

Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die statische Strukturanalyse dünnwandiger komplexer Konstruktionen

J. Altenbach und M. Zwicke

1. Einleitung

Charakteristisch für die immer breiter zur Anwendung kommende Leichtbauweise sind dünnwandige, oft vielfach ausgesteifte Bauformen. Ein leistungsfähiges Verfahren zur Berechnung der Verformungen und Spannungen für solche Konstruktionen ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Auf Grund der komplizierten Geometrie ist jedoch eine sehr feine Diskretisierung notwendig, und der Aufwand für eine vollständige Strukturanalyse ist relativ hoch.

Für die Projektierung und den optimalen Entwurf komplexer Konstruktionen reicht oft eine globale Analyse des Tragverhaltens aus. Dazu bieten sich für typische Konstruktionen, z. B. des Brücken- oder des Schiffbaus (Bild 1), eindimensionale, stabförmige Berechnungsmodelle an. Für ausgewählte Belastungsfälle können bereits die klassischen Stabmodelle von Bernoulli und Vlasov aussagekräftige Ergebnisse liefern. Es hat sich allerdings gezeigt, daß das Verhalten allgemeiner dünnwandiger Konstruktionen durch derartig einfache Modelle oft nicht richtig erfaßt werden kann und daß insbesondere die Berücksichtigung der Querschnittsdeformationen und der Schubverzerrungen die Aussagequalität eines Stabmodelle entscheidend verbessert. Deshalb sind im Verlaufe der letzten Jahre viele Anstrengungen unternommen worden, die Einflüsse der Schubverzerrungen und der Querschnittsdeformationen auf die Spannungen und Verformungen genauer zu analysieren (z. B. [2], [4] bis [8], [10] bis [15]). Im Ergebnis dieser Forschungen entstand eine Vielzahl verallgemeinerter Modelle für dünnwandige Stäbe.

Im vorliegenden Beitrag wird gezeigt, daß, ausgehend von der Theorie linearer prismatischer Schalen, ein übersichtlicher deduktiver Zugang zu unterschiedlichen verallgemeinerten linearen Stabmodellen gefunden werden kann. Damit ist eine bessere Einordnung der in der Literatur auf sehr verschiedene Weise abgeleiteten verallgemeinerten Modelle dünnwandiger Stäbe möglich. Die Ableitungen werden auf statische Beanspruchungen beschränkt. Die Erweiterung auf eine dynamische Strukturanalyse ist einer folgenden Arbeit vorbehalten.

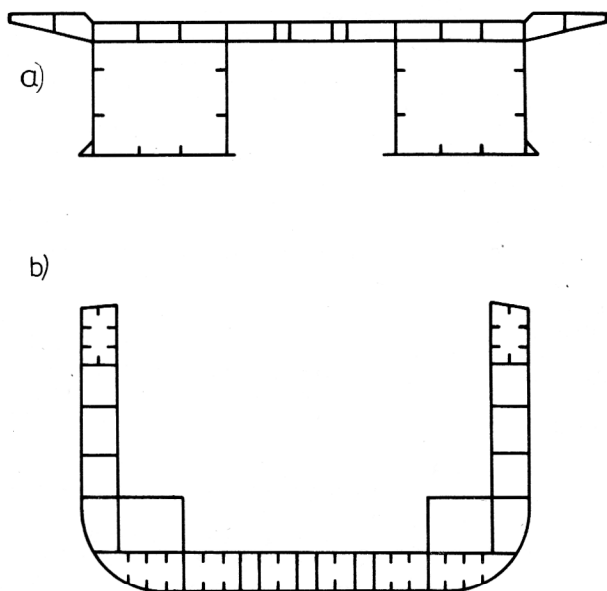


Bild 1:
Typische Querschnittsformen dünnwandiger versteifter Konstruktionen:
a) Brückenquerschnitt
b) Querschnitt eines Containerschiffes

2. Eindimensionales Berechnungsmodell für dünnwandige prismatische Schalen

Für die folgenden Ableitungen gelten alle Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie. Außerdem wird homogenes und isotropes Material mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν vorausgesetzt.

Geometrisch besteht eine prismatische Schale (vielfach auch als Falwerk bezeichnet) aus dünnwandigen ebenen rechteckigen Schalenstreifen, welche an ihren in Längsrichtung verlaufenden Seitenkanten biegesteif oder gelenkig miteinander verbunden sind. Zur Beschreibung solcher Stabschalen werden globale und lokale kartesische Koordinaten be-

nutzt (Bild 2). Die x- und die y-Achse sind frei wählbare Querschnittsachsen. Bei praktischen Problemstellungen erweist es sich auch zum besseren Vergleich mit klassischen Stabmodellen meist als sinnvoll, dafür die Hauptachsen des Querschnittes zu benutzen. Die z-Koordinate verläuft senkrecht zur x- und y-Achse. Die z-Achse wird deshalb im weiteren als Stablängsachse bezeichnet. Für jeden Schalenstreifen i spannen die Koordinate z und die entlang der Profilmittellinie verlaufende Profilkordinate s_i die Schalenmittelfläche (SMF) $_i$ auf. Die dazugehörige Flächennormale wird mit n_i bezeichnet. Analog zu den lokalen Koordinaten werden für die i-te SMF auch lokale Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(z, s_i) \\ v_i &= v_i(z, s_i) \\ w_i &= w_i(z, s_i) \end{aligned}$$

definiert (Bild 2).

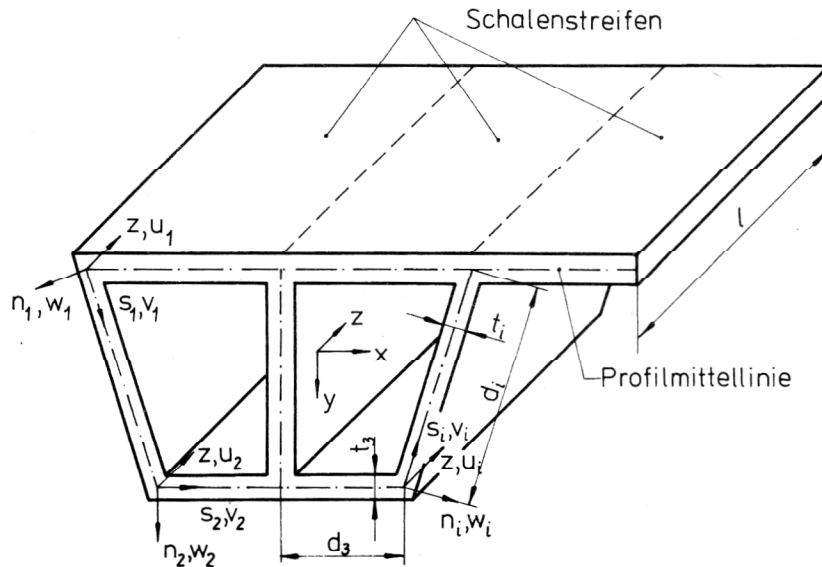


Bild 2:
Definition der Koordinatensysteme und der Verschiebungen für einen ausgewählten Querschnitt

Auf Grund der Dünnwandigkeit kann entsprechend der Bernoulli-Hypothese für die Deformationen angenommen werden, daß die Flächennormale der SMF bei Plattenverformungen der SMF erhalten bleiben, d. h.:

$$\gamma_{zn} = \gamma_{sn} = 0$$

Da außerdem die einzelnen Streifen eben sind, wird im Rahmen einer linearen Theorie der ebene Scheibenspannungszustand mit dem Biegespannungszustand der Kirchhoffschen Plattentheorie superponiert. Das elastische Potential der Stabschale ergibt sich damit als Summe der Potentiale der einzelnen Streifen

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{(i)} & \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{d_i} \left\{ \bar{E} t_i [(u_i' + \nu v_i') u_i' + (v_i' + \nu u_i') v_i'] + G t_i [\dot{u}_i + v_i']^2 + \bar{E} \frac{t_i^3}{12} [(\ddot{w}_i + w_i'')]^2 - 2(1-\nu)(\ddot{w}_i w_i'' - \dot{w}_i'^2) \right\} \right. \\ & \left. - 2[p_{zi} u_i + p_{si} v_i + p_{ni} w_i] \right] ds_i dz + \int_0^{d_i} \left\{ -[q_{zi} u_i + q_{si} v_i + q_{ni} w_i] \Big|_{z=0} \right. \\ & \left. - [q_{zi} u_i + q_{si} v_i + q_{ni} w_i] \Big|_{z=1} \right\} ds_i \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei gilt

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial z} ; (\quad) \cdot = \frac{\partial}{\partial s_i}$$

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Als Belastungen wurden die in Koordinatenrichtung wirkenden, statischen Flächenlasten

$$\begin{aligned} p_{zi} &= p_{zi}(z, s_i) \\ p_{si} &= p_{si}(z, s_i) \\ p_{ni} &= p_{ni}(z, s_i) \end{aligned}$$

sowie an den Rändern $z = 0$ und $z = 1$ die Linienlasten

$$\begin{aligned} q_{zi} &= q_{zi}(s_i) \\ q_{si} &= q_{si}(s_i) \\ q_{ni} &= q_{ni}(s_i) \end{aligned}$$

einbezogen. Treten konzentrierte Lasten auf, so sind die Integrale im Stieltjesschen Sinne zu verstehen. Durch geeignete Produktansätze für die Verschiebungen

$$\begin{aligned} u_i(z, s_i) &= \sum_{(j)} U_j(z) \varphi_j(s_i) \\ v_i(z, s_i) &= \sum_{(k)} V_k(z) \psi_k(s_i) \\ w_i(z, s_i) &= \sum_{(k)} V_k(z) \xi_k(s_i) \end{aligned} \quad (2)$$

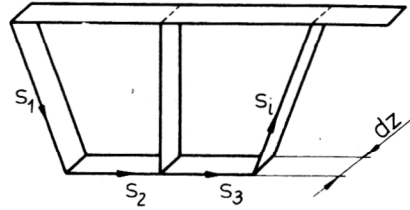


Bild 3:
Elementarer Querrahmen

mit den verallgemeinerten Koordinaten $\varphi_j(s)$, $\psi_k(s)$ und $\xi_k(s)$ und den verallgemeinerten Verschiebungen $U_j(z)$ und $V_k(z)$ wird die Aufgabe auf ein eindimensionales Modell reduziert. Die Qualität des eindimensionalen Modells wird entscheidend durch die verallgemeinerten Koordinaten bestimmt. Sie legen die möglichen Deformationszustände des Gesamtquerschnittes in Abhängigkeit von der Profilkordinate s fest. Dabei ist die Profilkordinate s als Gesamtheit aller Profilkordinaten s_i zu verstehen. Die verallgemeinerten Koordinaten lassen sich anschaulich durch die Deformationen eines sogenannten elementaren Querrahmens (Bild 3) deuten und schränken dessen Verformungskinematik auf die Summe endlich vieler linear unabhängiger Teilzustände ein.

Im Bild 4 sind die wesentlichsten Verformungszustände für den sehr einfachen elementaren Querrahmen eines einzelligen Kastenträgers zur Veranschaulichung grafisch dargestellt.

Das Einsetzen des Produktansatzes (2) in das Potential (1) liefert mit $\delta \Pi = 0$ nach den Regeln der Variationsrechnung ein Differentialgleichungssystem für die verallgemeinerten Verschiebungen $U_j(z)$ und $V_k(z)$. Mit Hilfe der Vektoren und Matrizen

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}^T &= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_j, \dots) & \underline{U}^T &= (U_1, U_2, U_3, \dots, U_j, \dots) \\ \underline{\psi}^T &= (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_k, \dots) & \underline{V}^T &= (V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots) \\ \underline{\xi}^T &= (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_z &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} p_{zi} \varphi ds_i & \underline{r}_z &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} q_{zi} \varphi ds_i \\ \underline{f}_s &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} p_{si} \psi ds_i & \underline{r}_s &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} q_{si} \psi ds_i \\ \underline{f}_n &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} p_{ni} \xi ds_i & \underline{r}_n &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} q_{ni} \xi ds_i \\ \underline{A} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \varphi \varphi^T t_i ds_i & \underline{B} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \dot{\varphi} \dot{\varphi}^T t_i ds_i \\ \underline{C} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \dot{\varphi} \psi^T t_i ds_i & \underline{D} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \varphi \dot{\psi}^T t_i ds_i \\ \underline{H} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \dot{\psi} \psi^T t_i ds_i & \underline{R} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \psi \psi^T t_i ds_i \\ \underline{Q} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \ddot{\xi} \xi^T \frac{t_i^3}{12} ds_i & \underline{S} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \ddot{\xi} \dot{\xi}^T \frac{t_i^3}{12} ds_i \\ \underline{T} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \dot{\xi} \dot{\xi}^T \frac{t_i^3}{12} ds_i & \underline{N} &= \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \xi \dot{\xi}^T \frac{t_i^3}{12} ds_i \end{aligned}$$

lassen sich die Differentialgleichungen (3) und die dazugehörigen Randbedingungen (4) für die Ränder $z = 0$ und $z = 1$ übersichtlich in Matrizenform schreiben.

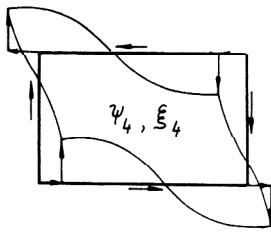
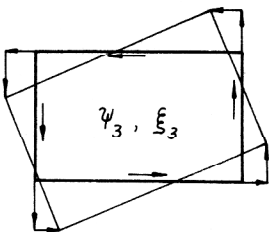
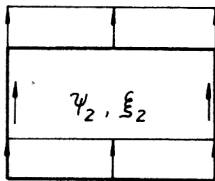
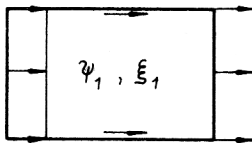
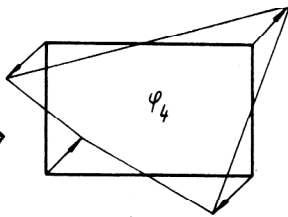
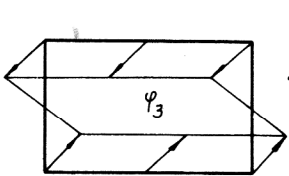
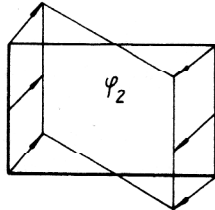
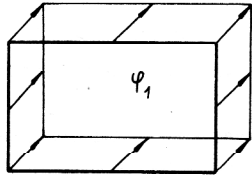
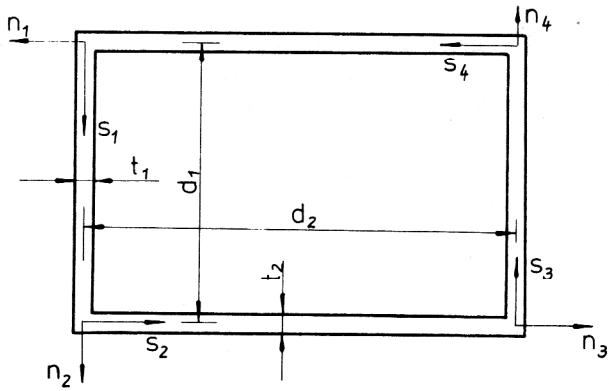


Bild 4:
Darstellung einfachster verallgemeinerter Koordinaten für die Berechnung eines einzelligen rechteckigen Kastenträgers

$$\psi_4(s_2) = \frac{d_1}{2} \quad a = \frac{d_1}{t_1^3} \quad b = \frac{d_2}{t_2^3}$$

$$\xi_4(s_2) = -\frac{d_2}{2} + \frac{(a-b)s_2 d_2^2 - b(4s_2^3 - 6s_2^2 d_2)}{(a+b)d_2^2}$$

$$\begin{aligned} -\bar{E}\underline{A}\underline{U}'' + \underline{G}\underline{B}\underline{U} + \underline{G}\underline{C}\underline{V}' - \nu \bar{E}\underline{D}\underline{V}' &= f_z \\ \nu \bar{E}\underline{D}\underline{T}\underline{U}' - \underline{G}\underline{C}\underline{T}\underline{U}' + \bar{E}\underline{N}\underline{V}'''' + \nu \bar{E}\underline{Q}\underline{V}'' + \nu \bar{E}\underline{Q}\underline{T}\underline{V}'' & \\ -\underline{G}\underline{R}\underline{V}'' - 4\underline{G}\underline{T}\underline{V}'' + \bar{E}\underline{S}\underline{V} + \underline{E}\underline{H}\underline{V} &= f_s + f_n \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta \underline{V}\underline{T} (\underline{G}\underline{C}\underline{T}\underline{U}' - \bar{E}\underline{N}\underline{V}'''' - \nu \bar{E}\underline{Q}\underline{T}\underline{V}'' + \underline{G}\underline{R}\underline{V}'' \\ + 4\underline{G}\underline{T}\underline{V}'' \pm [r_s + r_n]) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\delta \underline{V}'\underline{T} (\bar{E}\underline{N}\underline{V}'' + \nu \bar{E}\underline{Q}\underline{T}\underline{V}) = 0$$

$$\delta \underline{U}\underline{T} (\bar{E}\underline{A}\underline{U}' + \nu \bar{E}\underline{D}\underline{V} \pm r_z) = 0$$

(Die positiven Vorzeichen in den Randbedingungen (4) gelten für den Rand $z = 0$ und die negativen für $z = 1$.)
 Das elastische Potential (1) enthält alle Anteile der klassischen linearen Scheiben- und der Kirchhoffschen Plattentheorie, d. h., Vereinfachungen des Berechnungsmodells folgen somit nur noch aus der Einschränkung der Querschnittsdeformationen bedingt durch die Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten. Mit zunehmender Anzahl der voneinander linear unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten konvergiert die Lösung gegen die exakte Scheiben-/Plattenlösung. Für bestimmte Aufgabenklassen können aber bereits im elastischen Potential (1) Vereinfachungen vorgenommen werden, ohne die Aussagequalität des Modells wesentlich zu verschlechtern. Deshalb werden im weiteren die Möglichkeiten solcher Modellvereinfachungen untersucht. Gleichzeitig wird eine systematische Einordnung unterschiedlicher verallgemeinerter Stabmodelle vorgenommen.

3. Vom Schalen- zum Stabmodell

3.1. Querdehnungen der SMF

Einen geringen Einfluß auf die zu berechnenden Spannungen haben die Querdehnungen ϵ_s der SMF. Wirksam werden sie vor allem dann, wenn sie konstruktiv behindert sind, wie z. B. bei der Biegung von Stabschalen mit geschlossenem Profil (Bild 5).

Außerdem führt die Vernachlässigung der Querdehnungen im allgemeinen dazu, daß deutlich weniger Deformationszustände des Querrahmens, d. h. verallgemeinerte Koordinaten, in die Produktansätze (2) einbezogen werden müssen. Der Verzicht auf verallgemeinerte Koordinaten, die Querdehnungen der SMF widerspiegeln, entspricht der Annahme, daß die Querdehnungen vollständig behindert sind.

$$\epsilon_{si} = 0 \quad (5)$$

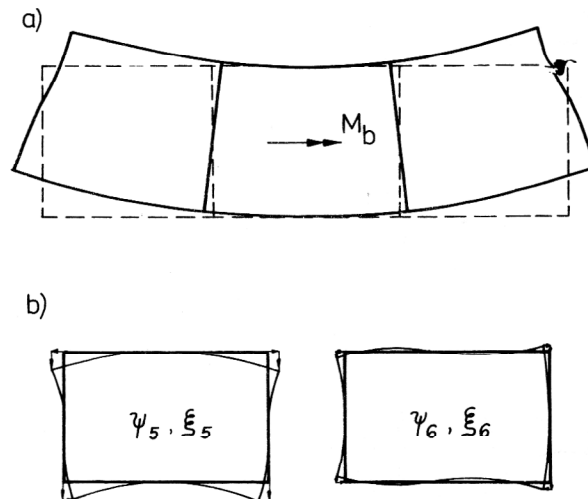


Bild 5:

- a) Profil deformation auf Grund der behinderten Querdehnungen bei der Biegung eines dreifach geschlossenen Querschnittes
- b) Verallgemeinerte Koordinaten zur Berücksichtigung der Querdehnungen beim einzelligen Kastenträger

Damit entfallen in den Gln. (3) und (4) die mit den Matrizen \bar{D} und \bar{H} verbundenen Anteile.

Entsprechend folgt für die Längsmembranspannungen

$$\sigma_z = \bar{E} u_1' \quad (6a)$$

In den klassischen Stabmodellen wird der „Ersatzmodul“ \bar{E} nur für die Biegung breiter Querschnitte zur näherungsweise Berücksichtigung des Effektes der verhinderten Querkontraktion angewandt. In vielen Fällen ist es realistischer, den Elastizitätsmodul E , d. h.

$$\sigma_z = E u_1' \quad (6b)$$

zugrunde zu legen.

Mit den Annahmen (5) und (6b) folgt aus dem Potential (1)

$ \begin{aligned} - \underline{EAU}'' + \underline{GBU} + \underline{GCV}' &= \underline{f}_z \\ - \underline{GCTU}' + \underline{ENV}'''' + \nu \underline{EQV}'' + \nu \underline{EQTV}'' & \\ - \underline{GRV}'' - 4\underline{GTV}'' + \underline{ESV} &= \underline{f}_s + \underline{f}_n \end{aligned} $	(7)

$ \begin{aligned} \delta \underline{V}^T (\underline{GCTU}' - \underline{ENV}'''' - \nu \underline{EQTV}'' + \underline{GRV}'' \\ + 4\underline{GTV}'' \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n]) &= 0 \\ \delta \underline{V}'^T (\underline{ENV}'' + \nu \underline{EQTV}'') &= 0 \\ \delta \underline{U}^T (\underline{EAU}' \pm \underline{r}_z) &= 0 \end{aligned} $	(8)

Das vereinfachte Differentialgleichungssystem (7) findet man in Arbeiten von Kollbrunner, Hajdin [8] (Kap. VI) und Möller [10].

Benutzt man die Gl. (6a), dann steht in den Gln. (7) und (8) vor der Matrix \underline{A} der Faktor \underline{E} . In der Literatur wird häufiger von der Annahme (6b) Gebrauch gemacht. Die meisten Autoren setzen aber auch eine Querkontraktionszahl $\nu = 0$ voraus (z. B. [15]), und dann sind \bar{E} und \underline{E} identisch. In dieser Arbeit werden die Annahmen (5) und (6b) getroffen.

3.2. Schubverzerrungen der SMF

Die nächste bedeutende Modellvereinfachung beruht auf der Annahme, daß keine Schubverzerrungen in der SMF auftreten.

$$\gamma_{szi} = \dot{u}_i + v_i' = 0$$

Damit werden die verallgemeinerten Verschiebungen U_j von V_k abhängig, und mit $\varphi_1 = 1$ sowie

$$\dot{\varphi}_k = \psi_k$$

$$U_k = -V_k'$$

folgt aus dem Potential (1) das Differentialgleichungssystem.

$ \begin{aligned} \underline{EAV}'''' + \underline{ENV}'''' + \nu \underline{EQV}'' \\ + \nu \underline{EQTV}'' - 4\underline{GTV}'' + \underline{ESV} &= \underline{f}_s + \underline{f}_n + \underline{f}_z' \end{aligned} $	(9)

$ \begin{aligned} \delta \underline{V}^T (-\underline{EAV}'''' - \underline{ENV}'''' - \nu \underline{EQTV}'' \\ + 4\underline{GTV}'' + \underline{f}_z \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n]) &= 0 \\ \delta \underline{V}'^T (\underline{EAV}'' + \underline{ENV}'' + \nu \underline{EQTV}'' \mp \underline{r}_z) &= 0 \end{aligned} $	(10)

Die Gln. (9) und (10) liefern aber nur für Stäbe mit offenem Querschnitt realistische Ergebnisse. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie ist bei Kollbrunner, Hajdin in [8] (Kap. V) zu finden.

Die Vernachlässigung der Schubverzerrungen der SMF wirkt sich jedoch bei einem nicht unerheblichen Teil praktischer Aufgabenstellungen ungünstig aus. Besonders gilt dies für die Torsion geschlossener Querschnitte. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß es im allgemeinen nicht ausreicht, die sich aus der klassischen Torsionstheorie von St. Venant bzw. Bredt ergebenden Schubspannungen (auch als die primären bezeichnet) zu berücksichtigen. Es sollten auch die durch Wölbbehinderungen hervorgerufenen Schubspannungen, d. h. die sekundären oder Wölb Schubspannungen, einbezogen werden [7]. Weiterhin ist es für kurze Stabschalen zu empfehlen, die Schubverzerrungen der SMF nicht zu vernachlässigen. Verursacht durch den Querkraftschub üben sie einen spürbaren Einfluß auf die Verschiebungen aus (Bild 6).

Damit kann grundsätzlich eine Unterscheidung der verallgemeinerten Stabmodelle in solche mit und solche ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen der SMF vorgenommen werden. Da aber die weiteren Modellvereinfachungen für beide Varianten gleichermaßen möglich sind, werden sie im folgenden parallel betrachtet.

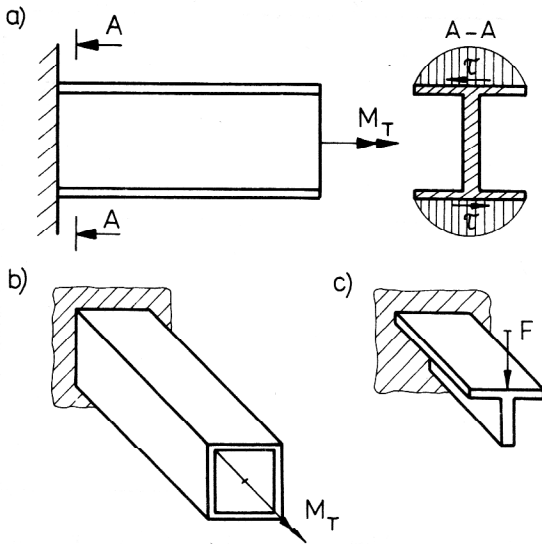


Bild 6:
Typische Beispiele für das Auftreten von Schubverzerrungen der SMF
a) Wölbkrafttorsion offener Profile (sekundäre Schubspannungen)
b) Torsion geschlossener Querschnitte (primäre und Wölbschubspannungen)
c) Querkraftbiegung kurzer prismatischer Schalen

3.3. Längskrümmungen der SMF

Bei der Anwendung des Bernoulli-Stabmodells für dünnwandige Profile werden im allgemeinen die Flächenträgheitsmomente näherungsweise ermittelt. Überträgt man dies auf die Stabschalenmodelle, dann ist es identisch mit einer Vernachlässigung der Längsbiegemomente und des Einflusses der Längskrümmungen auf die Querbiegemomente in den Schalenstreifen. Die Auswirkung dieser Vereinfachung läßt sich durch einen Vergleich des näherungsweise und des exakt berechneten Flächenträgheitsmomentes abschätzen. Z. B. ergibt sich für einen typischen Plattenbalkenquerschnitt (Bild 7) eine relativ große Differenz von 4 %. Aus diesem Grund ist für dickwandige Querschnitte diese Vereinfachung nur begrenzt anwendbar.

Die Vernachlässigung der Längskrümmungen führt in den Gleichungen (7) und (8) auf

$- \underline{EAV}'' + \underline{GBU} + \underline{GCV}'$	$= \underline{f}_z$	(11)
$- \underline{GC}^T \underline{U}' - \underline{GRV}'' - 4 \underline{GTV}'' + \underline{E} \underline{SV}$	$= \underline{f}_s + \underline{f}_n$	

$\delta \underline{V}^T (\underline{GC}^T \underline{U}' + \underline{GRV}' + 4 \underline{GTV}' \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n])$	$= 0$	(12)
$\delta \underline{U}^T (\underline{EAV}'' \pm \underline{r}_z)$	$= 0$	

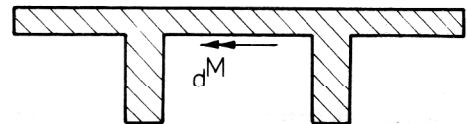


Bild 7:
Plattenbalkenquerschnitt

Für die praktische Umsetzung ist es vorteilhaft, daß die Matrizen \underline{Q} und \underline{N} entfallen und sich damit die Ordnung des Differentialgleichungssystems verringert.

Ohne Schubverzerrungen der SMF ergibt sich folgendes Berechnungsmodell:

$\underline{EAV}'''' - 4 \underline{GTV}'' + \underline{E} \underline{SV}$	$= \underline{f}_s + \underline{f}_n + \underline{f}_z'$	(13)

$\delta \underline{V}^T (-\underline{EAV}'''' + 4 \underline{GTV}' + \underline{f}_z \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n])$	$= 0$	(14)
$\delta \underline{V}^T (\underline{EAV}'' \pm \underline{r}_z)$	$= 0$	

Die Gln. (13) und (14) entsprechen im wesentlichen den Modellvorstellungen von Schardt [11], der allerdings nur offene unverzweigte Querschnitte betrachtet. Eine Erweiterung für beliebige Querschnitte mit näherungsweise Einbeziehung der Schubverzerrungen hat Sedlacek [13] vorgenommen.

Ein besonders für die FEM geeignetes Berechnungsmodell erhält man, wenn im elastischen Potential (1) nur die Längskrümmungen vernachlässigt werden.

$$-\bar{E}\underline{A}\underline{U}'' + \underline{G}\underline{B}\underline{U} + \underline{G}\underline{C}\underline{V}' - \nu\bar{E}\underline{D}\underline{V}' = \underline{f}_z \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \nu\bar{E}\underline{D}^T\underline{U}' - \underline{G}\underline{C}^T\underline{U}' - \underline{G}\underline{R}\underline{V}'' - 4\underline{G}\underline{T}\underline{V}'' \\ + \bar{E}\underline{S}\underline{V} + \bar{E}\underline{H}\underline{V} \end{aligned} = \underline{f}_s + \underline{f}_n$$

$$\begin{aligned} \delta\underline{V}^T (\underline{G}\underline{C}^T\underline{U} + \underline{G}\underline{R}\underline{V}' + 4\underline{G}\underline{T}\underline{V}' \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n]) &= 0 \\ \delta\underline{U}^T (\bar{E}\underline{A}\underline{U}' + \nu\bar{E}\underline{D}\underline{V} \pm \underline{r}_z) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

3.4. Verdrillung der Schalenstreifen

Die Differentialgleichungen (13) und (14) vereinfachen sich noch weiter, wenn auch auf den Drillwiderstand der Schalenstreifen verzichtet wird, d. h.

$$\underline{G}\underline{T} = 0$$

Es verbleibt das Berechnungsmodell

$$\underline{E}\underline{A}\underline{V}'''' + \bar{E}\underline{S}\underline{V} = \underline{f}_s + \underline{f}_n + \underline{f}_z' \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta\underline{V}^T (-\underline{E}\underline{A}\underline{V}'''' + \underline{f}_z \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n]) &= 0 \\ \delta\underline{V}'^T (\underline{E}\underline{A}\underline{V}'' \mp \underline{r}_z) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Die Gln. (17) und (18) sind identisch mit der Theorie steifknotiger Falwerke von Gruber bzw. der von Vlasov entwickelten halbmomentenfreien Schalentheorie ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen [14] (Kap. XIII). Mit Ausnahme kurzer Stabschalen ($1:d < 5:1$) ist dieses Modell für Torsionsbelastungen weniger geeignet. Eine Verdrillung offener Profile läßt sich nur dann erfassen, wenn die Verwölbung behindert ist.

Eine größere Verbreitung hat die halbmomentenfreie Schalentheorie von Vlasov mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen in der SMF [14] (Kap. XIV) gefunden. Das Modell geht durch Vernachlässigung des Drillwiderstandes der Schalenstreifen aus den Gln. (11) und (12) hervor.

$$-\underline{E}\underline{A}\underline{U}'' + \underline{G}\underline{B}\underline{U} + \underline{G}\underline{C}\underline{V}' = \underline{f}_z \quad (19)$$

$$-\underline{G}\underline{C}^T\underline{U}' - \underline{G}\underline{R}\underline{V}'' + \bar{E}\underline{S}\underline{V} = \underline{f}_s + \underline{f}_n$$

$$\begin{aligned} \delta\underline{V}^T (\underline{G}\underline{C}^T\underline{U} + \underline{G}\underline{R}\underline{V}' \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n]) &= 0 \\ \delta\underline{U}^T (\underline{E}\underline{A}\underline{U}' \pm \underline{r}_z) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Diese Differentialgleichungen werden relativ häufig zur Berechnung von Kastenträgern benutzt. Dafür sind z. B. die im Bild 4 angegebenen verallgemeinerten Koordinaten geeignet. Die Bedeutung dieses verallgemeinerten Stabmodells beruht darauf, daß mit vergleichsweise einfachen Mitteln die Profilkonturdeformation zugelassen ist und die dabei wirkende Querbiegesteifigkeit berücksichtigt wird.

3.5. Gelenkfaltwerk

Für besonders dünnwandige Konstruktionen und solche, bei denen die Kantenverbindungen nicht ausreichend biegesteif sind, ist es sinnvoll, auch die Querbiegesteifigkeit zu vernachlässigen. Dann werden zwar Profilkonturdeformationen in die Rechnung einbezogen, aber die Querkrümmungen der Schalenstreifen bleiben unberücksichtigt.

Das entsprechende Differentialgleichungssystem ohne Schubverzerrungen beinhaltet dann nur noch das Gleichgewicht in Stablängsrichtung.

\underline{EAV}''''	$= \underline{f}_s + \underline{f}'_z$	(21)
$\delta \underline{V}^T (-\underline{EAV}'''' + \underline{f}_z \pm \underline{r}_s)$	$= 0$	(22)
$\delta \underline{V}'^T (\underline{EAV}'' \mp \underline{r}_z)$	$= 0$	

Mit den Schubverzerrungen der SMF ergibt sich das Berechnungsmodell

$-\underline{EAU}'' + \underline{GBU} + \underline{GCV}'$	$= \underline{f}_z$	(23)
$-\underline{GCTU}' - \underline{GRV}''$	$= \underline{f}_s$	
$\delta \underline{V}^T (\underline{GCTU}' + \underline{GRV}' \pm \underline{r}_s)$	$= 0$	(24)
$\delta \underline{U}^T (\underline{EAU}' \pm \underline{r}_z)$	$= 0$	

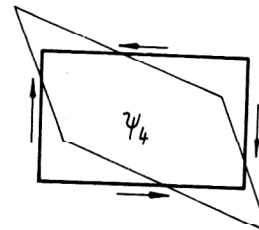


Bild 8:
Verallgemeinerte Koordinaten für die Verschiebung des Querschnittes in seiner Ebene bei Anwendung der Gelenkfaltwerktheorie

Obwohl Verschiebungen w_i normal zur SMF auftreten, entfallen hier die verallgemeinerten Koordinaten ξ_k , da auch die Matrizen \underline{Q} , \underline{S} , \underline{T} und \underline{N} in den Gln. (21) bis (24) nicht mehr enthalten sind. Damit gestaltet sich die Ermittlung bzw. die Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten wesentlich einfacher (vgl. Bild 8 mit Bild 4).

Für die Anwendung der Modellvorstellung des Gelenkfaltwerkes ist mindestens an einer Stelle die Profilkonturdeformation zu behindern. Dies kann mit Rand- oder Übergangsbedingungen erfolgen.

3.6. Starre Querschnittskontur

Bisher wurden schrittweise Vereinfachungen des allgemein formulierten elastischen Potentials und des dazugehörigen Differentialgleichungssystems vorgenommen. Mit den Gln. (21) und (22) sind diese Möglichkeiten erschöpft. Doch die Qualität der zu erwartenden Lösung wird wesentlich durch die Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten bestimmt. So kann das Modell weiter vereinfacht werden, indem für die Verschiebungen des Querschnittes in seiner Ebene nur die drei Starrkörperbewegungen als verallgemeinerte Koordinaten benutzt werden. (Für das Beispiel im Bild 4 wird dann auf ψ_4 und ξ_4 verzichtet.) Dies ist gleichbedeutend mit der in allen klassischen Stabmodellen gemachten Voraussetzung, daß die Gestalt (d. h. die Kontur) des Querschnittes auch für den verformten Stab erhalten bleibt.

Übernimmt man für die Verschiebungen in Längsrichtung ebenfalls die Annahmen der herkömmlichen Stabtheorien, so werden für φ_j nur die drei restlichen Starrkörperbewegungen und die Einheitsverwölbung angesetzt. Damit hat das Modell den Verschiebungsfreiheitsgrad 7 und lautet mit Berücksichtigung des Drillwiderstandes und der Schubverzerrungen der SMF in der hier gewählten Schreibweise.

$-\underline{EAU}'' + \underline{GBU} + \underline{GCV}'$	$= \underline{f}_z$	(25)
$-\underline{GCTU}' - \underline{GRV}'' - 4\underline{GTV}''$	$= \underline{f}_s + \underline{f}_n$	
$\delta \underline{V}^T (\underline{GCTU}' + \underline{GRV}' + 4\underline{GTV}' \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n])$	$= 0$	(26)
$\delta \underline{U}^T (\underline{EAU}' \pm \underline{r}_z)$	$= 0$	

Setzt man darin nur die Verdrehung des Querschnittes um das Drillzentrum und die Einheitsverwölbung an, dann verbleiben die Gleichungen, mit denen Heilig den Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion bei offenen und geschlossenen Profilen untersucht hat [6], [7].

Für die Berechnung von Stäben mit offenem Querschnitt werden vorteilhaft die Schubverzerrungen der SMF ausgeschlossen.

$$\underline{EAV}''' - 4\underline{GTV}'' = \underline{f}_s + \underline{f}_n + \underline{f}_z \quad (27)$$

$$\delta \underline{V}^T (-\underline{EAV}''' + 4\underline{GTV}'' + \underline{f}_z \pm [\underline{r}_s + \underline{r}_n]) = 0 \quad (28)$$

$$\delta \underline{V}'^T (\underline{EAV}'' \mp \underline{r}_z) = 0$$

Darin sind dann auch die vier Gleichungen des Stabmodells von Bornscheuer [5] bzw. Vlasov [15] enthalten.

3.7. Mittragende Breite

Unabhängig davon, welches der hier abgeleiteten Modelle angewandt wird, ist es bei der Biegung dünnwandiger Stäbe sinnvoll, auch den Effekt der mittragenden Breite wenigstens näherungsweise zu berücksichtigen. Übereinstimmend mit Schroeder [12] werden dann zusätzlich quadratische Verwölbungen (Längsverschiebungen der jeweiligen Gurte) zugelassen (Bild 9). Prinzipiell können dafür noch weitere höhergradige verallgemeinerte Koordinaten φ_j verwendet werden.

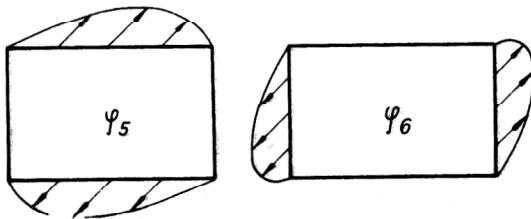


Bild 9: Verallgemeinerte Koordinaten für die Längsverschiebungen, speziell zur näherungsweisen Einbeziehung des Effektes der mittragenden Breite

3.8. Starrer Querschnitt

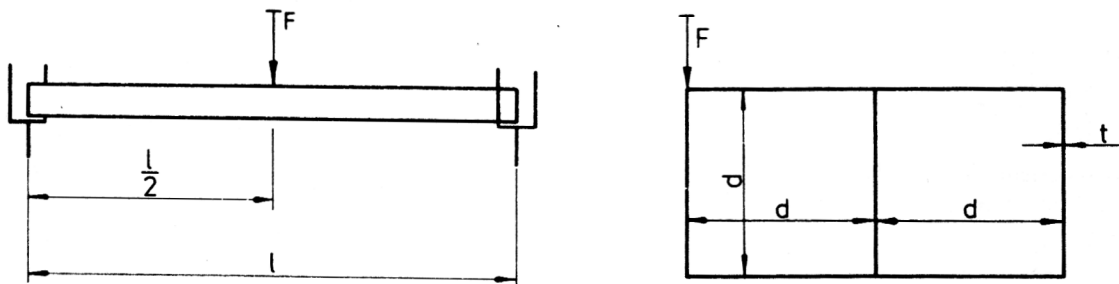
Wenn für die verallgemeinerten Koordinaten nur die sechs Starrkörperbewegungen des Querschnittes zugelassen werden, dann liefern die Gleichungen (25) und (26) das Timoshenko-Stabmodell.

Ganz analog ist das Bernoulli-Stabmodell in den Gln. (27) und (28) enthalten.

4. Numerisches Beispiel

Das Ziel bei der Anwendung verallgemeinerter Stabmodelle für praktische Aufgaben besteht natürlich darin, mit möglichst wenig Aufwand ein der Realität sehr nahe kommendes Ergebnis zu erhalten. Dafür muß man zwangsläufig entscheiden, welche charakteristischen Verformungen berücksichtigt bzw. vernachlässigt werden.

Ein einfaches Beispiel soll die Modellfindung erleichtern. Es wird ein gabelgelagerter zweizelliger Kastenträger untersucht, der in Feldmitte durch eine exzentrisch angreifende Kraft belastet ist (Bild 10).



$$\begin{aligned} F &= 10 \text{ kN} \\ l &= 15\,000 \text{ mm} \\ d &= 1\,000 \text{ mm} \\ t &= 150 \text{ mm} \end{aligned}$$

Querschnitt

Bild 10: Numerisches Beispiel: Geometrie, Belastung und Lagerung eines zweizelligen Kastenträgers

Zur Auswertung wird die Verteilung der Längsnormalspannungen im unteren Gurt in Feldmitte (Lastangriffsstelle) herangezogen. Die 10 unterschiedlichen zur Lösung benutzten Modelle und die damit erzielten Ergebnisse sind in Tabelle 1 angegeben (vgl. auch Bild 11).

Als „quasiexakte“ Vergleichslösung wurde eine FEM-Lösung mit Semiloofschalenelementen [16] berechnet. Dazu wurde unter Ausnutzung der Symmetrie der halbe Träger mit 140 rechteckigen Semiloofelementen (Elementfreiheitsgrad 32) diskretisiert.

Sedlacek [13] hat eine analytische Lösung des modifizierten Differentialgleichungssystems (13) für dieses Beispiel vorgenommen. Dabei sind bereits zwei mögliche Zustände der Profilkonturdeformation einbezogen. Da Sedlacek für dieses Beispiel die Schubverzerrungen vernachlässigt, weichen die Ergebnisse von der „quasiexakten“ Lösung ab.

Möller [10] löst die Differentialgleichungen (7) mit dem Differenzenverfahren. Da nur die Behinderung der Querdehnungen und der Effekt der mittragenden Breite unberücksichtigt sind, stellen diese Ergebnisse bereits eine relativ genaue Lösung dar.

Zur Bewertung der unterschiedlichen Modelle wurden im Rahmen der eigenen Forschungsarbeiten mit Hilfe des Programmsystems Cosar [16] unter Verwendung eindimensionaler finiter Elemente 7 weitere FEM-Lösungen mit unterschiedlichen Berechnungsmodellen ermittelt. Dabei erfolgt die Diskretisierung in Längsrichtung einheitlich jeweils für eine Symmetriehälfte mit 8 quadratischen isoparametrischen Elementen. Die verwendeten Differentialgleichungen und die Anzahl der variierten verallgemeinerten Verschiebungen sind in Tabelle 1 angegeben. Die Auswahl der verallgemeinerten Koordinaten wurde so vorgenommen, daß beliebige Belastungsfälle berechnet werden können. Es wurden deshalb auch die verallgemeinerten Verschiebungen, die durch die konkrete Belastung nicht angeregt werden, mit aufgeführt.

Tabelle 1:
Ergebnisse des numerischen Beispiels

Lfd. Nr.	Modell	Differentialgleichungssystem	Anzahl der verallgemeinerten Verschiebungen	Längsnormalspannungen (Ncm^{-2}) im unteren Gurt in Feldmitte					
				σ_A	σ_B	σ_{C1}	σ_{C2}	σ_D	σ_E
1	Bernoulli-Stab	(27)	2	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
2	Wölbkrafttorsion mit Schubverzerrung (lin. Verwölbung)	(25)	9	10,99	10,33	9,66	9,66	9,63	9,60
3	Gelenkfaltwerk mit Schubverzerrung (lin. Verwölbung)	(23)	11	24,77	16,67	8,57	8,57	3,15	-2,28
4	Gelenkfaltwerk mit Schubverzerrung (quadr. Verwölbung)	(23)	18	26,25	15,33	9,08	9,08	3,33	-2,21
5	Sedlacek [13]	(13)	8 ¹⁾	17,32	12,61	7,90	7,90	7,14	6,38
6	halbmomentenfreie Vlasov-Schale (lin. Verwölbung mit Drillsteifigkeit)	(11)	17	14,05	11,44	8,83	8,83	8,41	8,00
7	Möller [10]	(7)	7 ¹⁾	14,17	11,43	8,69	8,69	8,38	8,07
8	halbmomentenfreie Vlasov-Schale (quadr. Verwölbung mit Drillsteifigkeit)	(11)	24	15,39	10,23	9,36	9,36	8,49	8,12
9	halbmomentenfreie Vlasov-Schale (quadr. Verwölbung mit Querdehnungen und Drillsteifigkeit)	(15)	38	15,54	10,13	9,69	9,32	8,49	8,19
10	„quasiexakte“ Scheiben-/Plattenlösung	(3)	—	15,42	10,14	9,35	9,20	8,46	8,11

1) Die verallgemeinerten Koordinaten sind speziell für diesen Lastfall ausgewählt.

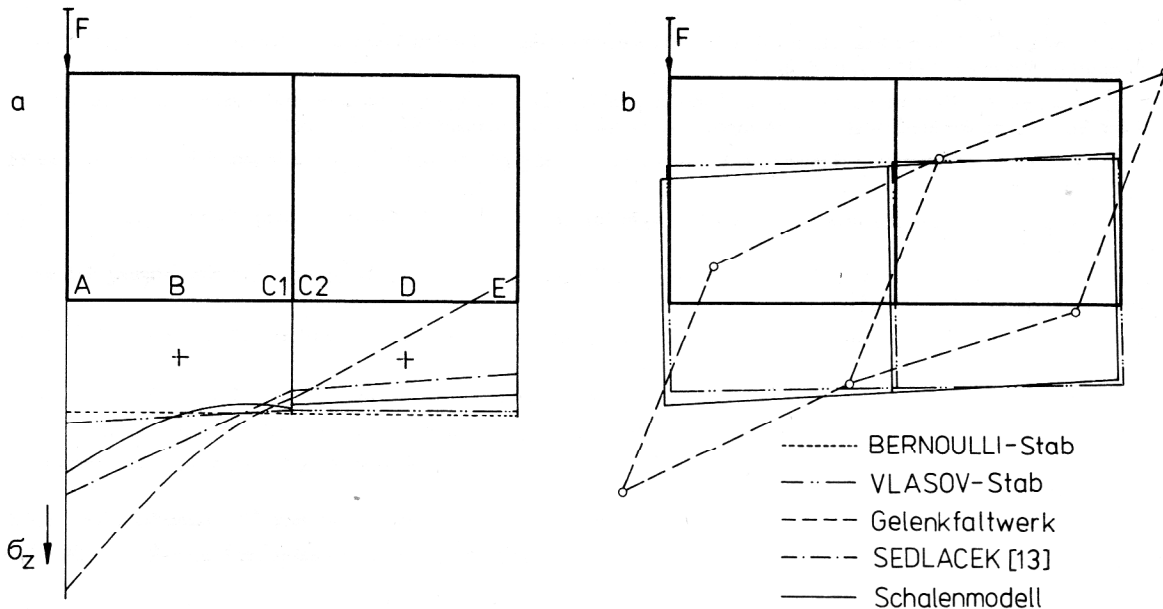


Bild 11:
 Darstellung der mit unterschiedlichen Modellen berechneten Spannungen und Verschiebungen
 a) Längsnormalspannungen im unteren Gurt
 b) Verschiebungen in der Querschnittsebene in Feldmitte

Die beiden ersten Rechnungen (Tabelle 1) entsprechen den klassischen Stabmodellen. Das reale Verhalten wird nur relativ schlecht wiedergespiegelt. Auch die Theorie der Wölbkrafttorsion mit Schubverformungseinfluß bewirkt bei einer als starr angenommenen Querschnittskontur nur eine geringe Ergebnisverbesserung.

Eine Abschätzung der durch die Profilkonturdeformation maximal möglichen Spannungsumverteilungen erfolgt durch die Idealisierung zum Gelenkfaltwerk. Im Vergleich zu den klassischen Modellen sind die Spannungen im linken Steg auf mehr als das Doppelte angewachsen. Bild 11 zeigt die damit verbundene starke Querschnittsdeformation. Bei der Anwendung der halbmomentenfreien Schalentheorie sinkt der Fehler in den Spannungen bereits auf 10 %. Es wird deutlich, daß die Berücksichtigung der Querbiegesteifigkeit eine neue Qualität bedeutet.

Erstaunlich ist, wie sich bei diesem Querschnitt der Effekt der mittragenden Breite auswirkt. So beträgt in der Rechnung Nr. 8 der Fehler für die maximale Spannung nur noch 1 %.

Dagegen führt die Einbeziehung der Querdehnungen in Rechnung Nr. 9 nur zu einer geringfügigen Erhöhung der Gurtspannungen. (Die Querkontraktionszahl wurde mit $\nu = 0,3$ angenommen.) Ebenso machte sich die Vernachlässigung der Längskrümmungen der SMF nur wenig bemerkbar, wie der Vergleich von Rechnung Nr. 9 mit der „quasiexakten“ Lösung zeigt. In der Realität bewirken die Längskrümmungen natürlich, daß die Längsnormalspannungen nicht konstant über die Wanddicke verteilt sind.

5. Schlußfolgerungen

Bei der Entwicklung eines leistungsfähigen Verfahrens zur Spannungs- und Verformungsanalyse dünnwandiger Stabschalen ist eine universelle Einsatzmöglichkeit anzustreben. Deshalb sollten sowohl die Schubverzerrungen der SMF als auch die Plattendringelsteifigkeit der Schalenstreifen berücksichtigt werden. Durch eigene Beispielrechnungen konnte nachgewiesen werden, daß das Berechnungsmodell dann gleichermaßen für offene und geschlossene Querschnitte geeignet ist. Das vorgestellte Beispiel verdeutlicht, daß die Behinderungen der Querdehnungen und die Längskrümmungen vernachlässigt werden können. Demzufolge bietet sich das Differentialgleichungssystem (11), (12) an. Mit Hilfe spezieller verallgemeinerter Koordinaten kann der Effekt der mittragenden Breite näherungsweise berücksichtigt werden.

Für Stäbe mit mehrfach verzweigten oder mehrfach geschlossenen Querschnitten ist eine durchgängige computergestützte Lösung anzustreben. Einen effektiven Lösungsweg erhält man durch automatische Definition der verallgemeinerten Koordinaten mit anschließender Ermittlung der daraus resultierenden Koeffizientenmatrizen und numerischer Lösung des Differentialgleichungssystems.

Für die Lösung des Differentialgleichungssystems hat Möller [10] erfolgreich das Differenzenverfahren angewandt.

Wenn die Längskrümmungen der SMF vernachlässigt werden, dann entfallen im elastischen Potential die zweiten Ableitungen der verallgemeinerten Verschiebungen. Es kann dann unmittelbar ein von Landgraf [9] entwickelter Lösungsalgorithmus benutzt werden. Dabei wird das eindimensionale Variationsproblem auf ein kanonisches Differentialgleichungssystem zurückgeführt und mit Hilfe von Übertragungsmatrizen gelöst.

Natürlich bietet sich auch die Finite-Elemente-Methode zur Lösung des Variationsproblems an. Entsprechende eindimensionale Elemente auf der Grundlage einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie von Vlasov wurden von Altenbach, Kissing u. a. in [1] bis [3] vorgestellt. Dieser Lösungsweg ermöglicht die Erweiterung der Elementkataloge universeller FEM-Programmsysteme und eine besonders effektive Analyse komplexer Strukturen.

LITERATUR

- [1] Altenbach, J.; Kissing, W.: Finite Elemente auf der Grundlage einer verallgemeinerten Vlasovschen halbmomentenfreien Schalentheorie. Technische Mechanik 3 (1982), H. 3, S. 27.
- [2] Altenbach, J.; Kissing, W.: Berechnungsmodelle und -methoden für dünnwandige geschlossene Stabschalen. X. Internationaler Kongreß über Anwendung der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften. Weimar (1984), H. 3, S. 8.
- [3] Altenbach, J.; Kissing, W.: Numerische Berechnung konischer dünnwandig geschlossener Konstruktionen. Schiffbauforschung 24 (1985), H. 1, S. 33.
- [4] Altenbach, J.; Kissing, W.: Statische und dynamische Analyse für prismatische und nichtprismatische Kastenträger. Technische Mechanik 7 (1986), H. 1, S. 37.
- [5] Bornscheuer, F. W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 21 (1952), H. 1, S. 1.
- [6] Heilig, R.: Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil. Der Stahlbau 30 (1961), H. 4, S. 97.
- [7] Heilig, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau 30 (1961), H. 11, S. 333.
- [8] Kollbrunner, C. F.; Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe (Band 1 und 2). Springer Verlag Berlin/Heidelberg/ New York, 1972/1975.
- [9] Landgraf, G.: Berechnung beliebig belasteter Rotationsschalen mit und ohne Berücksichtigung der Querkraftschubverzerrungen. TU Dresden, Habilitationsschrift 1969.
- [10] Möller, R.: Zur Berechnung prismatischer Strukturen mit beliebigem nichtformtreuem Querschnitt. TH Darmstadt, Diss. 1982.
- [11] Schardt, R.: Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Falwerke. Der Stahlbau 35 (1966), H. 6, S. 161 und H. 12, S. 384.
- [12] Schroeder, F. H.: Die näherungsweise Berücksichtigung der mittragenden Breite bei Spannungs-, Stabilitäts- und Schwingungsproblemen. Ing.-Archiv 36 (1967), H. 2, S. 79.
- [13] Sedlacek, G.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung. Fortschr.-Ber. VDI-Z. (1968), Reihe 4, Nr. 8.
- [14] Vlasov, V. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag Berlin 1958.
- [15] Vlasov, V. S.: Dünnwandige elastische Stäbe (Band 1 und 2). VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1964.
- [16] Nutzerhandbuch des Programmsystems COSAR, Teil I Grundlagen, Teil II Eingabevorschrift, TH Magdeburg, Methodisch-Diagnostisches Zentrum „Finite Elemente“ 1985.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach
Dipl.-Ing. Michael Zwicke
Technische Hochschule „Otto von Guericke“
Sektion Maschinenbau, WB Festkörpermechanik
3010 Magdeburg
PSF 124