (31)$$

Die Neumannsche Reihe der gesuchten Integralgleichungslösung, mit ihren ersten Gliedern bereits in [1], (20) bis (24), angegeben, kann nun also auf zwei Wegen berechnet werden.

Der erste Weg, in den Abschnitten 2. und 3. des vorliegenden Aufsatzes dargestellt, besteht in der Berechnung der verdichteten Integralgleichung für (29), im Einsetzen des Neumannschen Reihenansatzes für die Lösung $p_x(x)$ und im Koeffizientenvergleich mit anschließender Auswertung der entstehenden Integrale.

Für das behandelte Beispiel ergibt sich im Sinne von (10) die verdichtete Integralgleichung

$$\begin{aligned} p_x(x) - \lambda_{(L)} \int_{-1}^1 [\ln|x-\xi| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| dx] \\ p_x(\xi) d\xi = -\frac{F_x}{2a}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\int_{-1}^1 \ln|x-\xi| dx = (1+\xi) \ln(1+\xi) + (1-\xi) \ln(1-\xi) - 2.$$

Der zweite Weg ist der der mechanischen Iteration nach Abschnitt 4. Als Startnäherung dient gemäß (20) die gleichmäßige Verteilung

$$p_{x\text{start}} = p_{x0} = -\frac{F_x}{2a}, \quad (33)$$

die längs der x-Achse die Scheibenverschiebungen

$$\begin{aligned} v_{xII} &= -\frac{F_x}{2a} \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4\pi E_{II} h_{II}} a \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| d\xi + C_{xII}, \\ v_{xI} &= \frac{F_x}{2a} \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4\pi E_I h_I} a \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| d\xi + C_{xI}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\int_{-1}^1 \ln|x-\xi| d\xi = (1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x) - 2,$$

$$v_{yII} = 0, \quad v_{yI} = 0$$

hervorruft, vgl. (22) und (2). Damit ist aber das lineare Schubkopplungsgesetz (31) verletzt, die Startnäherung bedarf nach (21) einer ersten Korrektur:

$$p_x = p_{x0} + \Delta_1 p_x = -\frac{F_x}{2a} + \Delta_1 p_x. \quad (35)$$

Einsetzen von (34) und (35) in (31) ergibt

$$-\frac{F_x}{2a} \lambda_{(L)} \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| d\xi + \bar{C}_x = -\frac{F_x}{2a} + \Delta_1 p_x. \quad (36)$$

Analog zu (25) ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\int_{-1}^1 \Delta_1 p_x(x) dx = 0 \quad (37)$$

einzuhalten, die die Konstante \bar{C}_x zu

$$\bar{C}_x = -\frac{F_x}{2a} + \frac{F_x}{2a} \lambda_{(L)} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| dx \right] d\xi \quad (38)$$

bestimmt. Aus (36) folgt die Korrekturkraft

$$\begin{aligned} \Delta_1 p_x &= -\frac{F_x}{2a} \lambda_{(L)} \int_{-1}^1 \left[\ln|x-\xi| - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln|x-\xi| dx \right] d\xi \\ &= -\frac{F_x}{2a} \lambda_{(L)} [(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x) - 2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (4 \ln 2 - 6)], \end{aligned} \quad (39)$$

die in der Tat mit dem linearen Glied der Neumannschen Reihe für $p_x(x)$ nach [1], (20) und (23), übereinstimmt.

Eine zweite Korrektur von (33) führt nach längerer Zwischenrechnung auf das quadratische Glied der Neumannschen Reihe gemäß [1], (20) und (24), das mit seinen Dilogarithmusgliedern $\mathcal{L}_2[f(x)]$ bereits die Klasse der elementaren Funktionen verläßt.

Auf eine Berechnung höherer Reihenglieder ist angesichts des großen Integrationsaufwandes verzichtet worden.

Durch Abbruch der Neumannschen Reihe nach dem linearen bzw. nach dem quadratischen Glied ergeben sich die folgenden analytischen Näherungsformeln für den Schubkraftverlauf längs der Naht:

$$\tilde{p}_{x(1)}(x) = -\frac{F_x}{2a} [1 + \lambda_{(L)} \overset{\circ}{p}_{x1}(x)], \quad (40)$$

$$\tilde{p}_{x(2)}(x) = -\frac{F_x}{2a} [1 + \lambda_{(L)} \overset{\circ}{p}_{x1}(x) + \lambda_{(L)}^2 \overset{\circ}{p}_{x2}(x)] \quad (41)$$

Die bezogenen Reihenkoeffizienten lauten

$$\overset{\circ}{p}_{x1}(x) = (1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x) - 2 \ln 2 + 1, \quad (42)$$

$$\overset{\circ}{p}_{x2}(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 \left[\left(\ln \frac{1+x}{2}\right)^2 - \frac{2}{3} \pi^2 + 2 \mathcal{L}_2\left(\frac{1+x}{2}\right) \right]$$

$$+ \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 \left[\left(\ln \frac{1-x}{2}\right)^2 - \frac{2}{3} \pi^2 + 2 \mathcal{L}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) \right] + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \pi^2. \quad (43)$$

Da die Neumannsche Reihe nach [1], (21) nur im Bereich $\lambda_{(L)} < |\lambda_1| = 0,63857$

konvergiert, sind diese Formeln mehr von qualitativer Bedeutung. Quantitative Anwendungen werden auf sehr kleine λ -Werte, d. h. also auf sehr schubweiche Verbindungen beschränkt bleiben. Eine dritte Näherungsformel

$$\tilde{p}_{x(3)}(x) = -\frac{F_x}{2a} \left[1 + \frac{\lambda_{(L)} \overset{\circ}{p}_{x1}(x)}{1 - \frac{\lambda_{(L)} \overset{\circ}{p}_{x2}(x)}{\overset{\circ}{p}_{x1}(x)}} \right] \quad (45)$$

folgt aus dem Bemühen um Konvergenzbeschleunigung der Neumannschen Reihe und um analytische Fortsetzung der Lösung über $\lambda_{(L)} = |\lambda_1|$ hinaus.

Die folgende Tabelle gibt Aufschluß über die Leistungsfähigkeit der angeführten Näherungsformeln in Abhängigkeit vom Integralgleichungsparameter $\lambda_{(L)}$. Ausgewählt wurde der gegenüber Näherungen besonders empfindliche Zahlenwert für die maximale Schubkraft $|p_x(1)|$ in den beiden Endpunkten der Naht, wo die Lösungskurve senkrechte Tangenten aufweist. Der Eulersche Dilogarithmus läßt sich für die Argumentwerte Null und Eins elementar ausdrücken:

$$\mathcal{L}_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2}, \quad \mathcal{L}_2(0) = 0, \quad \mathcal{L}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (46)$$

Für die maximale Schubkraft folgen mit

$$\overset{\circ}{p}_{x1}(1) = 1, \quad \overset{\circ}{p}_{x2}(1) = \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{9} = -0,429956 \quad (47)$$

die Näherungsausdrücke

$$\tilde{p}_{x(1)} = \frac{\tilde{p}_{x(1)}(1)}{(-F_x/a)} = \frac{1}{2} (1 + \lambda_{(L)}), \quad (48)$$

Tabelle 1

Näherungs- und Genauwerte für die maximale Schubkraft in einer geraden Naht

$\lambda_{(L)}$	$\frac{p_x(1)}{(-F_x/a)}$	$\tilde{p}_{x(1)}$	Fehler	$\tilde{p}_{x(2)}$	Fehler	$\tilde{p}_{x(3)}$	Fehler
0	0,5	0,5	± 0 %	0,5	± 0 %	0,5	± 0 %
0,1	0,547997	0,55	+ 0,37 %	0,547850	- 0,03 %	0,547939	- 0,01 %
0,2	0,592493	0,6	+ 1,27 %	0,591401	- 0,18 %	0,592082	- 0,07 %
0,3	0,634095	0,65	+ 2,51 %	0,630652	- 0,54 %	0,632862	- 0,19 %
0,4	0,673261	0,7	+ 3,97 %	0,665604	- 1,14 %	0,670651	- 0,39 %
0,5	0,710347	0,75	+ 5,58 %	0,696256	- 1,98 %	0,705765	- 0,65 %
0,6	0,745633	0,8	+ 7,29 %	0,722608	- 3,09 %	0,738479	- 0,96 %
0,8	0,811664	0,9	+ 10,88 %	0,762414	- 6,07 %	0,797627	- 1,73 %
1,0	0,872714	1,0	+ 14,59 %	0,785022	- 10,05 %	0,849661	- 2,64 %
1,2	0,929728	1,1	+ 18,31 %	0,790432	- 14,98 %	0,895792	- 3,65 %
1,6	1,034228	1,3	+ 25,70 %	0,749656	- 27,52 %	0,973953	- 5,83 %
2,0	1,128908	1,5	+ 32,87 %	0,640088	- 43,30 %	1,037660	- 8,08 %

$$\tilde{p}_{x(2)} = \frac{\tilde{p}_{x(2)}(1)}{(-F_x/a)} = \frac{1}{2} (1 + \lambda_{(L)} - \lambda_{(L)}^2 \cdot 0,429956), \quad (49)$$

$$\tilde{p}_{x(3)} = \frac{\tilde{p}_{x(3)}(1)}{(-F_x/a)} = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda_{(L)} \frac{1}{1 + 0,429956 \lambda_{(L)}} \right), \quad (50)$$

die in Tabelle 1 für einige $\lambda_{(L)}$ -Werte zahlenmäßig ausgewertet wurden. Zum Vergleich sind die entsprechenden Genauwerte $p_x(1)/(-F_x/a)$ und die relativen Fehler angegeben.

Der erste Näherungsausdruck (48) ergibt einen oberen Schrankenwert, der zweite (49) und der dritte (50) untere Schrankenwerte für den jeweiligen Genauwert der maximalen Schubkraft.

Erwartungsgemäß liefern die Ausdrücke (48) und (49) nur bei kleinen λ -Werten gute Abschätzungen. Sie werden schnell unbrauchbar, wenn der λ -Wert den Betrag des kleinsten Eigenwertes $|\lambda_1| = 0,63857$ überschreitet, denn dann bilden sie ja Partialsummen einer divergierenden Neumannschen Reihe! Im Gegensatz zum Genauwert, der mit steigendem Parameter $\lambda_{(L)}$ monoton wächst, fällt z. B. der Näherungswert $\tilde{p}_{x(2)}$ nach Erreichen eines Maximums wieder ab.

Als besonders leistungsfähig erweist sich die dritte Näherungsformel (50). Sie liefert nicht nur die genauesten

Näherungswerte, sondern bleibt auch weit über die $|\lambda_1|$ -Grenze hinaus anwendbar.

Der praktische Nutzen der mitgeteilten Kleinparameterlösungen kann wesentlich gesteigert werden, wenn es zusätzlich gelingt, die asymptotischen Großparameterlösungen zu ermitteln.

Für wertvolle Hinweise sei Herrn Dr. M. Schleiff, Martin-Luther-Universität Halle, besonders gedankt.

LITERATUR

- [1] Pfau, P.: Behandlung der Kraftübertragung zwischen parallelen elastischen Scheiben durch Integralgleichungen. Techn. Mechanik 3 (1982), Heft 4, S. 17 – 22.
- [2] Pfau, P.: Spannungskonzentrationen in Flächenverbindungen. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 21 (1972), S. 61 – 68.
- [3] Niethammer, W.: Ein numerisches Verfahren zur analytischen Fortsetzung. Numer. Math. 21 (1973), S. 81 – 92.