

# Zur Theorie der Struktur homogener isotroper Turbulenz

W. Szablewski

In der vorliegenden zweiten Mitteilung wird über erzielte Fortschritte zur Thematik **Skalare Spektren und skalare Korrelationen** zusammenfassend und in Ergänzung berichtet.

Auf Anwendungen, wie sie sich z. B. für Mischungsprozesse ergeben, wird hier nicht eingegangen.

Die vorliegende Theorie setzt die Existenz eines Trägheits-Konvektionsunterbereiches voraus. Damit tritt neben der universellen Konstante  $\alpha$  des  $k^{-5/3}$ -Gesetzes im Trägheitsunterbereich, die wir wie bisher gleich 1,6 annehmen (vgl. erste Mitteilung (\*)), als weiteres empirisches Element der Theorie die universelle Konstante  $\alpha_\Theta$  des  $k^{-5/3}$ -Gesetzes im Trägheits-Konvektionsunterbereich auf (Abschnitt IA b).

Es ergeben sich zum Feld der Geschwindigkeitsschwankungen (\*) analoge Strukturen des Feldes der skalaren Schwankungen. Als fundamentaler Unterschied zum Verhalten der Geschwindigkeitsschwankungen ist jedoch hier zu konstatieren, daß der Grad des zeitlichen Abklingens der skalaren Schwankungen von der Art ihrer Erzeugung abhängt (Abschn. I Ab).

## I. Skalare Spektren

### A. Dreidimensionales Spektrum

Frequenzanalyse von turbulenten Strömungen mit einem Temperaturgradienten oder einem Gradienten der Konzentration eines Stoffes – z. B. in der Atmosphäre und ozeanischen Gewässern; ferner in der chemischen Verfahrenstechnik – ergibt ein kontinuierliches Spektrum der im quadratischen Mittel genommenen Temperatur- oder Konzentrationsschwankungen der Masseneinheit

$$\overline{\Theta^2} = \int_0^\infty \Theta(k) dk \quad k [m^{-1}] \text{ Wellenzahl.}$$

$$\overline{c^2} = \int_0^\infty \Gamma(k) dk$$

Wir beziehen uns im folgenden auf skalare Schwankungen in abklingender homogener und isotroper Turbulenz (z. B. im turbulenten Nachlauf hinter einem beheizten Gitter).

Aus der Gleichung des Wärme- bzw. Stofftransports in inkompressibler Strömung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial T u_k}{\partial x_k} + \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T$$

bzw.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial c u_k}{\partial x_k} + D \nabla^2 c$$

( $\lambda/\rho c_p$  Temperaturleitfähigkeit,  $D$  Diffusionskoeffizient) gewinnt man über die Zweipunktkorrelation der Temperaturschwankungen mittels Fourieranalyse für das Spektrum  $\Theta(k)$  über der Wellenzahl  $k$  die Gleichung

$$\frac{\partial \Theta(k)}{\partial t} = - \frac{\partial F(k)}{\partial k} - 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} k^2 \Theta(k), \quad (1)$$

integriert

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k \Theta(k) dk = - F(k) - 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \int_0^k k^2 \Theta(k) dk. \quad (2)$$

Das zweite Glied der rechten Seite beschreibt die Dämpfung der turbulenten Temperaturschwankungen im Wellenzahlenbereich  $< k$  durch die molekulare Wärmeleitung des Mediums; während  $-F(k)$ , Transformierte der nichtlinearen Glieder der Konvektion, symbolisch den skalaren Transfer in den Wellenzahlenbereich  $> k$  bezeichnet. Das Problem der Konzentrationsschwankungen ist formal identisch mit dem der Temperaturschwankungen, so daß wir uns auf diese beschränken können.

Da die Dämpfung der Temperaturschwankungen letztlich aus der Wärmeleitung resultiert

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \Theta(k) dk \quad (= \frac{d \overline{\Theta^2}}{dt}) = - 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \int_0^\infty k^2 \Theta(k) dk$$

$$\left( - \frac{d \overline{\Theta^2}}{dt} = \epsilon_\Theta \text{ skalare Dissipation} \right),$$

haben wir für  $F(k)$  die Randbedingung  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 0$ .

#### a) Trägheits-Konvektionsunterbereich

Bei großer Pécletscher Zahl

$$Pe_k = \frac{\sqrt{E(k)/k}}{\lambda/\rho c_p} = Re_k Pr$$

$$(Re_k = \frac{\sqrt{E(k)/k}}{\nu} \text{ Reynoldszahl, } Pr = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} \text{ Prandtzahl;}$$

bei Konzentrationsschwankungen statt  $Pr$  die Schmidtzahl  $\nu/D$ )

der Turbulenzelemente ist der Einfluß der molekularen Wärmeleitung (Diffusion) als vernachlässigbar und das lokale Abklingen der Temperaturschwankungen im wesentlichen als durch den skalaren Transfer in den Wellenzahlenbereich  $> k$  bedingt anzusehen. Wir können demnach bei großem  $Pe_{k_0}$  ( $k_0$  Wellenzahl der großen Wirbel) im Spektrum einen Konvektionsbereich (convective range) mit vernachlässigbarem Einfluß der Diffusion abgrenzen gegen einen Diffusionsbereich (diffusive range) mit merkbarem Einfluß der Diffusion.

Bei hinreichend großem  $Pe_{k_0}$  wird es dann – vgl. die analoge Betrachtung hinsichtlich des Spektrums der Turbulenzenergie in  $\langle * IAa \rangle$  – im Konvektionsbereich einen an den Diffusionsbereich angrenzenden Unterbereich (convective subrange) geben, für welchen

1. Unabhängigkeit von den äußeren Bedingungen bzw. den großen Wirbeln  $k_0$  angenommen werden kann;
2. der skalare Transfer hier

$$F(k) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^k \Theta(k) dk \approx - \frac{d}{dt} \int_0^\infty \Theta(k) dk = \epsilon_\Theta \quad (3)$$

gesetzt werden kann.

Wir nehmen des weiteren hinreichend großes  $Re_{k_0}$  bzw. die Existenz eines Trägheitsunterbereiches mit dem Spektrum

$$E(k) \approx \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (\text{vgl. } \langle * IAa \rangle) \quad (4)$$

( $\epsilon$  Dissipation der Turbulenzenergie) an.

In diesem Trägheits-Konvektionsunterbereich ist dann die Spektralfunktion  $\Theta(k)$  als durch  $\epsilon$ ,  $\epsilon_\Theta$  und die Wellenzahl  $k$  determiniert anzusehen.

Es folgt dimensionsanalytisch gemäß

$$\Theta(k) [T^2m], \quad \epsilon [m^2s^{-3}], \quad \epsilon_\Theta [T^2s^{-1}], \quad k [m^{-1}]$$

nach Obuchow [1] und Corrsin [2]

$$\Theta(k) \approx \alpha_\Theta \epsilon_\Theta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad (5)$$

bzw.

$$\Theta(k) = \alpha_\Theta \epsilon_\Theta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad \text{für } k \rightarrow \infty \quad (6)$$

im Trägheits-Konvektionsunterbereich.

Dieses Spektralgesetz ist durch zahlreiche Messungen bestätigt worden und stellt einen sicheren Bestandteil der Theorie homogener isotroper Turbulenz dar.

Die dimensionslose empirische Konstante  $\alpha_\Theta$  ist als universelle Konstante anzusehen. Bisher durchgeführte Messungen des eindimensionalen Spektrums im Trägheitsunterbereich

$$\text{nach } \langle * (36) \rangle E_{11}(k_1) = \alpha_1 \epsilon^{2/3} k_1^{-5/3}$$

$$\text{mit } \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{18}{55} \quad (7)$$

und des eindimensionalen Spektrums im Trägheits-Konvektionsunterbereich

$$\text{nach (40)} \quad \Theta_1(k_1) = \alpha_{\Theta 1} \epsilon_\Theta \epsilon^{-1/3} k_1^{-5/3}$$

$$\text{mit } \frac{\alpha_{\Theta 1}}{\alpha_\Theta} = \frac{3}{5} \quad (8)$$

ergaben jedoch bisher, bedingt durch die unsichere Ermittlung von  $\epsilon$  und  $\epsilon_\Theta$ , unterschiedliche Werte für

$$\frac{\alpha_\Theta}{\alpha} = \frac{6}{11} \frac{\alpha_{\Theta 1}}{\alpha_1}$$

Es erhielten im Nachlauf einer Gitterströmung:

$$\text{Gibson u. Schwarz [3a]} \quad \alpha_{\Theta 1} = 0,35, \quad \alpha_1 = 0,44; \\ \alpha_\Theta / \alpha = 0,435$$

in der Atmosphäre:

$$\text{Gibson et al. [3b]} \quad \alpha_{\Theta 1} = 1,15, \quad \alpha_1 = 0,69; \\ \alpha_\Theta / \alpha = 0,91$$

$$\text{Boston u. Burling [3c]} \quad 0,81, \quad 0,51; \quad 0,87$$

$$\text{Williams u. Paulson [3d]} \quad 0,50, \quad 0,54; \quad 0,505$$

im Ozean-

$$\text{Grant et al. [3e]} \quad \alpha_{\Theta 1} = 0,31, \quad \alpha_1 = 0,33; \\ \alpha_\Theta / \alpha = 0,50.$$

Wir legen den folgenden numerischen Ausführungen provisorisch den Wert

$$\alpha_\Theta = \frac{2}{3} \alpha \quad (9)$$

zugrunde.

Als wichtige Folgerung [4] ergibt sich aus (5) mit  $F(k) \approx \epsilon_\Theta$  nach (3) und  $\epsilon \approx \alpha^{-3/2} E(k)^{3/2} k^{5/2}$  nach (4)

$$F(k) \approx \alpha_\Theta^{-1} \alpha^{-1/2} E(k)^{1/2} \Theta(k) k^{5/2} \quad (10)$$

im Trägheits-Konvektionsunterbereich.

Formulierung (10) für den skalaren Transfer wurde bereits im Jahre 1961 von Corrsin [5] als hypothetischer Ansatz vorgeschlagen. Er findet hier nunmehr gegenüber anderen hypothetischen Ansätzen (z. B. Pao [6]) eine Bestätigung.

#### b) Universeller Bereich

Im an den Trägheits-Konvektionsunterbereich anschließenden Zähigkeits-Diffusionsbereich (viscous diffusive range) treten als weitere physikalische Einflußgrößen die kinematische Zähigkeit  $\nu$  und die Temperaturleitfähigkeit  $\lambda/\rho c_p$  und damit neben  $1/k$  die weiteren determinierenden Längen  $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$  und

$$((\lambda/\rho c_p)^3/\epsilon)^{1/4} = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} Pr^{-3/4}$$

auf.

Dimensionsanalytisch erhält man dann

– vgl. die analoge Betrachtung in  $\langle * IA b \rangle$  – bei Fortsetzung von (5) in den Zähigkeits-Diffusionsbereich und damit für den „universellen“ Bereich  $k \gg k_0$

$$\Theta(k) = \alpha_\Theta \epsilon_\Theta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} g(k \nu^{3/4}/\nu^{1/4})$$

mit der bei der Dimensionsanalyse unbestimmt bleibenden Funktion  $g$ , wobei die Abhängigkeit von  $Pr$  in  $g(k \nu^{3/4}/\nu^{1/4})$  eingeschlossen ist.

Führen wir dimensionslose Größen

$$\tilde{k} = k(\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad \tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \Theta(k) \epsilon_\Theta^{-1} (\epsilon^3/\nu^5)^{1/4} \quad (11)$$

ein, so

$$\tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \alpha_\Theta \tilde{k}^{-5/3} g(\tilde{k}). \quad (12)$$

Entspr. für den skalaren Transfer nach (10) und mit

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = E(k) (\nu^5/\epsilon)^{-1/4}$$

$$\tilde{F}(\tilde{k}) (= F(k)/\epsilon_\Theta)$$

$$= \alpha_\Theta^{-1} \alpha^{-1/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) \tilde{k}^{5/2} g_1(\tilde{k}). \quad (13)$$

Für  $\tilde{\Theta}(\tilde{k})$  nimmt Gleichung (1) unter Beachtung von

$$\frac{\partial \Theta(k)}{\partial t} \Big|_k = \nu^{5/4} \left\{ \frac{d(\epsilon \Theta / \epsilon^{3/4})}{dt} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) + (\epsilon \Theta / \epsilon^{3/4}) \left( -\frac{1}{4} \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \tilde{k} \frac{d\tilde{\Theta}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} \right) \right\}$$

$$\left( \frac{d\tilde{k}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \tilde{k} \text{ nach (11)} \right)$$

zunächst die Form an

$$\begin{aligned} & \frac{\nu^{1/2} \epsilon^{1/4}}{\epsilon \Theta} \left\{ \frac{d(\epsilon \Theta / \epsilon^{3/4})}{dt} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) - \frac{1}{4} (\epsilon \Theta / \epsilon^{3/4}) \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \tilde{k} \frac{d\tilde{\Theta}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} \right\} \\ & = -\frac{d\tilde{F}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} - \frac{2}{Pr} \tilde{k}^2 \tilde{\Theta}(\tilde{k}). \end{aligned} \quad (14)$$

Berücksichtigt man die Relation

( \* (11) )

$$\epsilon = \frac{1}{4} \frac{\nu}{a^2} \frac{1}{t^2} \quad (a = \sqrt{5/3} \operatorname{Re}_\lambda^{-1} = \frac{1}{3} \frac{(\epsilon \nu)^{1/2}}{u^2})$$

bzw.

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -4a (\epsilon^3 / \nu)^{1/2},$$

so erhält man [4]

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{1}{\epsilon \Theta} \frac{d\epsilon \Theta}{dt} + 3a \tilde{\Theta}(\tilde{k}) + a \tilde{k} \frac{d\tilde{\Theta}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} \\ & = -\frac{d\tilde{F}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} - \frac{2}{Pr} \tilde{k}^2 \tilde{\Theta}(\tilde{k}). \end{aligned} \quad (15)$$

Es folgt dann für den universellen Bereich

mit  $(\nu/\epsilon)^{1/2} = 2 \text{ at}$

$$2 \text{ at} \frac{1}{\epsilon \Theta} \frac{d\epsilon \Theta}{dt} = \text{const.},$$

also ein Potenzgesetz

$$\epsilon \Theta \sim t^{-(m+1)}; \quad (16)$$

bei Nullsetzen der Integrationskonstante

$$\overline{\Theta^2} \sim t^{-m}. \quad (17)$$

Damit ergibt sich schließlich für den universellen Bereich  $k \gg k_0$  des skalaren Spektrums die Gleichung

$$\begin{aligned} & a \left\{ (-2m+1) \tilde{\Theta}(\tilde{k}) + \tilde{k} \frac{d\tilde{\Theta}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} \right\} \\ & = -\frac{d\tilde{F}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} - \frac{2}{Pr} \tilde{k}^2 \tilde{\Theta}(\tilde{k}). \end{aligned} \quad (18)$$

Es zeigt sich hier theoretisch ein fundamentaler Unterschied im Verhalten der skalaren Schwankungen gegenüber den Geschwindigkeitsschwankungen: während sich bei Existenz eines universellen Bereichs nach ( \* (12) ) für den Grad des zeitlichen Abklingens der Geschwindigkeitsschwankungen  $u_1^2 u_2^2 / 2 \sim t^{-1}$  ergibt, bleibt hier der Grad des zeitlichen Abklingens der skalaren Schwankungen unbestimmt. Neuere Meldungen haben ergeben, daß das zeitliche Abklingen der skalaren Schwankungen bzw. der Exponent  $m$  von der Art ihrer Erzeugung abhängt. Lin u. Lin [7] erhielten durch progressives Heizen ihrer experimentellen Anordnung (Gitter aus Kanälen mit Heizelementen) ein progressives Anwachsen des Exponenten  $m$ , das von  $m = 0,8$  bis  $3,0$  reichte. Warhaft und Lumley [8] erhielten mittels eines stromabwärts vom Gitter angebrachten beheizten Netzes feiner Drähte („mandoline“) lediglich durch Änderung der Netzweite und Änderung des Abstandes vom Gitter Änderungen des Exponenten  $m$  von  $m = 1,29$  bis  $3,20$ .

Die definitive mathematische Formulierung des skalaren Transfers im universellen Bereich steht wie die des Energietransfers noch aus und stellt ein Hauptproblem der Forschung dar.

Eine Aussage ist jedoch – wie im universellen Bereich des Spektrums der Turbulenzenergie, vgl. ( \* IAb ) – für die Asymptote  $\tilde{k} \rightarrow \infty$  möglich. Hier ist mit  $Pe_k \rightarrow 0$  in der Bilanz der aus den nichtlinearen Konvektionsgliedern resultierende Transfer gegenüber der skalaren Dissipation als vernachlässigbar anzusehen. Es folgt dann aus (18)

$$\tilde{\Theta}(\tilde{k}) \sim \tilde{k}^{2m-1} e^{-(1/Pr) \tilde{k}^2/a} \quad (19)$$

bzw.

$$\tilde{\Theta}(\tilde{k}) \sim \tilde{k}^{2m-1} e^{-(1/Pr) \sqrt{3/5} \operatorname{Re}_\lambda \tilde{k}^2}.$$

Wäre

$$\frac{-d\tilde{F}/d\tilde{k}}{(2/Pr) \tilde{k}^2 \tilde{\Theta}(\tilde{k})} \rightarrow \gamma_\Theta \text{ für } \tilde{k} \rightarrow \infty,$$

so müßte  $0 \leq \gamma_\Theta < 1$  sein und man erhielte

$$\tilde{\Theta}(\tilde{k}) \sim \tilde{k}^{2m-1} e^{-(1-\gamma_\Theta)(1/Pr) \tilde{k}^2/a}. \quad (20)$$

c) Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$  [4]

Im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$  ergibt Dimensionsanalyse auch unabhängig von der Existenz eines Trägheits-Konvektionsunterbereiches

$$F(k) = \alpha_\Theta^{-1} \alpha^{-1/2} E(k)^{1/2} \Theta(k) k^{5/2}; \quad (21)$$

denn  $\Theta(k)$  [ $T^2 m$ ] und  $F(k)$  [ $T^2 s^{-1}$ ] bedingen einander, und im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$  stehen nur noch die Länge  $1/k$  und  $E(k)$  [ $m^3 s^{-2}$ ] zur Verfügung. Entsprechend hatte sich in ( \* (6) ) für den Energietransfer im Trägheitsbereich  $k \gg k_0$

$$S(k) = \alpha^{-3/2} E(k)^{3/2} k^{5/2}$$

ergeben.

Für  $S(k) \approx \epsilon$ ,  $F(k) \approx \epsilon_\Theta$  erhält man dann wieder die Spektralgesetze (4) und (5).

Der Ermittlung des skalaren Spektrums im genannten Bereich legen wir Gleichung (18) zugrunde, die hier lautet

$$a \left\{ (1-2m) \tilde{\Theta}(\tilde{k}) + \tilde{k} \frac{d\tilde{\Theta}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} \right\} = - \frac{d\tilde{F}(\tilde{k})}{d\tilde{k}}, \quad (22)$$

wobei nach (13)

$$\tilde{F}(\tilde{k}) = \alpha_{\Theta}^{-1} \alpha^{-1/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) \tilde{k}^{5/2};$$

Randbedingung ist nach (6)  $\tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \alpha_{\Theta} \tilde{k}^{-5/3}$  für  $\tilde{k} \rightarrow \infty$ .

Wir erhalten dann zunächst

$$\frac{d\tilde{\Theta}(\tilde{k})}{\tilde{\Theta}(\tilde{k})} = \frac{(2m-1)a - \alpha_{\Theta}^{-1} \alpha^{-1/2} (d/d\tilde{k}) (\tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{k}^{5/2})}{a \tilde{k} + \alpha_{\Theta}^{-1} \alpha^{-1/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{k}^{5/2}} d\tilde{k}$$

bzw.

$$\ln \tilde{\Theta}(\tilde{k}) = - \ln(a \tilde{k} + \alpha_{\Theta}^{-1} \alpha^{-1/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{k}^{5/2}) + 2ma \int \frac{d\tilde{k}}{a \tilde{k} + \alpha_{\Theta}^{-1} \alpha^{-1/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{k}^{5/2}}. \quad (23)$$

Hier führen wir das Ähnlichkeitsgesetz (\* (29)) des Spektrums der Turbulenzenergie im Trägheitsbereich  $k \gg k_0$  ein:

$$k_* (= \tilde{k} M^{-3/2}) = \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}, \quad (0 \leq x < 1) \quad (24)$$

$$E_*(= \tilde{E}(\tilde{k}) M^{5/2} / \alpha) = \sqrt{x} (1-x)^{5/2};$$

wobei

$$M = 2a\alpha = 2\alpha \sqrt{5/3} \text{Re}_{\lambda}^{-1} = \frac{2}{3} \alpha \frac{(\epsilon\nu)^{1/2}}{u'^2}.$$

Das ergibt

$$a \tilde{k} = a M^{3/2} k_* = a M^{3/2} \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}},$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{k}^{5/2} &= \alpha^{1/2} M^{5/2} E_*^{1/2} k_*^{5/2} \\ &= \alpha^{1/2} M^{5/2} \frac{x^{3/2}}{(1-x)^{5/2}} \end{aligned} \quad (25)$$

und

$$d\tilde{k} = M^{3/2} \frac{dk_*}{dx} dx = \frac{M^{3/2}}{2} \frac{1+2x}{\sqrt{x}(1-x)^{5/2}} dx.$$

Damit dann

$$\ln \tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \ln \frac{(1-x)^{5/2}}{\sqrt{x}(1+Ax)} + m \int \frac{1+2x}{x+Ax^2} dx, \quad (26)$$

$$\text{wo } A = 2 \frac{\alpha}{\alpha_{\Theta}} - 1.$$

Elementare Integration liefert

$$\int \frac{1+2x}{x+Ax^2} dx = \ln x + \left( \frac{2}{A} - 1 \right) \ln(1+Ax),$$

womit wir

$$\tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \text{const.} \frac{(1-x)^{5/2}}{\sqrt{x}(1+Ax)} x^m (1+Ax)^{\left( \frac{2}{A} - 1 \right) m} \quad (27)$$

erhalten.

Zu fordern ist, daß für  $x \rightarrow 1$  ( $\tilde{k} \rightarrow \infty$ ) nach (6)

$$\tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \alpha_{\Theta} \tilde{k}^{-5/3} = \alpha_{\Theta} M^{-5/2} (1-x)^{5/2}. \quad (28)$$

Erfüllung dieser Randbedingung ergibt dann schließlich für

$$k_* = \tilde{k} M^{-3/2}, \quad \Theta_*(k_*) = \tilde{\Theta}(\tilde{k}) M^{5/2} / \alpha_{\Theta} \quad (29)$$

das Ähnlichkeitsgesetz des skalaren Spektrums im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$  in der Parameterdarstellung

$$k_* = \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}},$$

$$\Theta_*(k_*) = (1-x)^{5/2} x^m - 1/2 \left( \frac{1+A}{1+Ax} \right)^{1-m} \left( \frac{2}{A} - 1 \right). \quad (30)$$

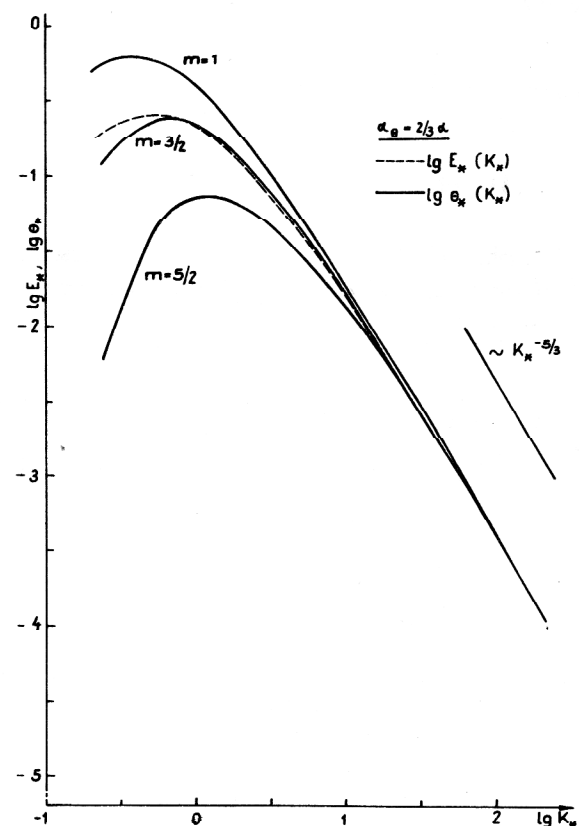


Bild 1 Ähnlichkeitsprofile des dreidimensionalen Spektrums der Turbulenzenergie und der dreidimensionalen Spektren skalarer Schwankungen im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$



Den nachfolgenden numerischen Ausführungen legen wir, wie in (9) bemerkt, provisorisch

$$\frac{\alpha\Theta}{\alpha} = \frac{2}{3} \quad \text{bzw.} \quad A = 2$$

zugrunde:

$$\Theta_*(k_*) = (1-x)^{5/2} x^m - 1/2 \frac{3}{1+2x} \quad (31)$$

In Bild 1 haben wir die entsprechenden spektralen Verteilungen für  $m = 1, 3/2$  und  $5/2$  sowie  $E_*(k_*)$  nach (24) aufgetragen. Auffallend ist die weite Erstreckung des quasi  $-5/3$ -Bereiches des skalaren Spektrums bei  $m=1$ .

Als charakteristisches Merkmal des verschiedenartigen zeitlichen Abklingens von  $\Theta^2$  ergibt sich theoretisch, daß – bei gleichem homogenen isotropen Turbulenzfeld – das Maximum (peak) des skalaren Spektrums für stärkeres zeitliches Abklingen von  $\Theta^2$  (größeres  $m$ ) bei größerer Wellenzahl  $k$  gelegen ist bzw. daß das Turbulenzelement des Maximums von  $\Theta(k)$  ein kleineres Längenmaß (length scale) besitzt.

Dieser Sachverhalt wird – wie wir noch sehen werden – durch die oben zitierten Messungen von Warhaft u. Lumley [8] bestätigt.

Für  $\tilde{\Theta}_{\max}(\tilde{k})$  und seine Lage im Wellenzahlenbereich  $\tilde{k}$  erhalten wir [9] aus (31) mit

$$\frac{d\Theta_*}{dx} = 0 \quad \text{bei} \quad x_0 = -\frac{1}{4} \frac{1}{1+m} (5-m - \sqrt{21-6m+9m^2}) \quad (32)$$

zunächst

$$k_{*\max}\Theta_* = \frac{x_0^{1/2}}{(1-x_0)^{3/2}},$$

$$\Theta_{*\max} = (1-x_0)^{5/2} x_0^m - 1/2 \frac{3}{1+2x_0} \quad (33)$$

Damit ergibt sich dann der in Bild 2 und 3 dargestellte Verlauf von  $\Theta_{*\max}$  und  $k_{*\max}\Theta_*$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $m$ .

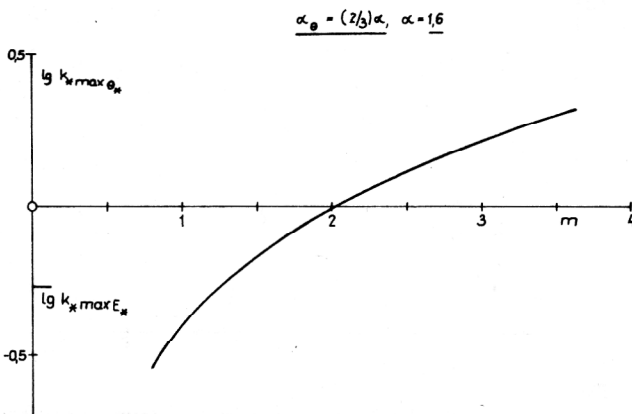


Bild 2  
 $k_{*\max}\Theta_*$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $m$

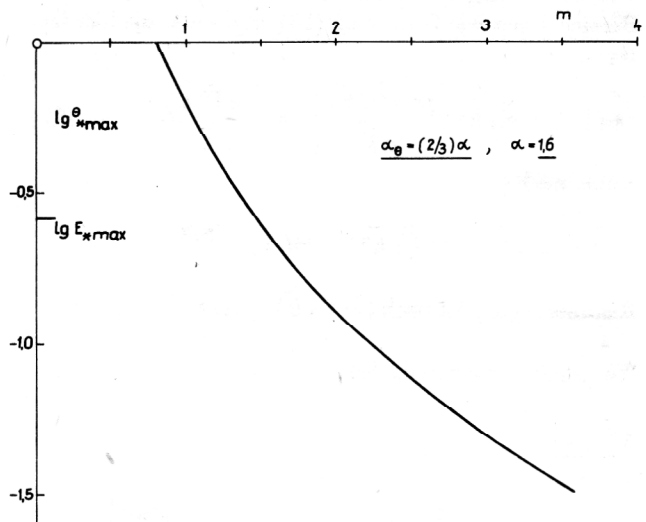


Bild 3  
 $\Theta_{*\max}$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $m$

Von Interesse ist in diesem Zusammenhang auch die Bestimmung von  $E_{\max}(k)$  und seiner Wellenzahl  $k_{\max E}$ . Aus dem Ähnlichkeitsgesetz (24) erhält man – vgl. (\* IAc) –

$$k_{*\max E_*} = 0,5367, \quad E_{*\max} = 0,2588.$$

Diese Werte haben wir in den Bildern 2 und 3 eingetragen. Demnach wäre

$$k_{*\max}\Theta_* < k_{*\max E_*} = 0,537 \quad \text{für etwa} \quad m < 1,26. \quad (34)$$

Es sei angemerkt, daß diese Konstellation eine von Yeh, Van Atta [10] durchgeführte Messung einer beheizten Gitterströmung ( $Re_\lambda = 35,2$ ) bereits bei  $m = 1,29$  aufweist.

Nach (29) haben wir die Formeln

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k_* M^{3/2} = k_* (2\sqrt{5/3})^3 / 2 \alpha^{3/2} Re_\lambda^{-3/2} \\ &= k_* \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{3/2} \frac{(\epsilon\nu)^{3/4}}{(u^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \Theta_* \alpha_\Theta M^{-5/2}$$

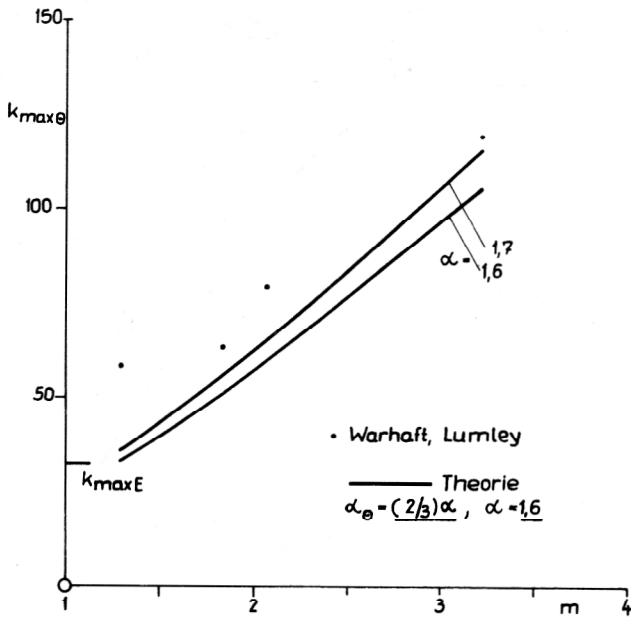
$$\begin{aligned} &= \Theta_* (2\sqrt{5/3})^{-5/2} \alpha_\Theta \alpha^{-5/2} Re_\lambda^{5/2} \\ &= \Theta_* \alpha_\Theta \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{-5/2} \frac{(u^2)^{5/2}}{(\epsilon\nu)^{5/4}}; \end{aligned} \quad (36)$$

mit (11) dann

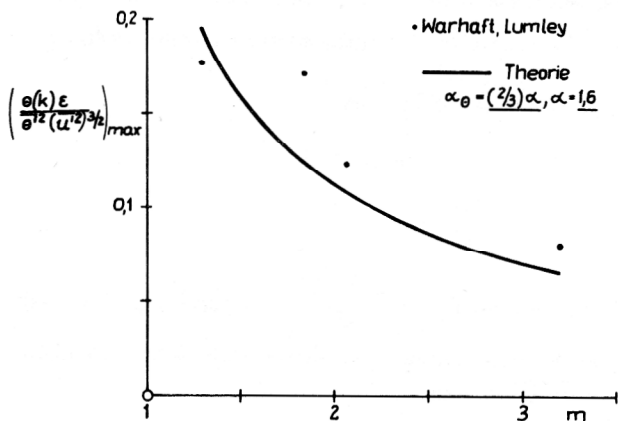
$$k = k_* \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{3/2} \frac{\epsilon}{(u^2)^{3/2}}, \quad (37)$$

$$\Theta(k) = \Theta_* \alpha_\Theta \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{-5/2} (u^2)^{5/2} \epsilon^{-2} \epsilon_\Theta. \quad (38)$$

In Bild 4 haben wir die sich nach (37), (33) und den experimentellen Daten des Turbulenzfeldes ergebenden Werte  $k_{\max}\Theta$  in Abhängigkeit von  $m$  mit den von Warhaft und Lumley [8] experimentell ermittelten verglichen.



**Bild 4**  
 $k_{\max\Theta}$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $m$



**Bild 5**  
 $\frac{\Theta_{\max}}{\Theta^2} \frac{\epsilon}{(u'^2)^{3/2}}$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $m$

Weiter erhält Bild 5 den Verlauf der sich nach (38) und (33) ergebenden Dimensionslosen

$$\frac{\Theta_{\max}}{\Theta^2} \frac{\epsilon}{(u'^2)^{3/2}} = \frac{\Theta_{*\max}}{\Theta^2} \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{-3/2} \frac{\epsilon}{u'^2} \frac{\Theta}{\epsilon}$$

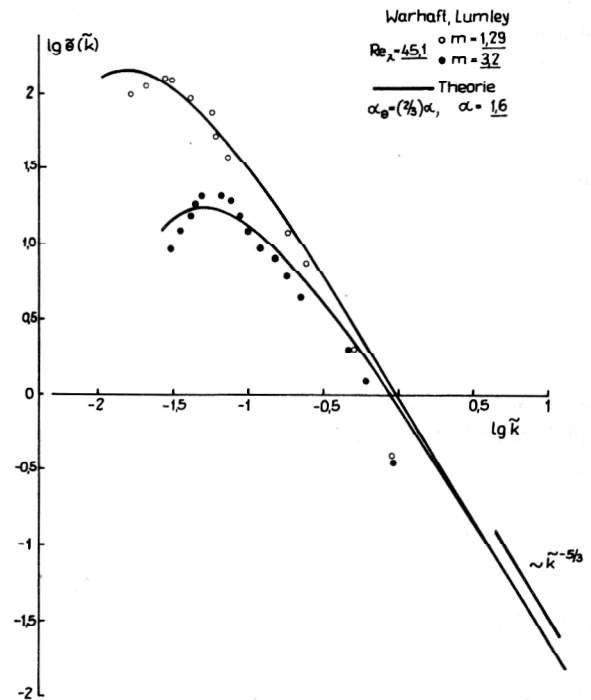
in Abhängigkeit von  $m$ . (Dabei wurde, wie mehrfach bemerkt,  $\alpha_\Theta = (2/3)\alpha$  gesetzt.)

Es zeigt sich in Übereinstimmung mit der Messung, daß ein stärkeres zeitliches Abklingen von  $\overline{\Theta^2}$  sich nicht nur in einem kleineren Längenmaß des Turbulenzelementes von  $\Theta(k)_{\max}$ , sondern auch in einem kleineren  $\Theta(k)_{\max}$  manifestiert.

Theorie und Experiment ergeben qualitativ denselben Verlauf. Die quantitativen Unterschiede, die sich in mäßigen Grenzen halten, sind in Anbetracht der klei-

nen Reynoldsschen Zahl  $Re_\lambda = 45,14$  der Messung – die vorliegende Theorie setzt relativ großes  $Re_\lambda$  bzw. die Existenz eines Trägheits-Konvektionsunterbereiches mit  $\Theta(k) \sim k^{-5/3}$  voraus – von vornherein zu erwarten gewesen.

Das trifft auch für den Vergleich (Bild 6) der dreidimensionalen Spektren  $\tilde{\Theta}(k)$  nach (35), (36) und (30) bei  $m = 1,29$  und  $3,2$  mit den von Warhaft und Lumley [8] aus ihren Messungen gewonnenen dreidimensionalen Spektren (entnommen einem Diagramm in [8]) zu.



**Bild 6**  
 Dreidimensionale skalare Spektren bei  $m = 1,29$  und  $3,2$

## B. Eindimensionales Spektrum

Gemessen wird das eindimensionale Spektrum  $\Theta_1(k_1)$

$$\overline{\Theta^2} = \int_0^\infty \Theta_1(k_1) dk_1.$$

Eindimensionales Spektrum  $\Theta_1(k_1)$  und dreidimensionales Spektrum  $\Theta(k)$  stehen in der Relation

$$\Theta_1(k_1) = \int_{k_1}^\infty \frac{\Theta(k)}{k} dk. \quad (39)$$

Für den Trägheits-Konvektionsunterbereich ergibt (5)

$$\Theta(k) = \alpha_\Theta \epsilon \Theta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3}$$

$$\Theta_1(k_1) = \alpha_{\Theta_1} \epsilon \Theta \epsilon^{-1/3} k_1^{-5/3} \text{ mit } \alpha_{\Theta_1} = \frac{3}{5} \alpha_\Theta. \quad (40)$$

Setzen wir in (39) das Ähnlichkeitsgesetz (30), (31) des dreidimensionalen Spektrums ein, so erhalten wir [4] das Ähnlichkeitsgesetz des eindimensionalen Spektrums im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$ :

Aus

$$\Theta_{*1}(k_{*1}) = \int_{k_{*1}}^\infty \frac{\Theta_*(k_*)}{k_*} dk_*$$

folgt mit

$$\frac{dk_*}{k_*} = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \frac{1+2x}{1-x} dx \quad (0 \leq x < 1)$$

$$\Theta_{*1}(x_1) = \frac{3}{2} \int_{x_1}^1 (1-x)^{3/2} x^m - 3/2 dx, \quad (41)$$

dazu tritt

$$k_{*1} = \frac{\sqrt{x_1}}{(1-x_1)^{3/2}}.$$

Wir erhalten dann z. B. für  $m = 1, 3/2$  und  $5/2$  die Verteilungen

$$m = 1: \Theta_{*1}(x_1) = \frac{3}{2} \left\{ \sqrt{x_1(1-x_1)} \left( -\frac{5}{4} + \frac{x_1}{2} \right) + \frac{3}{4} \arctan \sqrt{\frac{1-x_1}{x_1}} \right\},$$

$$m = \frac{3}{2}: \Theta_{*1}(x_1) = \frac{3}{5} (1-x_1)^{5/2},$$

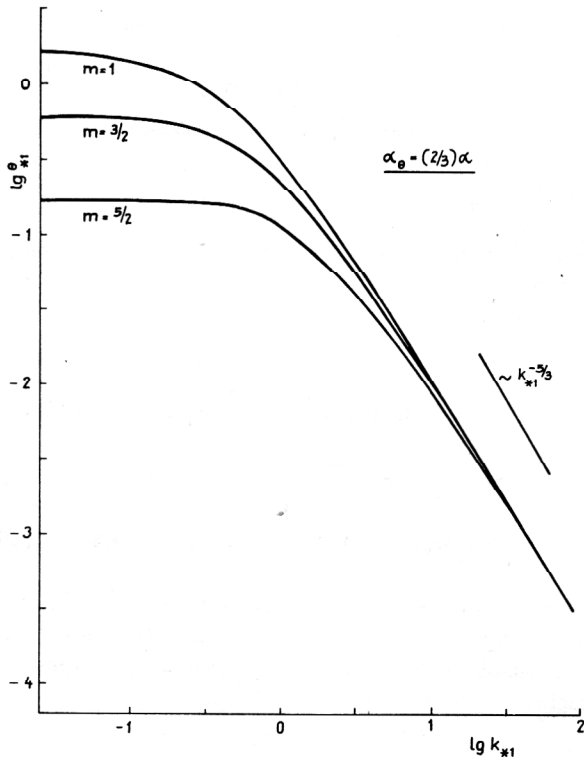
$$m = \frac{5}{2}: \Theta_{*1}(x_1) = \frac{3}{5} (1-x_1)^{5/2} \left[ 1 - \frac{5}{7} (1-x_1) \right];$$

die wir in Bild 7 aufgetragen haben.

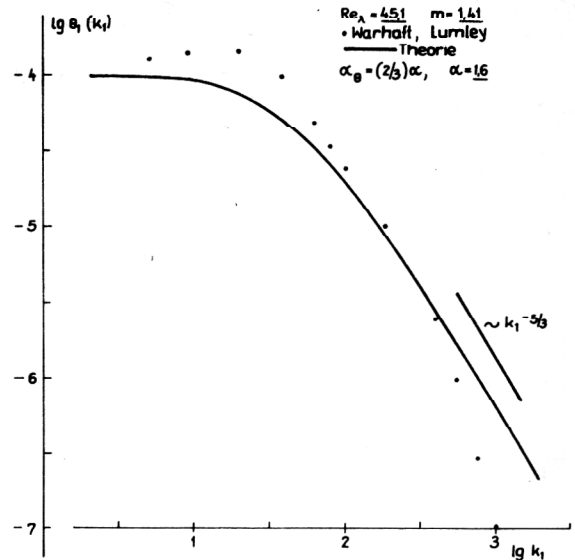
Bild 8 enthält einen Vergleich des theoretischen Spektrums

$$k_1 = k_{*1} \left( \frac{2}{3} \alpha \right)^{3/2} \frac{\epsilon}{(u'^2)^{3/2}},$$

$$\Theta_1(k_1) = \Theta_{*1} \left( \frac{2}{3} \alpha \right)^{-5/2} (u'^2)^{5/2} \epsilon^{-2} \epsilon \Theta$$



**Bild 7**  
Ähnlichkeitsprofile der eindimensionalen Spektren skalarer Schwankungen im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$



**Bild 8**  
Eindimensionales Spektrum der skalaren Schwankungen bei  $m = 1,41$  und  $Re_\lambda = 45,1$

nach (37), (38) mit dem von Warhaft und Lumley [8] gemessenen eindimensionalen Spektrum hinter einem beheizten Gitter bei  $m = 1,41$  und  $Re_\lambda = 45,1$ .

## II. Korrelationen von skalaren Schwankungen

Für die skalare Zweipunktkorrelation zweiter Ordnung

$$R_\Theta(r) = \overline{\Theta'(\mathcal{U}) \Theta'(\mathcal{U} + \mathcal{K})}$$

bzw. die Korrelationsfunktion

$$f_\Theta(r) = \frac{\overline{\Theta'(0) \Theta'(r)}}{\Theta'^2}$$

(Analogon zu  $f(r) = \frac{\overline{u'(0)u'(r)}}{u'^2}$ ,  $u'$  parallel zu  $\mathcal{K}$ ) erhält

man bekanntlich aus den Navier-Stokesschen Gleichungen die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\Theta'^2 f_\Theta(r)})$$

$$2 \overline{\Theta'^2} (u'^2)^{1/2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k_\Theta(r)) + 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \overline{\Theta'^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f_\Theta(r)}{\partial r}), \quad (42)$$

in der mit der Korrelation

$$\overline{\Theta'^2} (u'^2)^{1/2} k_\Theta(r) = \overline{\Theta'(0) u'(0) \Theta'(r)}$$

(Analogon zu  $(u'^2)^{3/2} k(r) = \overline{u'^2(0)u'(r)}$ ,  $u'$  parallel zu  $\mathcal{K}$ ) die Zweipunktkorrelation dritter Ordnung

$$R_{i,\Theta}(r) = \overline{\Theta'(\mathcal{U}) u'_i(\mathcal{U}) \Theta'(\mathcal{U} + \mathcal{K})}$$

auftritt (Das in (42) unterstrichene Glied resultiert aus den nichtlinearen Konvektionsgliedern der Navier-Stokesschen Gleichungen). Nahe verwandt den skalaren Korrelationen  $R_\Theta(r)$  und  $R_{i,\Theta}(r)$  sind die Strukturfunktionen

$$b_{\Theta}(r) = \overline{(\Theta'(r) - \Theta'(0))^2} = 2 \overline{\Theta'^2} (1 - f_{\Theta}(r)),$$

$$d_{\Theta}(r) = \overline{(\Theta'(r) - \Theta'(0))^2 \cdot (u'(r) - u'(0))} \quad (43)$$

$$= 4 \overline{\Theta'(0) u'(0) \Theta'(r)} = 4 \overline{\Theta'^2} \overline{(u'^2)^{1/2}} k_{\Theta}(r);$$

die Analoga zu den Strukturfunktionen (vgl. (\* B))

$$b(r) = \overline{(u'(r) - u'(0))^2} = 2 \overline{u'^2} (1 - f(r)),$$

$$d(r) = \overline{(u'(r) - u'(0))^3} = 6 \overline{(u'^2)^{3/2}} k(r) \quad (44)$$

darstellen.

Für  $b_{\Theta}(r)$  lautet die zu (42) analoge Gleichung

$$-\epsilon_{\Theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{\Theta}(r)}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 d_{\Theta}(r)) - \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial b_{\Theta}(r)}{\partial r}) \quad (45)$$

( $\epsilon_{\Theta}$  skalare Dissipation).

## A. Die Strukturfunktion $b_{\Theta}(r)$

### a) Trägheitskonvektionsunterbereich

Das mittlere Quadrat der relativen Temperatur über der Strecke  $r$  bzw. die Struktur  $b_{\Theta}(r)$  wird bei größerer Pécletscher Zahl  $Pe_r$

$$Pe_r = \frac{\sqrt{b(r)} r}{\nu} \frac{\nu}{(\lambda/\rho c_p)} = Re_r Pr \quad (46)$$

durch die Konvektion, bei kleinerem  $Pe_r$  durch die Diffusion (Wärmeleitung) gesteuert.

Wir können demnach – vgl. die analoge Betrachtung in (\* II A a) – im Bereich der skalaren Korrelation mit der Breite  $r_{0\Theta}$  einen Konvektionsbereich abgrenzen gegen einen Diffusionsbereich, in welchem der Einfluß der Diffusion zu berücksichtigen ist. Mit wachsender Pécletscher Zahl  $Pe_{r_{0\Theta}}$  wird dabei der Diffusionsbereich immer mehr eingeeengt. Multiplizieren wir Gl. (45) mit  $r^2$  und integrieren über  $r$ , so erhält man mit

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial b_{\Theta}(r)}{\partial r} = 0 \quad (47)$$

die bekannte Relation

$$d_{\Theta}(r) \approx -\frac{2}{3} \epsilon_{\Theta} r + 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial b_{\Theta}(r)}{\partial r}, \quad \text{für } r \approx 0. \quad (48)$$

Bei vernachlässigbarem Einfluß der Diffusion

$$\text{demnach } d_{\Theta}(r) \approx -\frac{2}{3} \epsilon_{\Theta} r \quad \text{für } r \approx 0. \quad (49)$$

Für hinreichend großes  $Re_{r_{0\Theta}}$  und  $Pe_{r_{0\Theta}}$  wird es dann nach Kolmogorov im Trägheits-Konvektionsbereich einen an den Diffusionsbereich angrenzenden Trägheits-Konvektionsunterbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$  geben, der als unabhängig von den äußeren Bedingungen angesehen werden kann und in welchem außer den Variablen  $r$  bzw.  $b(r)$  (vgl. (51)) und  $b_{\Theta}(r)$  nur noch die Parameter  $\epsilon$  und  $\epsilon_{\Theta}$  auftreten. Es folgt dimensionsanalytisch (Obuchow [1] und Corrsin [2]) das 2/3-Gesetz

$$b_{\Theta}(r) = C_{\Theta} \epsilon_{\Theta} \epsilon^{-1/3} r^{2/3} \quad \text{für } r \rightarrow 0 \quad (50)$$

im Trägheits-Konvektionsunterbereich; die dimensionslose empirische Konstante  $C_{\Theta}$  ist dabei als universelle Konstante anzusehen.

Analog gilt nach (\* (54))

$$b(r) = C \epsilon^{2/3} r^{2/3} \quad \text{für } r \rightarrow 0 \quad (51)$$

( $C$  dimensionslose empirische Konstante von universellem Charakter) im Trägheitsunterbereich.

Eliminiert man in (49) mit Hilfe von (50) und (51) den Parameter  $\epsilon_{\Theta}$  und die Variable  $r$ , so erhält man für  $d_{\Theta}(r)$  auch

$$d_{\Theta}(r) = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{1}{C_{\Theta}} b^{1/2}(r) b_{\Theta}(r) \quad \text{für } r \rightarrow 0 \quad (52)$$

im Trägheits-Konvektionsunterbereich.

### b) Universeller Bereich $r \ll r_0, r_{0\Theta}$

Im Zähigkeits-Diffusionsbereich treten (vgl. (\* II A b)) neben  $r$  als weitere determinierende Längen

$$(\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad \text{und} \quad ((\lambda/\rho c_p)^3/\epsilon)^{1/4} \quad \text{auf.}$$

Dimensionsanalytisch erhält man bei Fortsetzung von (50) und (51) in den Zähigkeits-Diffusionsbereich und damit für den sog. universellen Bereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$

$$b_{\Theta} = C_{\Theta} \epsilon_{\Theta} \epsilon^{-1/3} \varphi_{\Theta}(r \epsilon^{1/4}/\nu^{3/4}),$$

$$b = C \epsilon^{2/3} r^{2/3} \varphi(r \epsilon^{1/4}/\nu^{3/4})$$

mit den bei der Dimensionsanalyse unbestimmt bleibenden Funktionen  $\varphi_{\Theta}$  und  $\varphi$ .

Führen wir dimensionslose Größen

$$\tilde{r} = r(\epsilon/\nu^3)^{1/4}; \quad \tilde{b} = b(\epsilon\nu)^{-1/2}, \quad \tilde{b}_{\Theta} = b_{\Theta} \frac{(\epsilon/\nu)^{1/2}}{\epsilon_{\Theta}} \quad (53)$$

ein, so haben wir demnach im universellen Bereich

$$\tilde{b}_{\Theta}(\tilde{r}) = C_{\Theta} \tilde{r}^{2/3} \cdot \varphi_{\Theta}(\tilde{r}), \quad \tilde{b}(\tilde{r}) = C \tilde{r}^{2/3} \varphi(\tilde{r}). \quad (54)$$

Entspr. nach (52)

$$\tilde{d}_{\Theta}(\tilde{r}) (= d_{\Theta} \frac{(\epsilon/\nu^3)^{1/4}}{\epsilon_{\Theta}})$$

$$= -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{1}{C_{\Theta}} \tilde{b}^{1/2}(\tilde{r}) \tilde{b}_{\Theta}(\tilde{r}) \varphi_{1\Theta}(\tilde{r}). \quad (55)$$

Für das Frühstadium gilt dabei nach (\* (11))

$$\epsilon = \frac{1}{4} \frac{\nu}{a^2} \frac{1}{t^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\epsilon}{dt} = -4a(\epsilon^3/\nu)^{1/2}$$

$$(a = \sqrt{5/3} Re_{\lambda}^{-1} = \frac{1}{3} \frac{(\epsilon\nu)^{1/2}}{u'^2}, \quad Re_{\lambda} = \sqrt{15} \frac{u'^2}{(\epsilon\nu)^{1/2}});$$

und nach (17)

$$\epsilon_{\Theta} \sim t^{-(m+1)}$$

Transformieren wir Gl. (45) auf die Variablen  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{b}_{\Theta}$  und  $\tilde{d}_{\Theta}$ , so nimmt diese unter Beachtung von

$$\frac{1}{\epsilon_{\Theta}} \frac{\partial b_{\Theta}}{\partial t} \Big|_r = - (2am \tilde{b}_{\Theta} + a r \frac{\tilde{d} b_{\Theta}}{\tilde{d} \tilde{r}})$$

im universellen Bereich die Form an [11]

$$-1 + a \left( m \tilde{b}_\Theta + \frac{\tilde{r}}{2} \frac{d\tilde{b}_\Theta}{d\tilde{r}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \tilde{d}_\Theta \right) - \frac{1}{Pr} \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \frac{d\tilde{b}_\Theta}{d\tilde{r}} \right). \quad (56)$$

Die definitive mathematische Formulierung von  $\tilde{d}_\Theta(\tilde{r})$  in Abhängigkeit von den Variablen  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{b}(\tilde{r})$  und  $\tilde{b}_\Theta(\tilde{r})$  steht noch aus und stellt – entsprechend dem skalaren Transfer  $\tilde{F}(k)$  – ein Hauptproblem dar.

Eine Aussage ist jedoch für  $\tilde{r} \rightarrow 0$  – vgl.  $\langle * IAb \rangle$  – möglich. Hier ist mit  $Re_r \rightarrow 0$  die aus den nichtlinearen Konvektionsgliedern resultierende Korrelation dritter Ordnung als vernachlässigbar anzusehen.

Es ergibt sich bekanntlich

$$\tilde{b}_\Theta(\tilde{r}) = \frac{Pr}{6} \tilde{r}^2 \quad \text{für } \tilde{r} \rightarrow 0 \quad (57)$$

im universellen Bereich.

### c) Trägheits-Konvektionsbereich $r \ll r_0, r_{0\Theta}$ [11]

Für  $d_\Theta(r)$  gibt Dimensionsanalyse hier auch unabhängig von der Existenz eines Unterbereiches

$$d_\Theta(r) = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{1}{C_\Theta} b^{1/2}(r) b_\Theta(r); \quad (58)$$

denn nach Definition (43), (44) bedingen  $d_\Theta$  und  $b_\Theta$ ,  $b$  einander.

Setzt man in (58) für den Trägheits-Konvektionsunterbereich nach (50), (51)

$$b_\Theta \approx C_\Theta \epsilon_\Theta \epsilon^{-1/3} r^{2/3}, \quad b \approx C_\Theta \epsilon^{2/3} r^{2/3},$$

$$\text{so folgt wieder (49) } d_\Theta(r) \approx -\frac{2}{3} \epsilon_\Theta r.$$

Setzen wir (58) in Gl. (56) ein, so erhalten wir für den genannten Bereich die Gleichung

$$-1 + a \left( m \tilde{b}_\Theta + \frac{\tilde{r}}{2} \frac{d\tilde{b}_\Theta}{d\tilde{r}} \right) = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{1}{C_\Theta} \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \tilde{b}^{1/2} \tilde{b}_\Theta \right). \quad (59)$$

Führt man hier die Variablen

$$r_* = a^{3/2} \tilde{r} = \left( \frac{1}{3} \right)^{3/2} \frac{\epsilon}{(u^2)^{3/2}} r, \quad (60)$$

$$b^* = a \tilde{b} = \frac{1}{3} \frac{b}{u^2}, \quad b^*_\Theta = a \tilde{b}_\Theta = \frac{1}{3} \frac{\epsilon}{u^2} \frac{b_\Theta}{\epsilon_\Theta}$$

ein, so resultiert die vom Parameter  $a$  freie Gleichung

$$-1 + m b^*_\Theta + \frac{r_*}{2} \frac{d b^*_\Theta}{d r_*} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{1}{C_\Theta} \frac{1}{r_*^2} \frac{d}{d r_*} \left( r_*^2 b^{*1/2} b^*_\Theta \right). \quad (61)$$

Es folgt mit  $b^* = F(r_*)$  nach  $\langle * (66) \rangle$ , daß im Trägheits-Konvektionsbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$  ein Ähnlichkeitsgesetz

$$b^*_\Theta = F_\Theta(r_*, m) \quad (62)$$

existent ist.

Eine entsprechende Aussage gilt nach (43) dann auch für die Korrelationsfunktion  $f_\Theta(r)$ ; und zwar haben wir zunächst

$$\frac{b_\Theta}{2\Theta^2} = 1 - f_\Theta(r_*, m).$$

Nach Definition (60) sowie mit  $E \sim 1/t$  nach  $\langle * (13) \rangle$  und  $\Theta^2 \sim 1/t^m$  nach (17) erhalten wir

$$\frac{b_\Theta}{2\Theta^2} = \frac{(3/2) u^2}{\epsilon} \frac{\epsilon_\Theta}{\Theta^2} b^*_\Theta = m b^*_\Theta.$$

Damit dann schließlich

$$b^*_\Theta = [1 - f_\Theta(r_*, m)] \frac{1}{m}. \quad (63)$$

Anhand der im nachfolgenden Abschnitt B erfolgten numerischen Ermittlung (Tabelle 1) des Ähnlichkeitsgesetzes

$$f_\Theta(r_{**}, m) \quad (r_{**} = (2\alpha)^{3/2} r_*)$$

im Trägheits-Konvektionsbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$  haben wir für  $m = 1$  die Verteilung von  $b^*_\Theta (= \frac{1}{2} \frac{b_\Theta}{\Theta^2})$  über  $r_{**}$  in Bild 9 aufgetragen.

Für die universelle Konstante  $C_\Theta$  des 2/3-Gesetzes ergibt sich (vgl. (83))

$$\frac{C_\Theta}{\alpha} = 1,607. \quad (64)$$

Wir geben noch die Asymmetrie (skewness)

$$S_\Theta = \frac{\overline{(u'(r) - u'(0)) (\Theta'(r) - \Theta'(0))^2}}{\overline{(u'(r) - u'(0))^2}^{1/2} \overline{(\Theta'(r) - \Theta'(0))^2}} \equiv \frac{d_\Theta}{b^{1/2} b_\Theta} \quad (65)$$

an.

Wir erhalten für den Trägheits-Konvektionsunterbereich nach (52) mit (64) und

$$\frac{C}{\alpha} = 1,315 \quad (\text{vgl. } \langle * (75) \rangle)$$

$$S_\Theta = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{1}{C_\Theta} = -0,362 \frac{1}{\alpha^{3/2}}; \quad (66)$$

in

$$\alpha = \frac{55}{18} \alpha_1, \quad \alpha_\Theta = \frac{5}{3} \alpha_{\Theta 1} \quad \text{nach (7) und (8)}$$

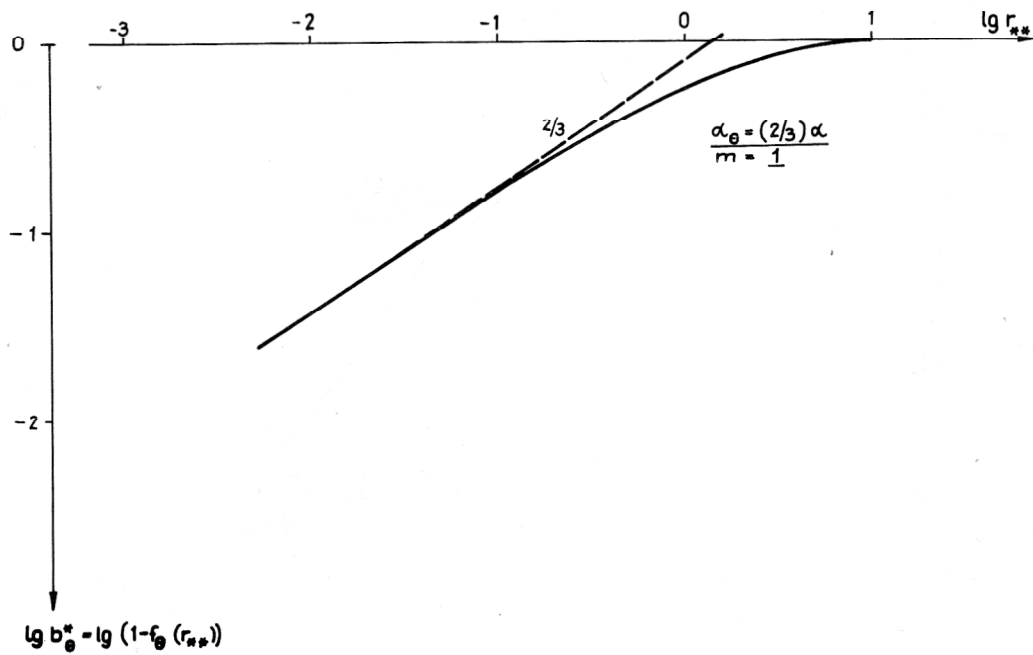
$$S_\Theta = -0,0828 \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\Theta 1}}}. \quad (67)$$

Die Relationen (43) und (44) ergeben

$$\alpha^{3/2} S_\Theta = \frac{\sqrt{2} \alpha^{3/2} k_\Theta(r_{**})}{\sqrt{1 - f(r_{**})} (1 - f_\Theta(r_{**}))}, \quad (68)$$

Grenzwert

$$\lim_{r_{**} \rightarrow 0} \alpha^{3/2} S_\Theta = -0,362 \quad \text{nach (87).}$$



**Bild 9**  
 Ähnlichkeitsprofil der Strukturfunktion  $b_{\Theta}^* (= \frac{1}{2} b_{\Theta} / \overline{\Theta^2})$   
 im Trägheits-Konvektionsbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$

**Tabelle 1**

$r_{**}$	$f_{\Theta}(r_{**})$	
	$m = 1$	$m = 1,5$
0,002	0,9868	
0,005	0,9762	0,9653
0,010	0,9628	0,9456
0,050	0,8957	0,8493
0,10	0,8393	0,7715
0,50	0,5952	0,4663
1,0	0,4349	0,2947
1,5	0,3331	0,1989
2,0	0,2621	0,1380
2,5	0,2102	0,0995
3,0	0,1710	0,0724
3,5	0,1408	0,0533
4,0	0,1171	0,0397
4,5	0,0982	0,0218
5,0	0,0831	0,0225
5,5	0,0709	0,0171
6,0	0,0609	0,0130
6,5	0,0526	0,0100
7,0	0,0457	0,0077
7,5	0,0400	0,0059
8,0	0,0352	0,0046
8,5	0,0311	0,0036
9,0	0,0276	0,0028
9,5	0,0247	0,0022
10,0	0,0221	0,0012
15	0,0090	0,0001 <sub>5</sub>
20	0,0047	0,0000 <sub>1</sub>
25	0,0028	
30	0,0018	

**Tabelle 2**

$r_{**}$	$-\alpha^{3/2} k_{\Theta}(r_{**})$	
	$m = 1$	$m = 1,5$
0,002	0,0004	0,0006
0,0050	0,0010	0,0015
0,010	0,0020	0,0029
0,050	0,0091	0,0130
0,10	0,0168	0,0236
0,50	0,0576	0,0714
1,0	0,0810	0,0902
1,5	0,0896	0,0913
2,0	0,0905	0,0852
2,5	0,0872	0,0762
3,0	0,0817	0,0665
3,5	0,0752	0,0572
4,0	0,0683	0,0486
4,5	0,0616	0,0410
5,0	0,0552	0,0344
5,5	0,0492	0,0288
6,0	0,0438	0,0240
6,5	0,0388	0,0199
7,0	0,0344	0,0165
7,5	0,0305	0,0187
8,0	0,0270	0,0113
8,5	0,0239	0,0093
9,0	0,0211	0,0077
9,5	0,0187	0,0063
10,0	0,0166	0,0052
15	0,0054	0,0007
20	0,0021	0,0001
25	0,0010	0,0000 <sub>1</sub>
30	0,0005	

Für  $m = 1$  erhalten wir mit  $\alpha^{3/2} k_{\Theta}(r_{**})$  (Tabelle 2),  $f_{\Theta}(r_{**})$  (Tabelle 1) und  $f(r_{**})$  (Tabelle in  $\langle * \rangle$ ) die in Bild 10 aufgetragene Verteilung. Mit wachsendem  $r_{**}$

bzw.  $r$  nimmt die Asymmetrie ab und strebt dem Wert Null zu.

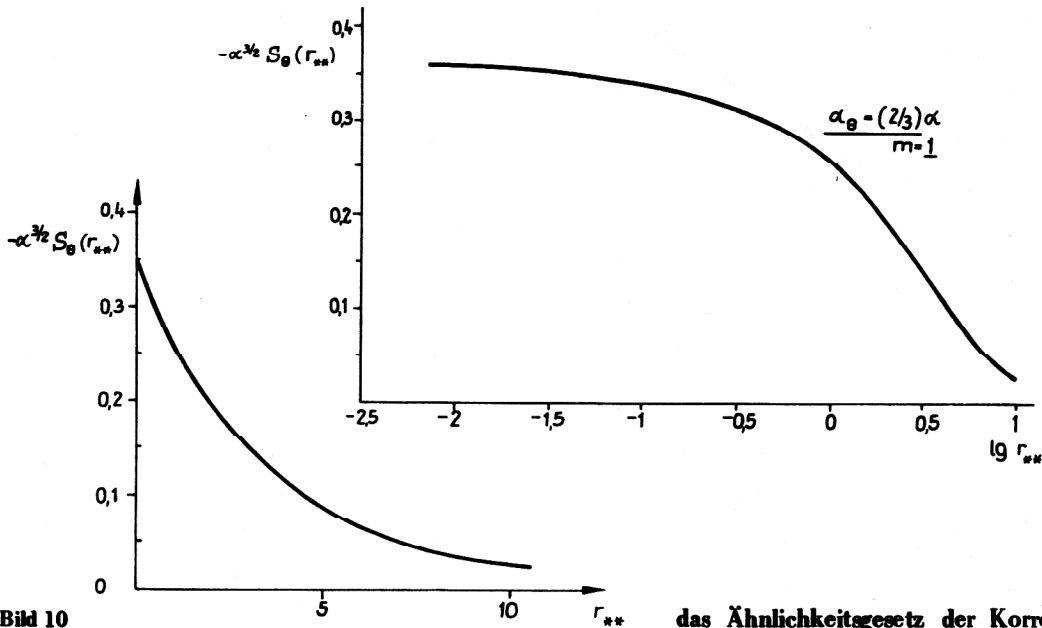


Bild 10  
Verlauf der Asymmetrie  $S_{\Theta}$  bei  $m = 1$

## B. Die skalaren Korrelationsfunktionen $f_{\Theta}(r)$ und $k_{\Theta}(r)$

### a) Die skalare Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $f_{\Theta}(r)$

Wir ermitteln den Verlauf von  $f_{\Theta}(r)$  anhand der bekannten Relation

$$f_{\Theta}(r) = \frac{\int_0^{\infty} \Theta(k) \frac{\sin kr}{kr} dk}{\int_0^{\infty} \Theta(k) dk};$$

in dimensionslosen Größen (11)

$$f_{\Theta}(\tilde{r}) = \frac{\int_0^{\infty} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) \frac{\sin \tilde{k} \tilde{r}}{\tilde{k} \tilde{r}} d\tilde{k}}{\int_0^{\infty} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) d\tilde{k}} \quad (69)$$

Setzen wir hier das Ähnlichkeitsgesetz (31) des skalaren Spektrums im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$  ein, so erhalten wir mit

$$k_* = \tilde{k} M^{-3/2} = \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}, \quad r_{**} = \tilde{r} M^{3/2};$$

$$\Theta_* = \tilde{\Theta}(\tilde{k}) M^{5/2} / \alpha_{\Theta}$$

$$= (1-x)^{5/2} x^{m-1/2} \frac{3}{1+2x} \text{ bei } \alpha_{\Theta} = \frac{2}{3} \alpha$$

und

$$d\tilde{k} = M^{3/2} \frac{1}{2} \frac{1+2x}{\sqrt{x}} \frac{1}{(1-x)^{5/2}} dx \quad (70)$$

$$(M = 2\alpha a = \frac{2}{3} \alpha \frac{(\epsilon\nu)^{1/2}}{u'^2})$$

das Ähnlichkeitsgesetz der Korrelationsfunktion  $f_{\Theta}(r)$  im Trägheits-Korrelationsbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$

$$f_{\Theta}(r_{**}) = \frac{m}{r_{**}} \int_0^1 \sin [r_{**} \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}] (1-x)^{3/2} x^{m-\frac{3}{2}} dx \quad (71)$$

$$(1-x)^{3/2} x^{m-\frac{3}{2}} dx$$

in der Ähnlichkeitsvariablen

$$r_{**} = (2\alpha)^{3/2} r_* = (\frac{2}{3} \alpha)^{3/2} \frac{\epsilon}{(u'^2)^{3/2}} r \quad (72)$$

nach (70) und (60).

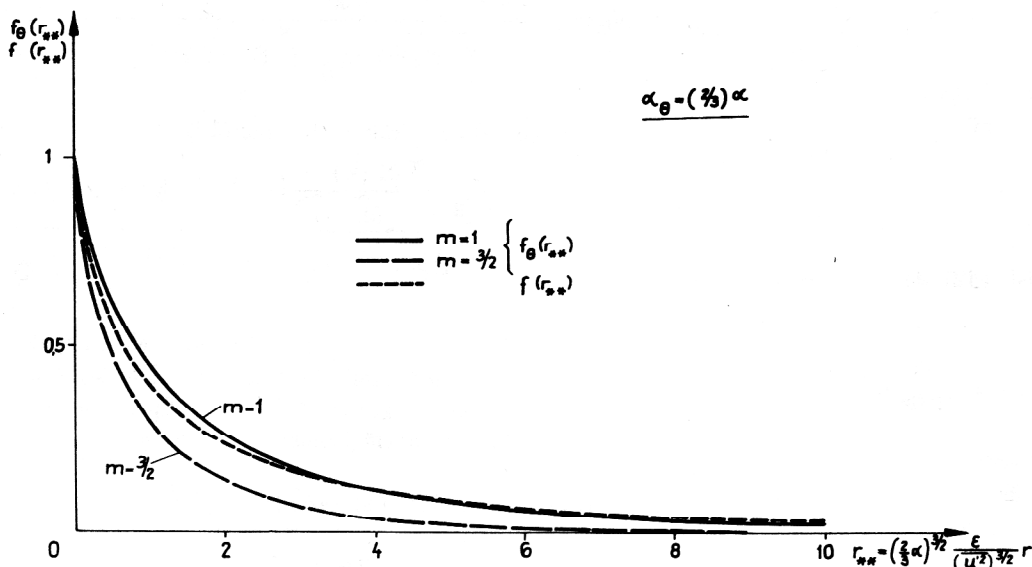
Die numerische Auswertung für  $m = 1$  und  $m = 3/2$  (Tabelle 1) ergibt den in Bild 11 wiedergegebenen Verlauf von  $f_{\Theta}(r_{**})$ . Demnach besitzt – wie unmittelbar auch aus (71) ersichtlich – die skalare Korrelation bei größerem  $m$  eine kleinere Breite (Integrallänge  $\int_0^{\infty} f_{\Theta}(r_{**}) dr_{**}$ ).

Zusammenfassend ist nach der Theorie festzustellen, daß ein stärkeres zeitliches Abklingen von  $\Theta'^2$  sich in einer kleineren Integrallänge der skalaren Korrelation manifestiert, verbunden mit einer kleineren lokalen Länge des Turbulenzelementes des Maximums des dreidimensionalen skalaren Spektrums (vgl. Abschnitt A, c) und geringerer Intensität desselben.

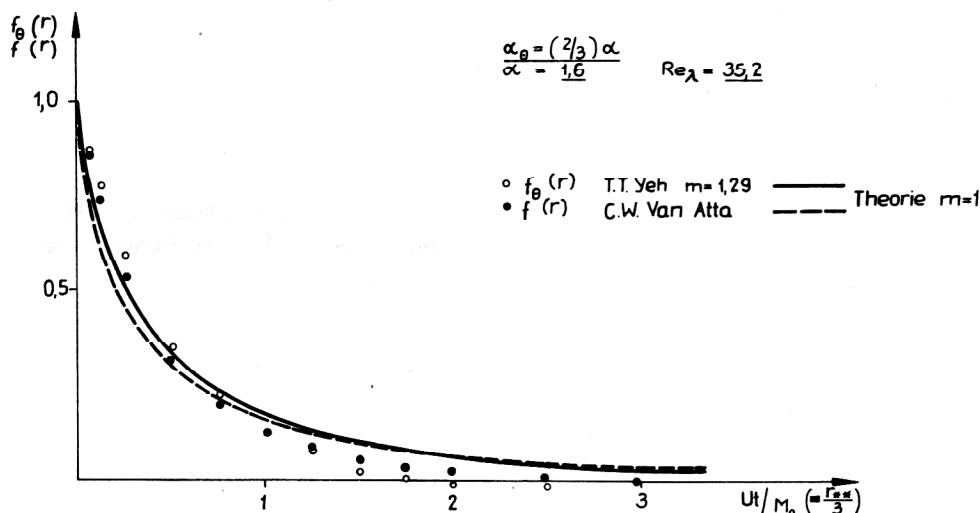
Zum Vergleich haben wir in Bild 11 noch die longitudinale Korrelationsfunktion  $f(r_{**})$  (Tabelle in (\*)) eingetragen. Es zeigt sich, daß – in Übereinstimmung mit einer Messung bei  $m = 1,29$  (vgl. Bild 12) –  $f_{\Theta}(r_{**})$  bei  $m = 1$  im Vergleich zu  $f(r_{**})$  zunächst langsamer über  $r_{**}$  abfällt, um dann jedoch für größere  $r_{**}$  schneller abzufallen; während bei  $m = 3/2$  die Korrelationsfunktion  $f_{\Theta}(r_{**})$  permanent schwächer ist als  $f(r_{**})$ .

Die erforderlichen Daten für einen Vergleich mit der Theorie enthält eine Messung von Yeh; Van Atta [10]





**Bild 11**  
 Ähnlichkeitsprofile der Korrelationsfunktionen  $f(r)$  und  $f_{\Theta}(r)$   
 im Trägheits-Konvektionsbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$



**Bild 12**  
 Experimentelles ( $m = 1,29$ ) und theoretisches ( $m = 1$ ) Profil  
 von  $f_{\Theta}(r)$

hinter einem beheizten Gitter, wobei  $m = 1,29$  betrug. Die Messung wurde allerdings bei der relativ kleinen Reynoldsschen Zahl  $Re_{\lambda} = 35,2$  durchgeführt, während die Theorie relativ großes  $Re_{\lambda}$  bzw. die Existenz eines  $-5/3$ -Gesetzes des skalaren Spektrums voraussetzt. Demgemäß sind Abweichungen der Theorie vom Experiment von vornherein zu erwarten. Mit  $\alpha = 1,6$  und den in [10] mitgeteilten Daten

$$\epsilon = 0,045 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}, \quad (\overline{u'^2})^{1/2} = 0,08725 \text{ ms}^{-1}$$

ergibt sich nach (72)

$$r_{**} = 75,63 \text{ r} \quad \text{bzw.} \quad r_{**} = 3,02 \text{ r} / M_0$$

( $M_0 = 0,04 \text{ m}$  Maschenweite des Gitters).

Der in Bild 12 wiedergegebene Vergleich (Theorie  $m = 1$ ) zeigt in Anbetracht der Gegebenheiten eine befriedigende Übereinstimmung.

**b) Die skalare Korrelationsfunktion dritter Ordnung  $k_{\Theta}(r)$  [11]**

1. Zur Ermittlung des Verlaufs von  $k_{\Theta}(r)$  leiten wir zunächst die Integralrelation ab, die  $k_{\Theta}(r)$  in Beziehung zum skalaren Transfer  $F(k)$  in der Gleichung (1) des skalaren Spektrums

$$\frac{\partial \Theta(k)}{\partial t} = - \frac{\partial F(k)}{\partial k} - 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} k^2 \Theta(k)$$

setzt.

Multiplizieren wir hier mit  $\sin kr/kr$  und integrieren über  $k$ , so erhalten wir bei Anwendung der Relation (69)

$$\overline{\Theta^2} f_{\Theta}(r) = \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{kr} \Theta(k) dk$$

zunächst

$$\frac{\partial \overline{\Theta^2} f_{\Theta}(r)}{\partial t} = - \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{kr} \frac{\partial F(k)}{\partial k} dk$$

$$- \frac{\lambda}{\rho c_p} \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{kr} k^2 \Theta(k) dk. \quad (72)$$

Der Vergleich mit der Gl. (42) der skalaren Korrelation  $\overline{\Theta^2} f_{\Theta}(r)$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\Theta^2} f_{\Theta}(r)) = 2 \overline{\Theta^2} (\overline{u^2})^{1/2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k_{\Theta}(r))$$

$$+ 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \overline{\Theta^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f_{\Theta}(r)}{\partial r})$$

ergibt dann

$$- \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{kr} \frac{\partial F(k)}{\partial k} dk$$

$$- 2 \overline{\Theta^2} (\overline{u^2})^{1/2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k_{\Theta}(r)). \quad (73)$$

Multiplizieren wir hier mit  $r^2/2$  und integrieren über  $r$ , so folgt

$$\overline{\Theta^2} (\overline{u^2})^{1/2} r^2 k_{\Theta}(r)$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial F(k)}{\partial k} \frac{1}{k^3} [\sin(kr) - kr \cos(kr)] dk$$

und damit schließlich

$$k_{\Theta}(r) = \frac{- \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial F(k)}{\partial k} \frac{1}{k^3} [\sin(kr) - kr \cos(kr)] dk}{\int_0^{\infty} \Theta(k) dk \cdot (\frac{2}{3} \int_0^{\infty} E(k) dk)^{1/2}}; \quad (74)$$

in dimensionslosen Größen (11) und (13)

$$k_{\Theta}(\tilde{r}) = \frac{- \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{r}^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{k})}{\partial \tilde{k}} \frac{1}{\tilde{k}^3} [\sin(\tilde{k} \tilde{r}) - \tilde{k} \tilde{r} \cos(\tilde{k} \tilde{r})] d\tilde{k}}{\int_0^{\infty} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) d\tilde{k} \cdot (\frac{2}{3} \int_0^{\infty} \tilde{E}(\tilde{k}) d\tilde{k})^{1/2}} \quad (75)$$

2. Neben das Ähnlichkeitsgesetz (31) des skalaren Spektrums im Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$  tritt hier das Ähnlichkeitsgesetz (\* (29)) des Spektrums der Turbulenzenergie im Trägheitsbereich  $k \gg k_0$

$$E_*(k_*) = \tilde{E}(\tilde{k}) M^{5/2} / \alpha - \sqrt{x} (1-x)^{5/2},$$

$$k_* = \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}} \quad (0 \leq x < 1). \quad (76)$$

Für den skalaren Transfer  $\tilde{F}(\tilde{k})$  haben wir nach (13) mit (70) und (76)

$$\tilde{F}(\tilde{k}) = \alpha_{\Theta}^{-1} \alpha^{-1/2} \tilde{k}^{5/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{1/2} \tilde{\Theta}(\tilde{k}) = \frac{3}{1+2x} x^{m+1} \quad (77)$$

bei  $\alpha_{\Theta} = \frac{2}{3} \alpha$ , bzw.

$$\frac{d\tilde{F}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} d\tilde{k} = \frac{d\tilde{F}(\tilde{k})}{dx} dx$$

$$= \frac{3}{(1+2x)^2} x^m (m+1+2mx) dx.$$

Damit erhalten wir dann das Ähnlichkeitsgesetz der Korrelationsfunktion  $k_{\Theta}(r)$  im Trägheits-Konvektionsbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$

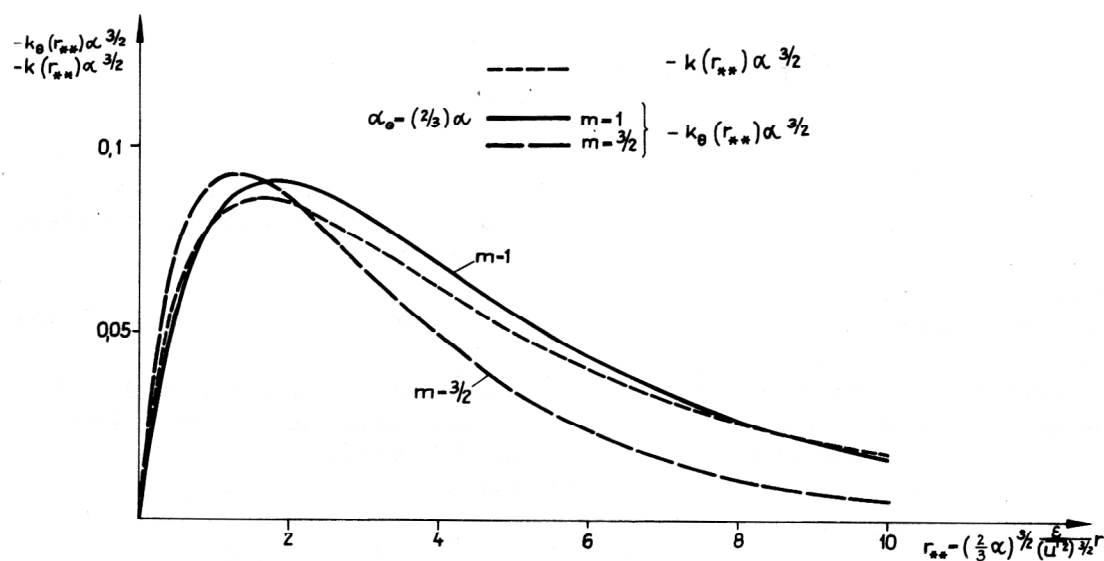
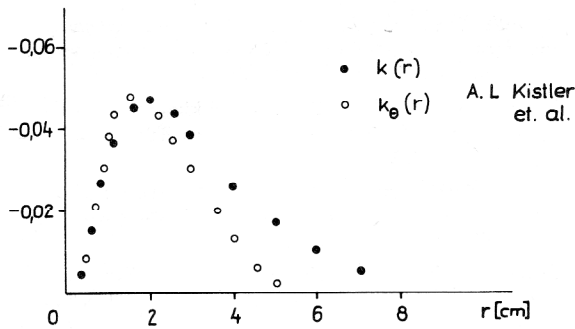


Bild 13  
Ähnlichkeitsprofile der Korrelationsfunktionen  $k(r)$  und  $k_{\Theta}(r)$   
im Trägheits-Konvektionsbereich  $r \ll r_0, r_{0\Theta}$



**Bild 14**  
Experimentelle Profile  $b(r)$  und  $b_{\Theta}(r)$

$$\alpha^{3/2} k_{\Theta}(r_{**}) = -\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{m}{r_{**}} \int_0^1 \frac{m+1+2mx}{(1+2x)^2} x^{m-1} (1-x)^3 \left\{ \frac{\sin\left[r_{**} \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}\right]}{\left[r_{**} \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}\right]} - \cos\left[r_{**} \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}\right] \right\} dx. \quad (78)$$

Die berechneten Funktionen  $\alpha^{3/2} k_{\Theta}(r_{**})$  für  $m=1$  und  $m=3/2$  (Tabelle 2) haben wir in Bild 13 aufgetragen; dazu zum Vergleich die longitudinale Korrelationsfunktion  $\alpha^{3/2} k(r_{**})$  (Tabelle in  $\langle * \rangle$ ).

Vorliegende Messungen zeigen ein stark unterschiedliches Bild. Der in Bild 14 wiedergegebenen Messung von Kistler et. al. [12] kann man ein  $k_{\Theta, \max} \approx 0,048$  entnehmen, während eine von Yeh, Van Atta [10] durchgeführte Messung  $k_{\Theta, \max} \approx 0,08$  anzeigt. Der erstere Wert steht in guter Übereinstimmung mit dem sich für  $\alpha = 1,6$  ergebenden theoretischen Wert  $k_{\Theta, \max} \approx 0,045$ ; doch ist aus den Bildern 12 und 13 ersichtlich, daß die experimentell erhaltene Korrelationsfunktion  $k_{\Theta}(r)$  hier wesentlich schneller über  $r$  abfällt als die theoretischen.

### C. Grenzwerte für $r_{**} \approx 0$ im Trägheits-Konvektionsbereich $r \ll r_0, r_{0\Theta}$

Transformieren wir in (71) bzw. in

$$1 - f_{\Theta}(r_{**}) = \int_0^1 \left( 1 - \frac{\sin\left[r_{**} \sqrt{x}/(1-x)^{3/2}\right]}{\left[r_{**} \sqrt{x}/(1-x)^{3/2}\right]} \right) dx \quad \text{für } m=1 \quad (79)$$

auf die Variable

$$y = r_{**} \sqrt{x}/(1-x)^{3/2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2}{r_{**}} \frac{\sqrt{x}(1-x)^{5/2}}{1+2x},$$

so

$$1 - f_{\Theta}(r_{**}) = \frac{2}{r_{**}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}(1-x)^{5/2}}{1+2x} \left( 1 - \frac{\sin y}{y} \right) dy.$$

Beschränken wir uns auf den Bereich

$$r_{**}^2 \ll y^2 \quad (y > 0), \quad (80)$$

so erhalten wir mit

$$1 - x = x^{1/3} \frac{r_{**}^{2/3}}{y^{2/3}} \approx \frac{r_{**}^{2/3}}{y^{2/3}} \quad (x \approx 1) \quad (81)$$

$$1 - f_{\Theta}(r_{**}) \approx \frac{2}{3} r_{**}^{2/3} \int_0^{\infty} \frac{1}{y^{5/3}} \left( 1 - \frac{\sin y}{y} \right) dy = \frac{3}{5} r_{**}^{2/3} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y^{2/3}} dy \quad \text{für } r_{**} \approx 0$$

bzw.

$$\lim_{r_{**} \rightarrow 0} (1 - f_{\Theta}(r_{**})) = \frac{3}{5} r_{**}^{2/3} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y^{2/3}} dy = \frac{3}{10} \Gamma(1/3) r_{**}^{2/3} \quad (82)$$

Das ergibt dann nach (63) und (72)

$$\lim_{r_{**} \rightarrow 0} b^*_{\Theta} = 1 - f_{\Theta}(r_{**}) = \frac{3}{5} \Gamma(1/3) \alpha r_{**}^{2/3} \equiv C_{\Theta} r_{**}^{2/3} \quad \text{für } m=1, \quad (83)$$

$$\text{also } \frac{C_{\Theta}}{\alpha} = \frac{3}{5} \Gamma(1/3) = 1,607.$$

Wenn  $m=3/2$ , so erhalten wir, wie hier nur angemerkt sei, erwartungsgemäß wieder (83).

Für  $b^* = C r_{**}^{2/3}$  hatte sich in  $\langle * \rangle$  (75)

$$\frac{C}{\alpha} = \frac{27}{55} \Gamma(1/3) = 1,315 \quad (84)$$

ergeben.

Es folgt damit für die universellen Konstanten  $C_{\Theta}$  und  $C$  die Relation

$$\frac{C_{\Theta}}{C} = \frac{(3/5) \Gamma(1/3)}{(27/55) \Gamma(1/3)} = \frac{11}{9}, \quad (85)$$

für die Strukturfunktionen

$$b^*_{\Theta} = \frac{11}{9} b^* \quad \text{bei } r_{**} \approx 0 \quad (86)$$

und für die Asymmetrie (65)

$$S_{\Theta} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{1}{C_{\Theta}} = -\frac{6}{11} \frac{1}{C^{3/2}} \quad (87)$$

bzw.

$$-\alpha^{3/2} S_{\Theta} = \frac{6}{11} \frac{1}{1,315^{3/2}} = 0,362 \quad \text{bei } r_{**} \approx 0.$$

Dabei war, wie mehrfach bemerkt,  $\alpha_{\Theta} = (2/3)\alpha$  angenommen worden.

### Literatur

- $\langle * \rangle$  Szablewski, W.: Zur Theorie der Struktur homogener isotroper Turbulenz. Spektrum der Turbulenzenergie und Geschwindigkeitskorrelationen. Technische Mechanik 6 (1985) 2, S. 19.
- [1] Obuchow, A. M., Die Struktur des Temperaturfeldes einer turbulenten Strömung, AN SSR, Geophys. 13 (1949), 58.
- [2] Corrsin, S., On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, J. Appl. Phys. 23 (1951), 469.
- [3] a) Gibson, C. H. and Schwarz, W. H., Detection of conductivity fluctuations in a turbulent field, Fluid Mech. 16 (1963), 357.

- b) Gibson, C. H.; Stegen, G. R. and Williams, R. B., Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number, *Fluid Mech.* 41 (1970), 153.
- c) Boston, N. E. J. and Burling, R. W., An investigation of high-wavenumber temperature and velocity spectra in air, *Fluid Mech.* 55 (1972), 473.
- d) Williams, R. M. and Paulsen, C. A., Microscale temperature and velocity spectra in the atmospheric boundary layer, *Fluid Mech.* 83 (1977), 547.
- e) Grant, H. L.; Hughes, B. A.; Vogcl, W. M. and Moillic, A., Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number, *Fluid Mech.* 41 (1968), 423.
- [ 4 ] Szablewski, W., Ähnlichkeitsgesetz des Spektrums von skalaren Schwankungen für den Trägheits-Konvektionsbereich  $k \gg k_0$  in homogener isotroper Turbulenz, *Z.A.M.M.* 60 (1980), 89.
- [ 5 ] Corrsin, S., The reactant concentration spectrum in turbulent mixing with a first - order reacting, *Fluid Mech.* 11 (1961), 407.
- [ 6 ] Pao, Yih-Ho, Structure of velocity and scalar fields at large wavenumbers, *Phys. Fluids* 8 (1965), 1063.
- [ 7 ] Lin, Shih-Chun and Lin, Shao-Chi, Study of strong temperature mixing in subsonic grid turbulence, *Phys. Fluids* 6 (1973), 1587.
- [ 8 ] Warhaft, Z. and Lumley, J. L., An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence, *Fluid Mech.* 88 (1978), 659.
- [ 9 ] Szablewski, W., Über Spektren abklingender skalärer Schwankungen in homogener isotroper Turbulenz, *Z.A.M.M.* 64 (1984), 66.
- [10] Yeh, T. T. and Van Atta, C. W., Spectral transfer of scalar and velocity fields in heated - grid turbulence, *Fluid Mech.* 58 (1973), 233.
- [11] Szablewski, W., Über Korrelationen von Skalaren in homogener isotroper Turbulenz, *Z.A.M.M.* 65 (1985), 79.
- [12] Kistler, A. L.; O'Brien, V. O. and Corrsin, S., Double and triple correlations behind a heated grid, *J. Aeron. Sci.* 23 (1956), 96.

Anschrift des Verfassers:  
 Prof. Dr. W. Szablewski,  
 Akademie der Wissenschaften der DDR  
 Institut für Mechanik  
 1199 Berlin  
 Rudower Chaussee 5