

Eine direkt formulierte Biegetheorie für viskoelastische Ein- und Mehrschichtschalen

Holm Altenbach

0. Einleitung

Bei der Beurteilung des Deformations- und Spannungszustandes ist die Einbeziehung allgemeinerer Werkstoffeigenschaften von zunehmender Bedeutung. Dabei nehmen Polymerwerkstoffe eine besondere Stellung ein, da einerseits ihre Eigenschaften einen breiten Einsatz auch als Konstruktionswerkstoffe zulassen und andererseits auf dem Gebiet der mathematischen Beschreibung der Materialeigenschaften von Polymerwerkstoffen in den letzten Jahren große Fortschritte erzielt wurden. Für diese Werkstoffklasse kann vielfach ein viskoelastisches Materialgesetz angenommen werden. Mit Hilfe des Korrespondenzprinzips wurden zahlreiche Probleme (Balken, Scheiben, Platten, Schalen) gelöst. Im vorliegenden Beitrag wird eine direkt formulierte Biegetheorie für dickere und mehrschichtige viskoelastische Platten diskutiert.

Die grundlegenden Arbeiten zur viskoelastischen Plattenbiegung bei Beschränkung auf das homogene, linear-viskoelastische Materialgesetz erschienen in den 50er und 60er Jahren. Stellvertretend dafür soll hier nur [1] genannt werden. Ausgangspunkt der Analyse war immer die Kirchhoffsche Plattentheorie und das Alfneysche Theorem (Korrespondenzprinzip).

Nachfolgend wird die Aufgabenstellung wie folgt erweitert:

- Berücksichtigung der Querschubdeformation,
- Zulassung von stetigen oder sprunghaften Änderungen der Materialeigenschaften über die Plattendicke.

Diese Erweiterung der Aufgabenstellung ist notwendig, da z. B. Schichtkonstruktionen heute typisch für viele technische Anwendungen sind. Dabei zeigen bereits elastische Rechnungen den für Schichtplatten wesentlichen Einfluß der Querschubdeformation auf das Gesamtverhalten der Konstruktion für den Fall, daß die Schichteigenschaften starke Unterschiede aufzeigen.

Im Unterschied zu den meisten anderen Autoren wird hier von einer direkt formulierten Plattentheorie ausgegangen [2], [3]. Dabei muß zunächst eine Identifikation der Materialparameter für die Platte erfolgen. Die Durchbiegungen werden für die allseitig gelenkig gelagerte Platte bei quasistatischer Belastung ermittelt. Für Sonderfälle (einschichtige Platte, Sandwich-Platte) werden Abschätzungen für den Einfluß der Querschubdeformationen diskutiert.

1. Konstitutive Gleichungen für viskoelastische Materialien

Für das isotrope, linear-viskoelastische Kontinuum kann man die konstitutiven Gleichungen beispielsweise als lineare Differentialgleichungen angeben [4]

$$P s_{ij}(x_1, x_2, z, t) = Q e_{ij}(x_1, x_2, z, t) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$M \sigma_{ii}(x_1, x_2, z, t) = N \epsilon_{ii}(x_1, x_2, z, t).$$

Dabei sind σ_{ij} , ϵ_{ij} die Komponenten des Spannungsbzw. des Deformationstensors, s_{ij} , e_{ij} die Komponenten der entsprechenden Deviatoren, P , Q , M , N Differentialoperatoren der Zeitkoordinaten t , x_1 , x_2 , z orthogonale Koordinaten. Es gelte die Einsteinsche Summationskonvention.

Die Differentialoperatoren haben im hier betrachteten Fall folgende spezielle Form

$$P = \sum_{b=0}^{P_0} p_b \frac{\partial^b}{\partial t^b}, \quad Q = \sum_{b=0}^{Q_0} q_b \frac{\partial^b}{\partial t^b}, \quad (1.2)$$

$$M = \sum_{b=0}^{M_0} m_b \frac{\partial^b}{\partial t^b}, \quad N = \sum_{b=0}^{N_0} n_b \frac{\partial^b}{\partial t^b},$$

wobei die Koeffizienten p_b , q_b , m_b , n_b die mechanisch-physikalischen Eigenschaften des Materials charakterisieren. Diese werden im Rahmen dieser Arbeit als temperaturunabhängige Konstante betrachtet. Sie können sich jedoch mit der Koordinate z ändern. Die Koordinate z verläuft in Richtung der Normalen zur Platte. Die Funktionen $p_b(z)$, $q_b(z)$, $m_b(z)$ und $n_b(z)$ seien stetig bzw. abschnittsweise konstant. Um die Aufgabenstellung auf die entkoppelte Plattenbiegung zu reduzieren, werden sie als symmetrisch zur Plattenmittelfläche ($z=0$) vorausgesetzt.

Nach Einführung der Laplace-Transformation

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \quad (1.3)$$

läßt sich (1.1) in folgendes Gleichungssystem überführen

$$P(z, s) \bar{s}_{ij}(x_1, x_2, z, s) = Q(z, s) \bar{e}_{ij}(x_1, x_2, z, s), \quad (1.4)$$

$$M(z, s) \bar{\sigma}_{ii}(x_1, x_2, z, s) = N(z, s) \bar{\epsilon}_{ii}(x_1, x_2, z, s).$$

Hier ist s die Variable des Bildraums und $P(z, s)$, $Q(z, s)$, $M(z, s)$, $N(z, s)$ sind Polynome von s , deren Koeffizienten von z abhängen. Um den Rechenaufwand zu verringern, sollen die Anfangsbedingungen gleich Null sein.

2. Grundgleichungen für isotrope viskoelastische Platten

Entsprechend [2], [3] wird für die Platte ein zweidimensionales deformierbares Kontinuum als Modell angenommen. Dieses soll den Freiheitsgrad 3 haben, d. h. die Bewegungen der Punkte auf der Fläche werden durch die Durchbiegungen w und die Verdrehwinkel φ_α ($\alpha=1,2$) gekennzeichnet. Dann beschreiben folgende Gleichungen das elastische Verhalten isotroper Platten bei geometrischer Linearität [3]:

– geometrische Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha &= w_{,\alpha} + \varphi_\alpha \\ \mu_{\alpha\beta} &= [\varphi_{\alpha,\beta}]^{\text{sym}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

– Gleichgewichtsgleichungen

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\alpha} + q &= 0, \\ M_{\alpha\beta,\alpha} - F_\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

– konstitutive Gleichungen

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \Gamma \gamma_\alpha \\ M_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} \mu_{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$C_{1111} = C_{2222} = D, \quad C_{1212} = C_{2121} = H,$$

$$C_{1122} = C_{2211} = D - H.$$

Hierbei entsprechen γ_α , $\mu_{\alpha\beta}$ den Querschubdeformationen und dem symmetrischen Anteil der Biege- und Drilldeformationen, F_α , $M_{\alpha\beta}$ den Querkräften und den Biege- und Drillmomenten, q der äußeren Flächenlast, Γ , D , H der Querschub-, der Biege- und der Drillsteifigkeit. Alle Variablen (mit Ausnahme der Steifigkeiten) sind Funktionen der die Plattenmittelfläche beschreibenden Koordinaten x_α , $(\cdot)_{,\alpha}$ sind die Ableitungen nach diesen Koordinaten.

Beim Aufstellen der Gln. (2.1) bis (2.3) wurde berücksichtigt, daß nur isotropes, nichtpolares Material betrachtet wird, d. h., daß der Spannungstensor symmetrisch ist

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.4)$$

Unter Beachtung der in der Plattentheorie üblichen Zusammenhänge zwischen Querkräften, Momenten und Spannungstensorkomponenten [5]

$$F_\alpha = \langle \sigma_{\alpha 3} \rangle, \quad M_{\alpha\beta} = \langle \sigma_{\alpha\beta 3} \rangle \quad (2.5)$$

mit

$$\langle (\cdot) \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} (\cdot) dz \quad (2.6)$$

und h als Plattendicke folgt, daß auch der Momententensor symmetrisch ist, und es ließe sich nachweisen, daß damit in die konstitutiven Gleichungen (2.3) nur die symmetrischen Anteile der Biege- und Drilldeformationen eingehen.

Ausgehend von den Erfahrungen der dreidimensionalen Viskoelastizitätstheorie [4] wird bei der Formulierung der Gleichungen für die Biegetheorie viskoelastischer Platten wie folgt vorgegangen. Alle Variablen (mit Ausnahme der Steifigkeiten) seien zusätzlich Funktionen

der Zeit t . Für den Fall quasistatischer Belastungen und Anfangsbedingungen gleich Null kann man mit Hilfe der Laplace-Transformation aus (2.1) bis (2.3) folgendes System erhalten

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_\alpha(x_1, x_2, s) &= \bar{w}(x_1, x_2, s)_{,\alpha} + \bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2, s), \\ \bar{\mu}_{\alpha\beta}(x_1, x_2, s) &= [\bar{\varphi}_\alpha(x_1, x_2, s)_{,\beta}]^{\text{sym}}, \\ F_\alpha(x_1, x_2, s)_{,\alpha} + \bar{q}(x_1, x_2, s) &= 0, \\ \bar{M}_{\alpha\beta}(x_1, x_2, s)_{,\beta} - \bar{F}_\alpha(x_1, x_2, s) &= 0, \\ \bar{F}_\alpha(x_1, x_2, s) &= \Gamma(s) \bar{\gamma}_\alpha(x_1, x_2, s), \\ \bar{M}_{\alpha\beta}(x_1, x_2, s) &= C_{\alpha\beta\gamma\delta}(s) \bar{\mu}_{\gamma\delta}(x_1, x_2, s), \\ C_{1111}(s) = C_{2222}(s) = D(s), \quad C_{1212}(s) = C_{2121}(s) &= H(s), \\ C_{1122}(s) = C_{2211}(s) = D(s) - H(s). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Das System (2.7) enthält die Materialkonstanten $\Gamma(s)$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}(s)$. Ihre konkrete Form ist noch zu bestimmen.

Die hier angeführten Gleichungen sind mathematisch, mechanisch und thermodynamisch widerspruchsfrei. Auf den Beweis dafür wird hier verzichtet und auf die Arbeiten [6], [7] verwiesen.

3. Identifikation der Materialparameter für die Platte

Im Falle der Ermittlung der Materialparameter bei linear-elastischen Platten werden Lösungen von Randwertaufgaben für den elastischen quaderförmigen Körper, dessen eine Ausdehnung kleiner ist als die beiden anderen, und die elastische Platte nach der zweidimensionalen, direkt formulierten Theorie gegenübergestellt. Für orthotropes, elastisches Material mit sich über die Dicke ändernden Eigenschaften sind die Lösungen in [8] beschrieben. Für isotropes Material gehen diese Lösungen in folgende Werte über ($G(z)$, $K(z)$ sind die über die Plattendicke veränderlichen Schub- bzw. Kompressionsmoduln):

$$\begin{aligned} D &= 4 \left\langle \frac{G(z) (3K(z) + G(z)) z^2}{3K(z) + 4G(z)} \right\rangle, \\ H &= 2 \langle G(z) z^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Gamma = \lambda_0^2 H / 2,$$

wobei λ_0 die kleinste positive Wurzel der folgenden Sturm-Liouvilleschen Aufgabe ist

$$\frac{\partial}{\partial z} [G(z) \frac{\partial}{\partial z} V(z)] + \lambda_0^2 G(z) V(z) = 0, \quad (3.2)$$

$$z = \pm h/2 : \frac{\partial V(z)}{\partial z} = 0.$$

Im Falle viskoelastischer Platten kann analog vorgegangen werden. Dazu sind die in [8] enthaltenen Lösungen aus dem Originalraum in den Bildraum zu transformieren, und es ist das Materialgesetz (1.4) statt des Hooke'schen Gesetzes anzuwenden. Die Materialwerte für die viskoelastische Platte sind

$$\begin{aligned} D(s) &= \left\langle \frac{Q(z,s)}{P(z,s)} \frac{2N(z,s)P(z,s) + M(z,s)Q(z,s)}{N(z,s)P(z,s) + 2M(z,s)Q(z,s)} z^2 \right\rangle, \\ H(s) &= \left\langle \frac{Q(z,s)}{P(z,s)} z^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Gamma(s) = \lambda_0^2(s) H(s) / 2,$$

wobei $\lambda_0(s)$ wieder die kleinste positive Wurzel einer Sturm-Liouvelleschen Aufgabe ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{Q(z,s)}{P(z,s)} \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(z,s) \right] + \lambda_0^2(s) \frac{Q(z,s)}{P(z,s)} \bar{V}(z,s) = 0, \quad (3.4)$$

$$z = \pm h/2 : \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(z,s) = 0.$$

Anmerkung: Für die Materialwerte D , H bzw. $D(s)$, $H(s)$ können geschlossene Ausdrücke erhalten werden. Für Γ bzw. $\Gamma(s)$ ist dies nur in Sonderfällen (z. B. einschichtige Platten) möglich. Allgemein sind die Aufgaben (3.2) bzw. (3.4) numerisch zu lösen.

4. Sonderfälle für das viskoelastische Materialgesetz

4.1. Berücksichtigung des ersten Axioms der Rheologie

Erfahrungsgemäß verhalten sich fast alle Materialien bei hydrostatischem Druck rein-elastisch (erstes Axiom der Rheologie [9]). Damit gilt

$$M(z,s) = 1, \quad N(z,s) = 3K(z). \quad (4.1)$$

Folglich vereinfacht sich der Ausdruck für $D(s)$

$$D(s) = \left\langle \frac{Q(z,s)}{P(z,s)} \frac{6K(z)P(z,s) + Q(z,s)}{3K(z)P(z,s) + 2Q(z,s)} z^2 \right\rangle.$$

Alle anderen Formeln behalten ihre Gültigkeit.

4.2. Kelvin-Voigt-Material

Für dieses Material gilt [10]

$$Q(z,s) = 2(G(z) + \eta(z)s), \quad P(z,s) = 1, \quad (4.2)$$

wobei $\eta(z)$ der über die Plattendicke veränderliche Viskositätsparameter ist. Mit (4.2) erhält man statt (3.3) und (3.4)

$$D(s) = 4 \left\langle \frac{(G(z) + \eta(z)s)(3K(z) + G(z) + \eta(z)s)}{3K(z) + 4(G(z) + \eta(z)s)} z^2 \right\rangle,$$

$$H(s) = 2 \left\langle (G(z) + \eta(z)s) z^2 \right\rangle,$$

$$\Gamma(s) = \lambda_0^2(s) H(s) / 2, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} ((G(z) + \eta(z)s) \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(z,s)) + \lambda_0^2(s) (G(z) + \eta(z)s) \bar{V}(z,s) = 0,$$

$$z = \pm h/2 : \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(z,s) = 0.$$

Für den Fall, daß $\eta(z)$ Null wird, gehen die Gleichungen (4.3) in die Beziehungen für das elastische Material (3.1), (3.2) über. Wenn $G(z)$ und $\eta(z)$ zueinander proportional sind, d. h.

$$\eta(z) = \epsilon G(z) \quad (4.4)$$

gilt, so wird u. a. $\lambda_0^2(s)$ zur Konstanten.

4.3. Maxwell-Material

In diesem Falle gilt [10]

$$P(z,s) = s + \frac{G(z)}{\eta(z)}, \quad Q(z,s) = 2G(z)s. \quad (4.5)$$

Mit (4.5) erhält man aus (3.3), (3.4)

$$D(s) = 4 \left\langle \frac{G(z)s}{s + \frac{G(z)}{\eta(z)}} \frac{3K(z)(s + \frac{G(z)}{\eta(z)}) + G(z)s}{3K(z)(s + \frac{G(z)}{\eta(z)}) + 4G(z)s} z^2 \right\rangle,$$

$$H(s) = 2 \left\langle \frac{G(z)s}{s + \frac{G(z)}{\eta(z)}} z^2 \right\rangle, \quad (4.6)$$

$$\Gamma(s) = \lambda_0^2(s) H(s) / 2,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(z)s}{s + \frac{G(z)}{\eta(z)}} \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(z,s) \right) + \lambda_0^2(s) \frac{G(z)s}{s + \frac{G(z)}{\eta(z)}} \bar{V}(z,s) = 0,$$

$$z = \pm h/2 : \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(z,s) = 0.$$

Die Gleichungen (4.6) gehen für $\eta(z) \rightarrow \infty$ in die Gleichungen (3.1), (3.2) über.

4.4. Weitere Materialien

Weitere Modelle viskoelastischer Materialien lassen sich z. B. durch die Kombination von Feder- und Dämpfermodellen bilden. Entsprechende Beispiele sind in [4], [9] bis [11] enthalten.

5. Quasistatische Biegung von viskoelastischen Platten

5.1. Allgemeine Gleichungen

Als einfaches Beispiel zur Illustration der Theorie soll die Biegeaufgabe für die Rechteckplatte ($0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$) mit allseitiger gelenkiger Lagerung an den Rändern $x_1 = 0, a$, $x_2 = 0, b$ dienen. Die Materialeigenschaften sind symmetrisch zur Plattenmittelfläche. Die entsprechende elastische Lösung ist in [3] angegeben.

Die quasistatische Biegeaufgabe für die viskoelastische Platte wird auf der Grundlage des Korrespondenzprinzips gelöst. Dazu wird zunächst proportionale Belastung vorausgesetzt

$$q^*(x_1, x_2, t) = q(x_1, x_2) f(t). \quad (5.1)$$

Damit genügt es, in der elastischen Lösung die Durchbiegungen durch die Abbildung der viskoelastischen Durchbiegungen sowie Γ , D durch $\Gamma(s)$, $D(s)$ zu ersetzen. Dabei erhält man

$$\bar{W}(x_1, x_2, s) = \bar{W}^K(x_1, x_2, s) + \bar{W}^T(x_1, x_2, s) \quad (5.2)$$

mit

$$\bar{W}^K(x_1, x_2, s) = \frac{\bar{f}(s)}{D(s)} \sum_{m,n} \frac{q_{mn}}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2, \quad (5.3)$$

$$\bar{W}^T(x_1, x_2, s) = \frac{\bar{f}(s)}{\Gamma(s)} \sum_{m,n} \frac{q_{mn}}{\lambda_m^2 + \mu_n^2} \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2.$$

In (5.2), (5.3) entspricht \bar{W}^K der transformierten Lösung nach der Kirchhoffschen Plattentheorie, und \bar{W}^T ist der entsprechende Korrekturterm durch Berücksichtigung der Querschubdeformation. Weiterhin bedeuten in (5.3)

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x_1, x_2) \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2 dx_1 dx_2,$$

$$\lambda_m = m\pi/a, \mu_n = n\pi/b, m, n = 1, 2, \dots$$

Um die Originale W^K, W^T zu ermitteln, kann wie folgt vorgegangen werden [11]. Zunächst wird die elastische Lösung ebenfalls der Laplace-Transformation unterzogen. Für den Fall, daß gleiche Belastungen, gleiche Randbedingungen und gleiche Geometrie für die elastische und die viskoelastische Platte gelten, erhält man folgenden Zusammenhang

$$\begin{aligned} \bar{W}^K(x_1, x_2, s) &= s R(s) \bar{w}^K(x_1, x_2, s), \\ \bar{W}^T(x_1, x_2, s) &= s S(s) \bar{w}^T(x_1, x_2, s), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$R(s) = D / sD(s), \quad \Gamma(s) = \Gamma / s\Gamma(s).$$

Dabei sind \bar{w}^K, \bar{w}^T die transformierten elastischen Lösungen.

Bei Anwendung des Faltungssatzes und unter der Voraussetzung, daß die Belastung die Form einer Heaviside'schen Sprungfunktion hat, geht (5.2) in folgende einfache Beziehung über

$$W(x_1, x_2, t) = R(t) w_s^K(x_1, x_2) + S(t) w_s^T(x_1, x_2) \quad (5.5)$$

mit w_s^K, w_s^T als statische Durchbiegungen. Zur Abschätzung des Einflusses des Korrekturterms werden in dieser Arbeit die Durchbiegungen in der Mitte einer quadratischen Platte unter sinusförmiger Belastung betrachtet. Für diesen Fall vereinfachen sich die Ausdrücke für die statischen Durchbiegungen w_s^K, w_s^T wesentlich, und man erhält statt (5.5)

$$W(a/2, a/2, t) = R(t)(q_0 a^4 / 4\pi^4 D) + S(t)(q_0 a^2 / 2\pi^2)$$

bzw.

$$W^* = (4\pi^4 D / q_0 a^4) W(a/2, a/2, t) = R(t) + (D\pi^2 / 2a^2 \Gamma) S(t) \quad (5.6)$$

mit $q_0 = \text{konst.}$ Nach [3] wird für die einschichtige (homogene) Platte

$$D = 2Gh^3 / 12(1 - \nu), \quad \Gamma = \pi^2 Gh / 12.$$

Damit ergibt sich

$$(D\pi^2 / 2a^2 \Gamma) = h^2 / a^2 (1 - \nu) \simeq 0 (h^2 / a^2), \quad 0 \leq \nu \leq 0,5,$$

d. h. für dünne Platten ($h^2 \ll a^2$) wird dieser Term klein. Für inhomogene Platten nimmt der Faktor ($\pi^2 D / 2a^2 \Gamma$) unterschiedlichste Werte an [3], wobei in Abhängigkeit von den Steifigkeitsparametern und der Querschnittsgeometrie der Faktor auch die Größenordnung 1 aufweisen kann.

5.2. Die einschichtige Platte aus Kelvin-Voigt-Material

Für diesen Fall sind G, K, η über den Plattenquerschnitt konstant. Damit erhält man nach (3.1) und (4.3)

$$D = h^3 G(3K + G) / 3(3K + 4G), \quad \Gamma = \pi^2 Gh / 12, \quad (5.7)$$

$$D(s) = h^3 (G + \eta s)(3K + G + \eta s) / 3(3K + 4(G + \eta s)), \quad (5.8)$$

$$\Gamma(s) = \pi^2 (G + \eta s) h / 12.$$

Mit den Ausdrücken (5.7), (5.8) ergeben sich entsprechend (5.4)

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - (3K + G) \exp(-t/\tau) / (3K + 4G) \\ &\quad - 3G \exp(-(3K + G)t/G\tau) / (3K + 4G), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$S(t) = 1 - \exp(-t/\tau), \quad (5.10)$$

wobei $\tau = \eta / G$ ist.

Durch unmittelbares Einsetzen von (5.9), (5.10) in (5.6) kann man erkennen, daß der Einfluß des Korrekturterms auf die Durchbiegungen im Falle dünner Platten gering ist. Auf Bild 1 ist daher nur die entsprechende Lösung der Kirchhoffschen Theorie eingezeichnet. Diese fällt vollständig mit der in [1] angegebenen Lösung zusammen. In der Tabelle 1 sind die Fehler, die bei der Vernachlässigung des Korrekturterms entstehen, aufgeführt. Im Rahmen technischer Theorien sind Fehler von $\leq 2\%$ als vernachlässigbar anzusehen.

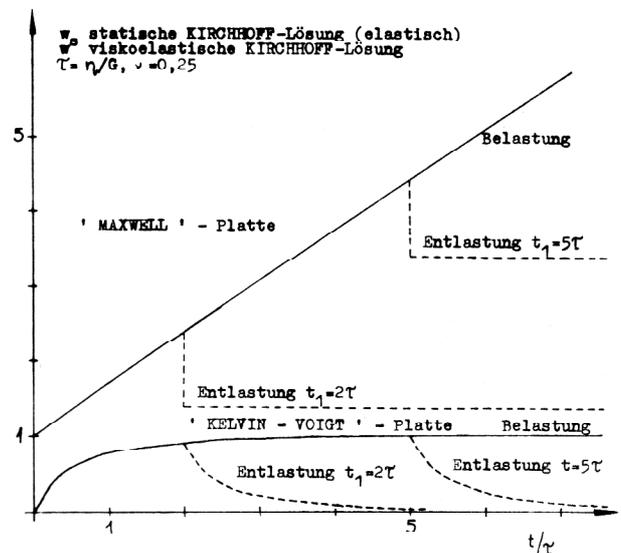


Bild 1 Viskoelastische Durchbiegungen für Platten aus Kelvin-Voigt-Material bzw. Maxwell-Material

5.3. Die einschichtige Platte aus Maxwell-Material

Für diesen Fall gelten die gleichen Voraussetzungen wie im vorhergehenden Fall. Die Gleichungen (5.7) ändern sich nicht, und nach (4.6) gilt

$$D(s) = \frac{h^3}{3} \frac{G_s \frac{3K}{\tau} + (3K + G)s}{s + \frac{1}{\tau} \frac{3K}{\tau} + (3K + 4G)s}, \quad \Gamma(s) = \frac{\pi^2}{12} \frac{G_s}{s + \frac{1}{\tau}}. \quad (5.11)$$

Damit erhält man für $R(t), S(t)$

$$R(t) = \frac{3K + G}{3K + 4G} \left(\frac{K + G}{K} + \frac{t}{\tau} - \frac{G^2}{(3K + G)K} \exp(-3Kt/(3K + G)\tau) \right), \quad (5.12)$$

$$S(t) = 1 + \frac{t}{\tau}. \quad (5.13)$$

Das Maxwell-Modell hat offensichtlich für große t -Werte Anwendungsgrenzen, da dabei der Bereich der geometrischen Linearität verlassen wird. Im zulässigen Zeitbereich ist der Korrekturterm vernachlässigbar klein. Auf Bild 1 ist folglich nur die Kirchhoffsche Lösung darge-

Tabelle 1:

Fehler, die bei der Vernachlässigung des Korrekturterms entstehen

$\frac{t}{\tau}$	Kelvin-Voigt-Material			Maxwell-Material		
	$\frac{W}{w_s}$	Δ	$\delta\%$	$\frac{W}{w_s}$	Δ	$\delta\%$
BELASTUNG						
0,00	0,00			1	0,01	1,33
0,50	0,58	0,005	0,91	1,36	0,02	1,47
1,00	0,75	0,008	0,12	1,70	0,03	1,57
3,00	0,96	0,012	1,31	3,06	0,05	1,74
5,00	0,995	0,013	1,33	4,40	0,08	1,82
10,00	1	0,013	1,33	7,73	0,15	1,90
ENTLASTUNG $t_1 = 2\tau$						
2,00	0,91	0,011	1,27	1,39	0,03	1,92
3,00	0,21	0,004	1,99	1,36	0,03	1,96
5,00	0,028	0,000	2,00	1,34	0,03	1,99
7,00	0,003	0,000	2,00	1,33	0,03	1,99
$\delta\% = 100 \Delta / \frac{W}{w_s}$						

stellt. Diese fällt vollständig mit der aus der Literatur [1] bekannten Lösung zusammen. In der Tabelle 1 sind die entsprechenden Fehler angeführt.

5.4. Sandwich-Platten

Abschließend sollen dreischichtige Platten aus viskoelastischen Materialien untersucht werden. Die Dreischicht-Platte (Sandwich-Platte) besteht aus einer mittleren Schicht der Dicke H und zwei Außenschichten, die jeweils die Dicke t_1 haben. Vereinbarungsgemäß soll $2t_1 \ll H$ sein. Die hier gewählten geometrischen Beziehungen fallen somit mit den in [12] enthaltenen zusammen. Wenn G_1, K_1 Schubmodul bzw. Kompressionsmodul der Außenschichten, G_2, K_2 entsprechend für die mittlere Schicht sind, so erhält man unter der Voraussetzung harter (steifer) Außenschichten und einer weichen Füllschicht ($G_1 \gg G_2, K_1 \gg K_2$) folgende Ersatzsteifigkeiten für die elastische Sandwich-Platte [3]

$$D = [2G_1(3K_1 + G_1)t_1 H^2 / (3K_1 + 4G_1)], \Gamma = G_2 H. \quad (5.14)$$

Die Formeln (5.14) wurden unter der Voraussetzung gewonnen, daß $0(G_2/G_1) \ll 0(2t_1/H)$ ist, wobei $0(\dots)$ die Größenordnung einer bestimmten Größe kennzeichnet. Bei technischen Anwendungen ist diese Relation häufig erfüllt. Damit fallen die Gleichungen (5.14) vollständig mit den in [12] angegebenen Steifigkeiten zusammen. Sollte die Relation nicht erfüllt sein, so muß die Querschubsteifigkeit Γ numerisch ermittelt werden.

Für die Sandwich-Platte aus viskoelastischem Material wird von der gleichen Geometrie ausgegangen. Die Außenschichten sollen rein-elastisch sein, die Füllschicht soll aus inkompressiblem viskoelastischen Material bestehen. Mit 1 werden die Materialkennwerte der Außenschichten bezeichnet, mit 2 die der Füllschicht.

Zunächst wird das Kelvin-Voigt-Materialgesetz vorausgesetzt. Die getroffenen Annahmen führen in diesem Fall auf $\eta_1 = 0$ (rein-elastische Außenschichten) und $K_2 \rightarrow \infty$ (inkompressibles Füllmaterial). Damit erhält man aus (4.3)

$$D(s) = \frac{H^3}{3} (G_2 + \eta_2 s + \frac{G_1(3K_1 + G_1)}{3K_1 + 4G_1} \frac{6t_1}{H}) \quad (5.15)$$

Mit $G_2 \ll G_1$ wird aus (5.15)

$$D(s) = (\eta_2 s H^3 + 3D) / 3. \quad (5.16)$$

Außerdem ist $\Gamma(s)$ wie folgt zu ermitteln

$$\Gamma(s) = \lambda_0^2(s) \frac{H^3}{12} (\eta_2 s + G_1 \frac{6t_1}{H}), \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{V}(z,s) + \lambda_0^2(s) \bar{V}(z,s) = 0, \quad (5.18)$$

$$z = \pm (\frac{H}{2} + t_1) : \frac{\partial}{\partial z} \bar{V}(z,s) = 0, \quad (5.19)$$

$$z = \pm H/2 : \bar{V}(z,s) \Big|_+ = \bar{V}(z,s) \Big|_-$$

$$(G_2 + \eta_2 s) \frac{\partial \bar{V}(z,s)}{\partial z} \Big|_- = G_1 \frac{\partial \bar{V}(z,s)}{\partial z} \Big|_+$$

Die Sturm-Liouvillesche Aufgabe (5.18) bei den Rand- und Stetigkeitsbedingungen (5.19) soll hier näherungsweise gelöst werden. Bei einer dem elastischen Fall analogen Vorgehensweise erhält man für $\lambda_0(s)$

$$\lambda_0^2(s) = \frac{2(G_2 + \eta_2 s)}{G_1 t_1 H} \quad (5.20)$$

Damit ergibt sich $\Gamma(s)$ entsprechend (5.17)

$$\Gamma(s) = G_2 H \tau_1 \tau_2 \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right), \quad (5.21)$$

wobei

$$\tau_1 = \eta_2 H / 6t_1 G_1, \quad \tau_2 = \eta_2 / G_2$$

ist. Unter den getroffenen Vereinbarungen ist zu erwarten, daß $\tau_1 < \tau_2$ ist. Für $R(t)$, $S(t)$ erhält man abschließend folgende Näherungsausdrücke

$$R(t) = 1 - \exp(-3Dt/\eta_2 H^3) = 1 - \exp(-(3K_1 + G_1)t/3K_1 + 4G_1)\tau_1) \quad (5.22)$$

$$S(t) = 1 - \tau_2 \exp(-t/\tau_2) / (\tau_2 - \tau_1) + \tau_1 \exp(-t/\tau_1) / (\tau_2 - \tau_1) \quad (5.23)$$

Die dreischichtige Platte aus Kelvin-Voigt-Material weist typische Merkmale der gewählten Materialklasse auf. Bei $t \rightarrow 0$ geht die Lösung gegen 0, bei $t \rightarrow \infty$ gegen 1. Aus (5.6) ist zu erkennen, daß für bestimmte Materialkennwerte der Einfluß der Querschubdeformationen auf die viskoelastischen Durchbiegungen wesentlich sein kann.

Im Falle des Maxwell'schen Materialgesetzes ist in den Ausdrücken (4.6) $\eta_1 \rightarrow \infty$ (rein-elastische Außenschichten) und $K_2 \rightarrow \infty$ (inkompressibles Füllmaterial) zu setzen. Für den Fall, daß $G_1 \gg G_2$ ist, erhält man

$$D(s) = D. \quad (5.24)$$

Der zweite Plattenparameter ist aus folgenden Gleichungen zu bestimmen

$$\Gamma(s) = \lambda_0^2 G_1 t_1 H^2 / 2, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{V}(z,s) + \lambda_0^2(s) \bar{V}(z,s) = 0, \quad (5.26)$$

$$z = \pm \left(\frac{H}{2} + t_1\right) : \frac{\partial \bar{V}(z,s)}{\partial z} = 0, \quad (5.27)$$

$$z = \pm H/2 : \bar{V}(z,s) \Big|_+ = \bar{V}(z,s) \Big|_- ,$$

$$G_1 \frac{\partial \bar{V}(z,s)}{\partial z} \Big|_+ = \frac{G_2 s}{s + \frac{G_2}{\eta_2}} \frac{\partial \bar{V}(z,s)}{\partial z} \Big|_- .$$

Die Näherungslösung der Differentialgleichung (5.26) bei den Rand- und Stetigkeitsbedingungen (5.27) lautet

$$\lambda_0^2(s) = \frac{2G_2 s}{\left(s + \frac{G_2}{\eta_2}\right)}. \quad (5.28)$$

Damit erhält man

$$S(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\tau_2 s^2}$$

bzw. nach der Rücktransformation

$$S(t) = 1 + \frac{t}{\tau_2}. \quad (5.29)$$

Auch in diesem Fall kann der Einfluß der Querschubdeformationen wesentlich werden. Durch unmittelbares Einsetzen in (5.6) kann man feststellen, daß die für das Maxwell'sche Material typischen Eigenschaften erhalten bleiben (z. B. erhält man für $t = 0$ die elastische Lösung). Für große t -Werte gelten die gleichen Einschränkungen wie für einschichtige Platten (s. Abschnitt 5.3).

Anmerkung: Für die kritischen Diskussionen zum Inhalt des Artikels möchte sich der Autor bei Herrn Prof. W. Palmow (PI Leningrad, Lehrstuhl Mechanik und Steuerungsprozesse) bedanken. Weiterhin gilt der Dank Herrn H. Kogel (TU Dresden, WB Fertigungsprozeßgestaltung), der freundlicherweise die numerischen Beispiele rechnete.

LITERATUR:

- [1] Mase, G. E. Behavior of viscoelastic plates in bending. Proc. of ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol. 86, No. EM 3 (June 1960), 25 - 39.
- [2] Жилин П. А.: Основные уравнения неклассической теории оболочек. Ленинград, Труды ЛПИ, No 386, 1982, 29 - 46.
- [3] Altenbach, H.: Die Grundgleichungen einer linearen Theorie für dünne, elastische Platten und Scheiben mit inhomogenen Materialeigenschaften in Dickenrichtung. Technische Mechanik 5 (1984) 2, 51 - 58.
- [4] Christensen, R. M.: Theory of Viscoelasticity. Academic Press, New York - London, 1971 - Moskau, Mir, 1974.
- [5] Autorenkollektiv: Höhere Festigkeitslehre, Bd. 1, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1979, 236 S.
- [6] Rotherth, H.: Lineare konstitutive Gleichungen der viskoelastischen Cosseratfläche. ZAMM 55 (1975), 647 - 656.
- [7] Altenbach, H.: Zur Theorie der inhomogenen Cosserat-Platten, ZAMM 65 (1985) 12, 638 - 641.
- [8] Altenbach, H.: Die Ermittlung der Deformationsenergie für dünne Platten und Schalen mit in Dickenrichtung veränderlichen Materialeigenschaften. Wiss. Ztschr. TH Magdeburg 28 (1984) 2, 29 - 33.
- [9] Reiner, M.: Rheologie. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1967, 360 S.
- [10] Flügge, W.: Viscoelasticity. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975, 194 S.
- [11] Nowacki, W.: Theorie des Kriechens, Wien, F. Deuticke Verlag, 1965, 224 S.
- [12] Reissner, E.: Small Bending and Stretching of Sandwich-type Shells. NACA-Report No. 975, 1950, 26 p.

Anschrift des Verfassers:

Dr. H. Altenbach
DDR - 3010 Magdeburg
B.-Bicrut-Platz 5, PSF 124
Technische Hochschule „Otto von Guericke“
Sektion Dieselmotoren, Pumpen und Verdichter
WB Maschinenmeßtechnik und Kolbenmaschinen