

# Die Ermittlung der Spannungen und Verformungen in Teilen eines Diesellokomotivradsatzes bei Wärmebeanspruchungen

Andreev, A. G., Garev, O. L., Manochin, V. A., Scepkin, A. V.

## 1. Einführung

Der Radsatz einer Schmalspurdiesellok [1] besteht aus Rädern und einem konischen Zahnrad, welche auf die Achse aufgeschraubt sind. Die Räder selbst bestehen aus dem Radkörper und dem Radreifen. Vor dem Verbinden der Radsatzteile erfolgt eine Wärmebehandlung, wobei induktive Heizgeräte zur Anwendung kommen.

Während des technologischen Erwärmungsprozesses, bei der Montage und während der Erwärmung beim Bremsen entstehen instationäre Temperaturfelder mit wesentlichen Gradienten, die Wärmespannungen hervorrufen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Spannungen und Verformungen in den Radsatzteilen während der technologischen Erwärmung und der Erwärmung im Betriebszustand sowie infolge der Aufschraubung untersucht. Dabei werden Optimierungsmöglichkeiten für den technologischen Erwärmungsprozeß diskutiert, wobei Fragen der Festigkeit, der Technologie und des Energieverbrauchs berücksichtigt werden.

## 2. Experimentelle Ermittlung der Temperatur und der Verformungen in den Radsatzteilen

### 2.1. Experimentelle Ermittlung der Temperaturverteilung im Rad beim Bremsen

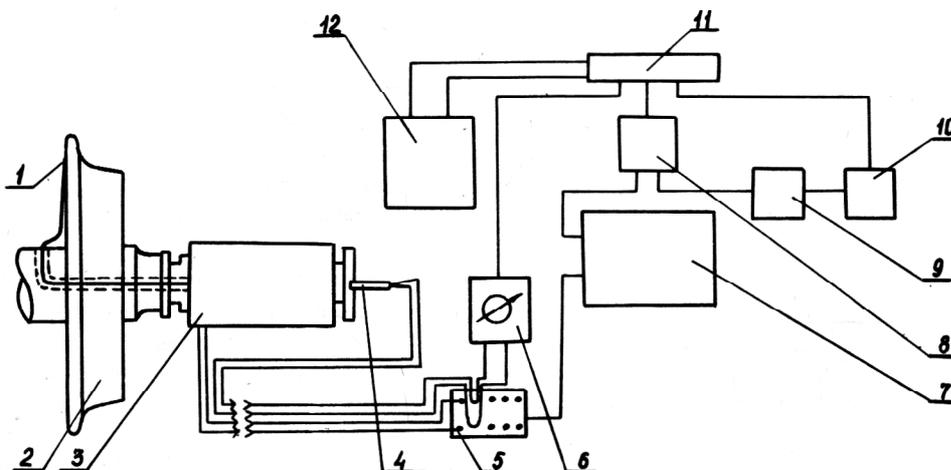
Die experimentelle Ermittlung der Temperatur im Rad beim Bremsen wird durch den instationären Charakter

der Erwärmungs- und Abkühlungsprozesses für das Rad, die Notwendigkeit einer synchronen Temperaturmessung für viele Punkte, den erschwerten Zugang zu den Meßstellen auf dem Rad, die Drehungen und Schwingungen des Rades während des Meßvorganges und Probleme bei der Stromabnahme von einem rotierenden System auf den feststehenden Teil des Meßsystems erschwert.

Die Temperatur wurde mit Hilfe von 28 Thermoelementen (Durchmesser 0,5 mm) bestimmt. Die Elemente wurden in Bohrungen in den Rädern angebracht und über eine Bohrung in der Achse mit zwei Stromabnehmern am Ende der Achse verbunden. Von diesen wird das Signal über Kabel zur Meß- und Auswerteinrichtung übertragen (Bild 1). Das Anbringen der Thermolemente an den Rädern und der Achse erfolgt mit angeschweißten Folienschlaufen. Die Elemente der Meßeinrichtung sind auf Bild 1 erläutert.

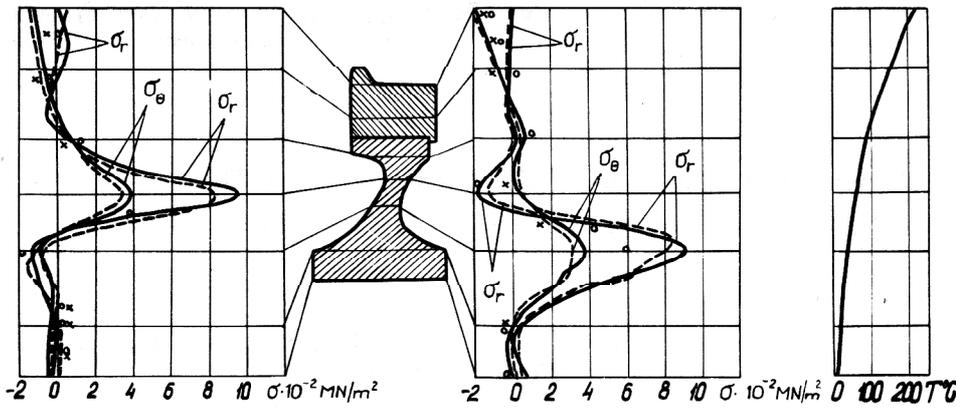
Es wurde ein Stromabnehmer erarbeitet [2], der in seinen Abmessungen der Achsenbuchse der Diesellok entspricht. Die Stabilität seines Übergangswiderstands wurde für den notwendigen Drehzahl- und Temperaturbereich auf einen speziellen Prüfstand getestet. Eine Erhöhung der Stabilität der Arbeit des Stromabnehmers kann durch Verwendung von drei Kontaktpaaren „Rad – Bürste“ für jedes Thermolement erzielt werden.

Die Ergebnisse des Eichens der Thermolemente zeigten, daß der Fehler der verwendeten Thermolemente 3 Grad im Bereich von 20 bis 300 °C nicht überschritt.



**Bild 1**  
Blockschaltbild für die Temperaturmessung im Rad während des Bremsens  
1 – Thermolement, 2 – Rad, 3 – Stromabnehmer, 4 – Widerstandsthermometer TSP – 309, 5 – Klemmleiste des Oszillografen K-12-22, 6 – Meßblock für die Temperatur in den Kalt-

lötstellen der Thermolemente, 7 – Oszillograf K-12-22, 8 – Bedienungspult für den Oszillografen, 9 – elektrische Zeitnahme, 10 – Potentiometer P-39, 11 – Spannungsverteilungsleiste, 12 – Akkumulator



**Bild 2**  
 Temperaturspannungen in einem Diesellokomotivrad beim Bremsen  
 o Radialspannungen  $\sigma_r$  (experimentell)  
 x Umfangsspannungen  $\sigma_\theta$  (experimentell)  
 --- Spannungen nach FEM (Variante A)  
 — Spannungen nach FEM (Variante B)

Es wurden 65 Versuche mit verschiedener Bremsdauer bzw. -charakteristiken, Gleisneigung, Zuggeschwindigkeiten, Druckverhältnissen in den Bremszylindern, Waggonzahl und Zuggewicht durchgeführt. Die Temperatur wurde während der Erwärmung und der Abkühlung des

Rades gemessen. In Abhängigkeit vom Bremsregime schwankte die maximale Temperatur zwischen 110 und 210 °C, der Temperaturabfall über den Radius lag bei 50 bis 170 Grad, die Abkühlungszeit auf 60 °C schwankte zwischen 50 und 100 Minuten. Die Versuche zeigten, daß der größte Temperaturabfall über dem Radius bei langen Bremsungen lag. Die Temperaturverteilung über den Radius während eines Versuches ist auf Bild 2 dargestellt.

## 2.2. Ermittlung der Temperatur, der Verformungen und der Verschiebungen im Rad auf einem Versuchsstand

Ziel dieses Teils der Arbeit war die Simulation von wahren Betriebsbedingungen für die Temperaturverteilung in der Form eines analogen Temperaturfeldes in einer Versuchseinrichtung. Dabei sollten auch die Verformungen, Spannungen und Verschiebungen des Rades ermittelt werden.

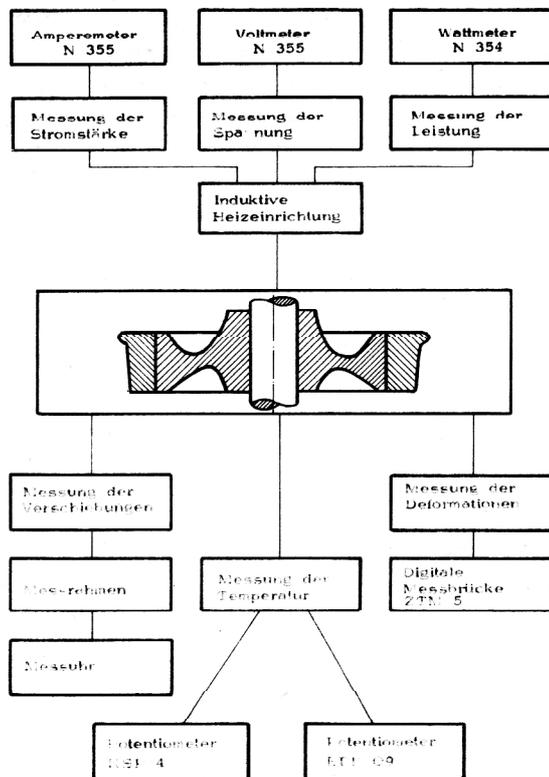
Die Versuchsdurchführung wurde durch den instationären Charakter der Raderwärmung, die Notwendigkeit der synchronen Registrierung der in vielen Punkten gemessenen Größen, das Vorhandensein eines starken elektromagnetischen Feldes, die Radschwingungen während des Betriebs der induktiven Heizeinrichtung, den schwierigen Zugang zu den Meßpunkten im Zusammenhang mit der Lage des Rades in der induktiven Heizeinrichtung erschwert.

Die Versuche wurden auf der in Bild 3 gezeigten Versuchseinrichtung durchgeführt. Die induktive Heizeinrichtung besteht aus einer Spule und 8 Eisenkörpern [3]. Eine solche Anlage gestattet es, das Rad so zu erwärmen, wie es annähernd auch beim Bremsen vorkommt.

Zum Messen der Temperatur wurden 66 Thermolemente verwendet. Diese wurden an der Oberfläche (52 Thermolemente) und in Bohrungen im Rad (14 Thermolemente) angebracht. Als Registriereinrichtungen wurden Potentiometer mit schnellem Aufzeichnungsgerät verwendet.

Beim Erwärmungsprozess wurde die axiale Verschiebung des Radreifens relativ zur Nabe mit Meßuhren gemessen. Diese wurden auf einem starren Rahmen befestigt, der auf 3 Punkten der Reifeninnenseite gelagert war.

Zur Ermittlung der Verformungen im Rad wurden 104 angelötete Hochtemperaturspannungswiderstände auf Folienbasis (Basis 10 mm) verwendet. Diese wurden



**Bild 3**  
 Blockschaltbild für die Messungen auf dem Prüfstand

als 52 Rechteckgitter angeordnet. Bei jedem Gitter befand sich ein Thermoelement. Jeweils 2 Widerstände wurden diametral am Rand befestigt. Zur Kompensation des Temperatureinflusses auf die Widerstände wurde eine Korrekturmethode für die temperaturabhängigen Widerstandsänderungen verwendet und die Kompensation des Temperatureinflusses auf die Verbindungsdrähte mit einer 3-Kabel-Schaltung vorgenommen [4].

Zur Registrierung der Verformungen wurde speziell eine Meßbrücke verwendet. Diese arbeitete genügend schnell, so daß eine ausreichende Meßgenauigkeit während der Erwärmungsphase des Rades gesichert war.

### 3. Die rechnerische Ermittlung der Spannungen und Verformungen in den Teilen des Radsatzes

#### 3.1. Der Berechnungsalgorithmus

Als Lösungsverfahren wird die Methode der Finiten Elemente verwendet, da diese die Berücksichtigung der komplizierten Geometrie der betrachteten Konstruktionen gestattet. Da die Aufgabe axialsymmetrisch ist, kann die gesamte Konstruktion durch Ringelemente mit Dreiecksquerschnitt [5] approximiert werden. Die Lösung erfolgt in Zylinderkoordinaten  $(r, z, \Theta)$ . Die zugehörigen axialsymmetrischen Verschiebungen sind  $u$  und  $v$ .

Die Knotenverschiebungen des Finiten Elements werden durch den Vektor

$$\vec{f}^e = \{ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \}^T \quad (1)$$

beschrieben. Die Verschiebungen im Element werden durch lineare Polynome approximiert. Der Cauchysche Verzerrungsvektor für Zylinderkoordinaten im Fall axialsymmetrischer Aufgaben der Elastizitätstheorie lautet

$$\vec{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\Theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ 1/r & 0 \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \vec{U}$$

mit

$$\vec{U} = \{ u, v \}^T$$

Folgende Beziehung gilt zwischen dem Vektor der Knotenverschiebungen  $\vec{f}^e$  und dem Vektor der Verzerrungen  $\vec{\epsilon}$

$$\vec{\epsilon} = [B] \vec{f}^e = [B_1, B_2, B_3] \vec{f}^e \quad (2)$$

mit

$$[B_i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & a_i/r + b_i + c_i/z & 0 \\ c_i & 0 & b_i \end{bmatrix}$$

Die Parameter  $a_i, b_i, c_i$  hängen von den Knotenkoordinaten  $r_i, z_i$  des Finiten Elements ab:

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j, \quad b_i = z_j - z_m, \quad c_i = r_m - r_j,$$

wobei

$$i = 1, 2, 3,$$

$$j = \begin{cases} i+1 & (i \neq 3) \\ 1 & (i = 3) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} i-1 & (i \neq 1) \\ 3 & (i = 1) \end{cases}$$

und  $\Delta$  den Flächeninhalt des Elements darstellen. Das Hookesche Gesetz lautet

$$\vec{\sigma} = [D] (\vec{\epsilon} - \vec{\epsilon}_0) + \vec{\sigma}_0 \quad (3)$$

mit  $[D]$  als Elastizitätsmatrix für den isotropen axialsymmetrischen Körper

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 \\ & 1 & \nu & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1-2\nu \\ & & & & 2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

Die Steifigkeitsmatrix des Finiten Elements wird durch numerische Integration ermittelt

$$[k]^e = \int_v [B]^T [D] [B] dv \\ = 2\pi [B(\bar{r}, \bar{z})]^T [D] [B(\bar{r}, \bar{z})] \bar{r} \Delta$$

mit

$$\bar{r} = (r_1 + r_2 + r_3)/3, \quad \bar{z} = (z_1 + z_2 + z_3)/3$$

als Koordinaten des Schwerpunktes des Elements.

Die Näherungslösung konvergiert mit zunehmender Elementunterteilung gegen die exakte Lösung [6]. Die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems ist singulär, da Starrkörperverschiebungen der ganzen Konstruktion in Richtung der Symmetrieachse möglich sind, solange dies nicht durch entsprechende Randbedingungen verhindert wird.

Die Lösung des Gleichungssystems

$$[K] \vec{f} = \vec{F}$$

das symmetrisch ist und Bandstruktur aufweist, erfolgt nach [7] und liefert die Knotenverschiebungswerte des Systems. Aus den Gln. (2) und (3) folgen die Spannungen und Verformungen in den Elementen.

Die Temperaturverformungen innerhalb jedes Elementes werden als konstant angenommen

$$\vec{\epsilon}^e = \{ \alpha \Theta^e, \alpha \Theta^e, \alpha \Theta^e, 0 \}^T$$

mit  $\alpha$  als linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten,

$$\Theta^e = T^e - T_0,$$

wobei  $T^e$  die mittlere Temperatur im Element (Temperatur im Schwerpunkt) und  $T_0$  die Umgebungstemperatur sind. Die Kräfte, die durch die Temperaturverformungen hervorgerufen werden, müssen durch numerische Integration ermittelt werden

$$\vec{F}^e = \int_v [B]^T [D] \vec{\epsilon}_0^e dv \\ = 2\pi [B(\bar{r}, \bar{z})]^T [D] \{ \alpha \Theta^e, \alpha \Theta^e, 0 \}^T \bar{r} \Delta.$$

Bei der Ermittlung des Spannungs-Verformungszustandes, der durch die Pressung hervorgerufen wird, wird vor-

ausgesetzt, daß die Pressung durch Relativverschiebungen der Punkte an den Kontaktflächen realisiert wird. Relativverschiebungen in z-Richtung und in Tangentialrichtung sind nicht vorhanden. Die Kontaktfläche ist zur z-Achse parallel. Für Elemente mit Knotenkoordinaten, die den Radius der Kontaktfläche nicht überschreiten, hat der Knotenverschiebungsvektor die Form der Gl. (1). Wenn das Element auf der anderen Seite der Kontaktfläche liegt, z. B. der erste Elementknoten, so gilt für den Knotenverschiebungsvektor

$$\vec{f}_1^e = \left\{ u_1 + \delta, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \right\}^T$$

mit  $\delta$  als Größe des radialen Übermaßes. Außerdem wirkt auf das Element eine zusätzliche Belastung

$$\vec{F}_1^e = -[k]^e \left\{ \delta, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}^T.$$

Die Berücksichtigung des Übermaßes in der Paarung Rad – Achse geschieht unter der Voraussetzung, daß die Achse als absolut starr angesehen wird. Damit wird die Aufgabe darauf zurückgeführt, daß Verschiebungen vorgegeben werden, die gleich dem radialen Übermaß an der Kontaktfläche Rad – Achse sind.

Der beschriebene Algorithmus wurde in einem FORTRAN-IV-Programm realisiert. Für die Berechnung wurde eine EDVA ES-1033 verwendet.

Die Berechnungen wurden für ein lineares Gesetz zwischen den Spannungen und Verformungen realisiert. Der Elastizitätsmodul betrug  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, die Querkontraktionszahl  $\nu = 0,33$ . Die Temperaturverteilungen während der Radmontage, dem Aufschrumpfen des Rades auf die Achse sowie während des Bremsens wurden experimentell ermittelt.

### 3.2. Spannungs-Deformationszustand des Rades während der Montage und der Aufschrumpfung auf die Achse

Für die Lösung der Aufgabe über den Spannungs-Deformationszustand des Rades während des Erwärmens für die Montage wurde ein Schnitt durch den Radkörper in 280 Elemente (175 Knoten) unterteilt, der Schnitt durch den Radreifen in 130 Elemente (85 Knoten). Die Länge eines Finiten Elements in Radiusrichtung betrug im Scheibenbereich des Radkörpers 0,007 m, im Radreifenbereich 0,01 m. Die Temperaturverteilung im Rad bei der Montage und der Aufschrumpfung auf die Achse wurde experimentell ermittelt.

Die Ergebnisse zur Berechnung des Spannungs-Deformationszustandes des Radreifens während der Aufschrumpfung auf den Radkörper sind in Tabelle 1 für verschie-

dene Zeitpunkte dargestellt. Dabei entspricht  $t = 5,2$  min dem Ende des Erwärmens des Radreifens,  $t = 6,2$  min dem Montagezeitpunkt und  $t = 11,6$  min dem Preßbeginn für Teile des Rades. Die Anfangstemperatur betrug  $T_0 = 20$  °C. In der Tabelle 1 sind die Werte für die Temperatur  $T$ , die Umfangsspannungen  $\sigma_\Theta$ , die radialen Verschiebungen  $u_i$  (innere Seite des Reifens) und  $u_a$  (äußere Seite des Reifens) für die Kontaktfläche mit dem Radkörper ( $R_1 = 0,238$  m) und die Rollfläche ( $R_2 = 0,3$  m) sowie die Maximalwerte der radialen Spannungen im Schnitt für verschiedene Zeitpunkte angegeben.

Die Spannungsänderung im Radkörper bei der Montage geschieht in zwei Etappen: die erste Etappe – vom Zeitpunkt des Einsetzens des kalten Radkörpers in den erwärmten Reifen bis zum Zeitpunkt ihrer Verbindung, die zweite Etappe – vom Zeitpunkt der Verbindung bis zum Zeitpunkt der Abkühlung auf die Umgebungstemperatur. Im Verlaufe der ersten Etappe entstehen Wärmespannungen im Radkörper. Diese werden durch die Wärmeübertragung vom erwärmten Reifen hervorgerufen.

Für die zweite Etappe ist das gleichzeitige Einwirken von drei, miteinander gekoppelten Faktoren typisch: die weitere Erwärmung der Seite des Radkörpers, die mit dem Reifen Kontakt hat, ist für das Niveau der Wärmespannungen bestimmend, die Änderungen der linearen Ausdehnungen des äußeren Durchmessers des Radkörpers, der zu einer Erhöhung des Pressdrucks in der Verbindung führt, und die Abkühlung des Reifens sowie die Verringerung seines Innendurchmessers, was ebenfalls zur Erhöhung der Pressung führt.

Bei der Berechnung des Spannungs-Deformationszustandes des Rades während des Aufschrumpfens auf die Achse wurden 2 Varianten der Vernetzung verwendet: Variante A (249 Knoten, 410 Elemente) und B (444 Knoten, 769 Elemente). Die Variante A (Bild 4 a) hat im Scheibenbereich des Rades 10 Finite Elemente in einer Reihe sowie mit einer Ausdehnung in Radiusrichtung von 0,007 m, die Variante B hat 16 Finite Elemente in einer Reihe bei einer Elementlänge von 0,004 m (im Bereich der erhöhten Spannungen). In [8] ist gezeigt, daß man befriedigende Ergebnisse für eine Vernetzung im Scheibenbereich des Rades von 8 bis 12 Elementen je Reihe erhalten kann.

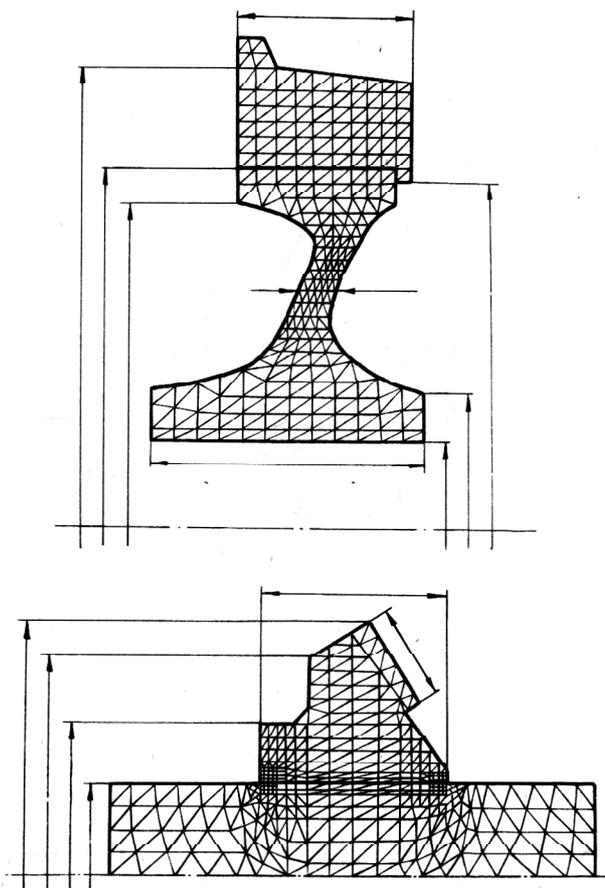
In Tabelle 2 sind die Werte für den Spannungs-Verformungszustand des Rades während der Montage und des Aufschrumpfens auf die Achse dargestellt: Umfangsspannungen  $\sigma_\Theta$  und Radialspannungen  $\sigma_r$  in dem am stärksten beanspruchten Bereich des Radkörpers (am Innenradius  $R_i = 0,18$  m und am Außenradius  $R_a =$

**Tabelle 1**  
Spannungs-Verformungszustand im Radreifen während des Erwärmens und der Montage auf den Radkörper

t, min	$R_1 = 0,238$ m				$R_2 = 0,3$ m		$\sigma_r$ , MPa
	T, °C	$\sigma_\Theta$ , MPa	$u_a \cdot 10^3$ , m	$u_i \cdot 10^3$ , m	T, °C	$\sigma_\Theta$ , MPa	
5,2	136	250	0,44	0,59	300	- 150	25
6,2	196	100	0,53	0,6	280	- 100	15
11,6	199	50	0,49	0,52	235	- 30	5

**Tabelle 2**  
Spannungs-Verformungszustand im Rad während des Erwärms und der Montage auf die Achse

t, min	$R_o = 0,057 \text{ m}$		$R_a = 0,14 \text{ m}$		$R_i = 0,18 \text{ m}$		$T, ^\circ\text{C}$		
	$u_1 \cdot 10^3, \text{ m}$	$u_2 \cdot 10^3, \text{ m}$	$T, ^\circ\text{C}$	$\sigma_r, \text{ MPa}$	$\sigma_\Theta, \text{ MPa}$	$\sigma_r, \text{ MPa}$	$\sigma_\Theta, \text{ MPa}$	$R_1 = 0,238 \text{ m}$	$R_2 = 0,3 \text{ m}$
11,6	-0,004	0,017	20	200	750	180	450	175	235
16,2	-0,008	0,037	40	290	90	320	-20	170	190
$t_1$	-0,033	0,006	20	-280	-280	-440	-320	20	20
$t_1 + 4,5$	0,105	0,205	300	-400	-400	-850	-350	74	54
$t_2$	0,105	0,105	20	-240	-240	-600	-280	20	20



**Bild 4**  
Finite-Elemente-Netz  
a) Rad  
b) Zahnrad mit anschließender Achse

0,14 m), die maximalen und minimalen Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  in der Passungsöffnung ( $R_o = 0,057 \text{ m}$ ), der Temperatur im Radkörper ( $R_o = 0,057 \text{ m}$ ,  $R_1 = 0,238 \text{ m}$ ) und im Reifen ( $R_2 = 0,3 \text{ m}$ ). Die Ergebnisse entsprechen den Zeitpunkten  $t = 11,6 \text{ min}$  (Preßbeginn),  $t = 16,2 \text{ min}$  (10 min nach Montagebeginn),  $t = t_1$  (das Rad ist abgekühlt, wobei  $t_1$  dem Spannungs-Verformungszustand des abgekühlten montierten Rad entspricht). Die Spannungen im abgekühlten Rad werden durch ein radiales Übermaß  $\delta_1 = 0,38 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  in der Paarung Reifen – Radkörper hervorgerufen. Die zulässigen Übermaßwerte betragen für diese Verbindung  $(0,2 \text{ bis } 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Die Montage des Rades auf die Achse erfolgt nach der Erwärmung (4,5 min) des Rades im Bereich der Nabe. In der Tabelle 2 sind die Werte des Spannungs-Verformungszustandes des Rades vor dem Erwärmungsbeginn ( $t = t_1$ ), zum Zeitpunkt des Erwärmungsendes ( $t = t_1 + 4,5 \text{ min}$ ) und nach dem Abkühlen des auf die Achse aufgeschumpften Rades ( $t = t_2$ ) angegeben. Das radiale Übermaß in der Paarung Rad – Achse beträgt  $0,95 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

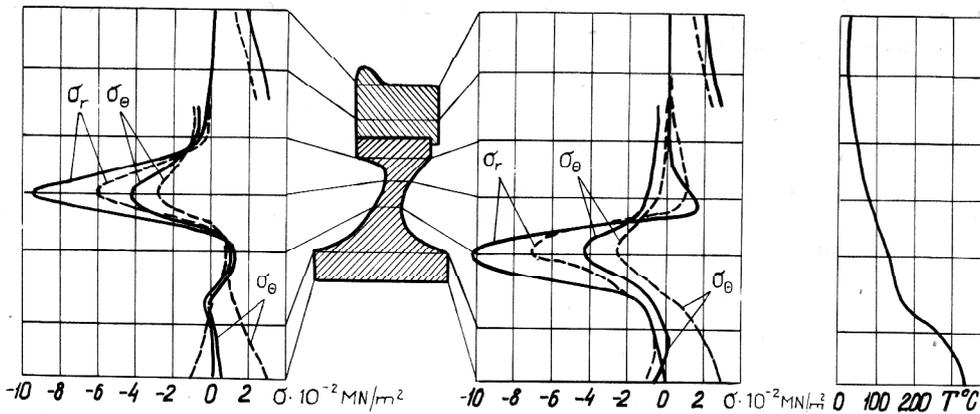
Auf Bild 5 sind mit einer Strichlinie die radialen Spannungen  $\sigma_r$  und die Umfangsspannungen  $\sigma_\Theta$  an der inneren und äußeren Radseite zum Zeitpunkt des Erwärmungsendes vor dem Aufsetzen auf die Achse dargestellt. Außerdem ist die Temperaturverteilung über den Radius  $T$  zum Zeitpunkt des Erwärmungsendes angegeben. Die Volllinien entsprechen den Normalspannungen im Rad, die durch die Übermaßpassung in den Paarungen Reifen – Radkörper und Rad – Achse hervorgerufen wurden. Die Ergebnisse entsprechen der Vernetzungsvariante A.

Die Berechnungsergebnisse zeigen, daß die technologische Erwärmung sowie das Aufschumpfen tatsächlich zu plastischen Deformationen führen würde.

### 3.3. Wärmespannungen im Rad beim Bremsen

Die Berechnung von Wärmespannungen im Rad, die durch die Erwärmung der Rollfläche beim Bremsen hervorgerufen werden, wird unter Verwendung der gleichen Vernetzungsvarianten wie im vorhergehenden Fall durchgeführt. Das Rad wird dabei als monolithisch angesehen. Auf Bild 2 sind die radialen Wärmespannungen  $\sigma_r$  und die Umfangswärmespannungen  $\sigma_\Theta$  an der inneren und äußeren Radseite dargestellt. Der Spannungs-Verformungszustand des Rades ist Summe aus Wärme- und Montagespannungen. Letztere wurden durch das Aufschumpfen des Rades auf die Achse und des Radreifens auf den Radkörper hervorgerufen.

Die größten Zugspannungen in radialer und Umfangsrichtung infolge des Einwirkens von Temperaturfeldern entstehen an der inneren Radseite in der Umgebung der Radnabe und an der Außenseite in der Umgebung der Radfelge. Aufgrund der Unsymmetrie des Radprofils kommt es zur Biegung im Bereich des Scheibenteils. Diese ruft an der Felge Radialverschiebungen  $v_i = 0,51 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $v_a = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  und Umfangsverschiebungen  $v_i = -0,01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $v_a = 0,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  hervor (der erste Wert entspricht der Felgenaußenseite, der zweite Wert der Felgeninnenseite). Die Wärmespannungen

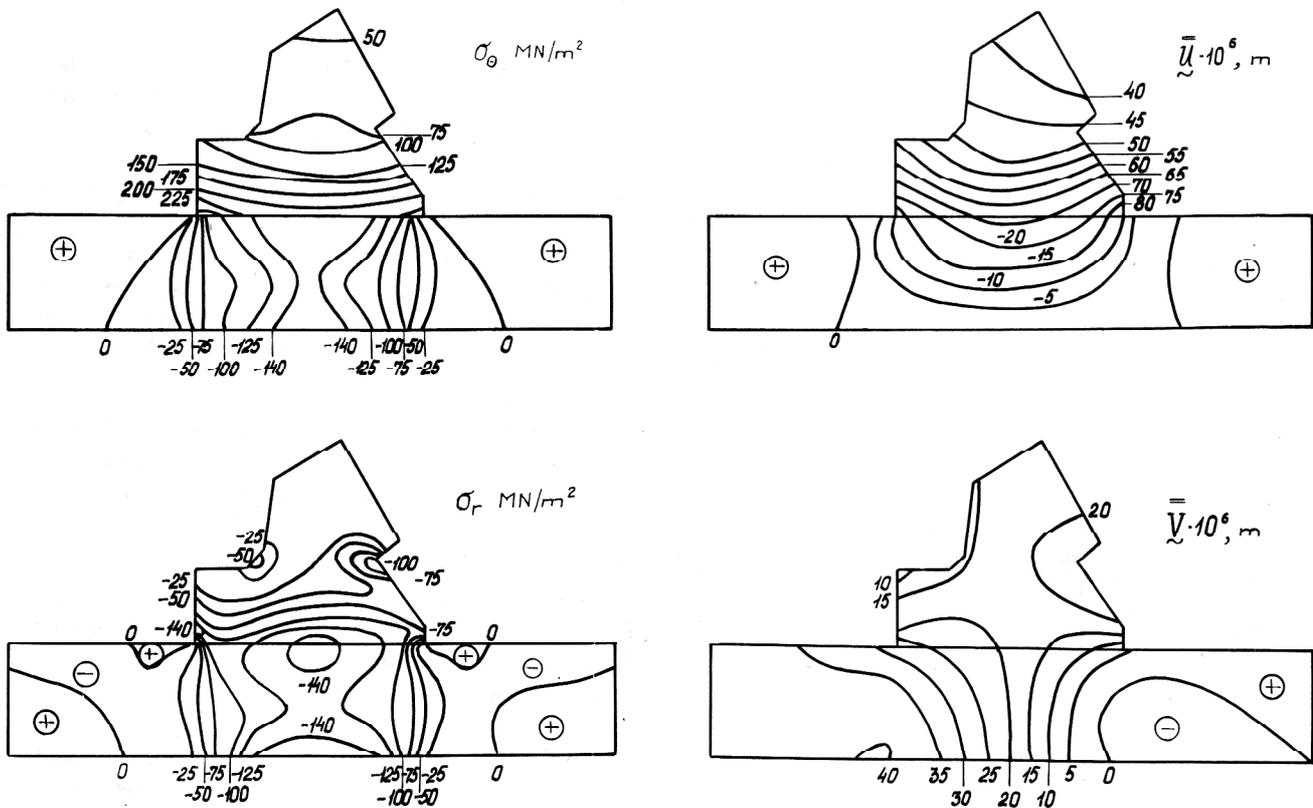


**Bild 5**

Spannungen im Diesellokomotivrad

--- zum Zeitpunkt des Erwärmungsendes

— in den Preßpassungen Radreifen – Radkörper und Rad – Achse



**Bild 6**

Montagespannungen und -verschiebungen in dem konischen Zahnrad und der sich anschließenden Achse

gen führen zu einer Schwächung der Paßverbindungen ( $0,3 \cdot 10^{-3}$  m für die Paarung Reifen – Radkörper und  $0,15 - 0,4 \cdot 10^{-4}$  m für die Paarung Rad – Achse). Die Ergebnisse zeigen, daß die Voraussetzung, daß das Rad monolithisch ist, für das angenommene Berechnungsschema zulässig ist, da das Übermaß in den Passungsstellen beim Erwärmen nicht vollständig verschwindet. Jedoch ist zu beachten, daß die Paßverbindung schwächer wird (sowohl für die Paarung Rad – Achse als auch für die Paarung Radkörper – Radreifen). Die großen

Wärmespannungen führen offensichtlich nicht zu plastischen Verformungen, da sich Wärmezugspannungen mit Montagedruckspannungen überlagern.

#### 3.4. Montagespannungen im konischen Zahnrad sowie in den sich anschließenden Achsabschnitten

Zur Berechnung des Zahnrad wird ein endlicher Abschnitt der Achse betrachtet, wobei an der Symmetrielinie der Achse nur Verschiebungen in Achsenlängsrichtung zugelassen werden. Um den Einfluß der Zähne zu berücksichtigen, wird das Zahnrad durch einen volumenäquivalenten Rotationskörper ersetzt. Berechnungen

zeigten, daß andere Möglichkeiten der Berücksichtigung der Zähne (Ersetzen durch einen Vollkörper oder vollständiges Ignorieren) zu keinen qualitativen Veränderungen des Spannungs-Verformungszustandes des Zahnrads und des sich anschließenden Abschnitts der Achse führen. In der betrachteten Variante eines Schnittes durch Zahnrad und den sich anschließende Achsabschnitt (Bild 4b) wurden diese in 596 Elemente (344 Knoten) eingeteilt, wobei die Ausdehnungen eines Finiten Elements im Bereich der maximalen Spannungen 0,002 m betragen.

Die Berechnung des Spannungs-Verformungszustandes des Zahnrads und des sich anschließenden Achsabschnittes erfolgte für den Fall, daß das Zahnrad durch die Prefpassung auf die Achse aufgesetzt wurde. Dabei wurde ein maximal zulässiger Wert des radialen Übermaßes von  $0,95 \cdot 10^{-4}$  m angenommen. Auf Bild 6 sind die Verteilungen der Umfangsspannungen  $\sigma_{\Theta}$  und der Radialspannungen  $\sigma_r$ , der radialen Verschiebungen  $u$  und der Umfangsverschiebungen  $v$  für einen Schnitt durch Zahnrad und anschließenden Achsenabschnitt dargestellt.

Aufgrund der Berechnungsergebnisse zu den Montage-spannungen in der Paarung Achse – Zahnrad läßt sich folgender Schluß ziehen: Plastische Verformungen treten bei der Montage nicht auf. Jedoch muß zur vollständigen Charakterisierung des Spannungs-Verformungszustandes die Belastung im Betriebszustand berücksichtigt werden.

#### 4. Optimierung der Erwärmung von Scheiben mit veränderlicher Dicke

Die Methode der Montage durch Erwärmung von Eisenbahnraden gestattet auch die Formulierung einer Optimierungsaufgabe für die Erwärmung von Rädern zum Aufschrupfen auf die Achse bei vorgeschriebenem Übermaß. In Abhängigkeit vom Heizgerät kann sich das Temperaturfeld in Richtung des Radius des erwärmten Rades in bestimmten Grenzen ändern. Daher ist es von Interesse, eine solche Temperaturverteilung zu ermitteln, die ein vorgegebenes Übermaß garantiert und die Wärmemenge minimisiert.

##### 4.1. Formulierung der Optimierungsaufgabe

Als vereinfachtes Modell eines Rades mit komplizierter Geometrie wird eine Scheibe mit veränderlicher Dicke und zentraler Bohrung verwendet. Ein verbessertes Modell kann z. B. mit der FEM gefunden werden, jedoch wird die Lösung der Optimierungsaufgabe dann wesentlich komplizierter. Außerdem kann man für diesen Fall keine analytischen Lösungen bekommen, die die qualitativen Besonderheiten des Verhaltens der optimalen Lösungen widerspiegeln.

Es wird der thermoelastische Zustand einer Scheibe mit veränderlicher Dicke unter den Bedingungen einer axial-symmetrischen Erwärmung betrachtet und das Temperaturänderungsgesetz über den Radius der erwärmten Scheibe ermittelt. Letzteres soll eine vorgegebene Verschiebung des inneren Radius der Scheibe sichern und die auf die Scheibe wirkende Wärmemenge minimieren. Dabei sollen die Normalspannungen begrenzt bleiben. Die Scheibe wird als homogen vorausgesetzt und die Materialparameter sollen nicht temperaturabhängig sein.

Die Dgl. für eine Scheibe mit veränderlicher Dicke  $h(r)$  lautet

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r h) + (\sigma_r - \sigma_{\Theta}) \frac{h}{r} = 0. \quad (4)$$

Hier sind  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_{\Theta}(r)$  Radial- und Umfangsspannungen,  $r$  der aktuelle Radius. Das Hookesche Gesetz hat folgende Form

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_{\Theta}) + \alpha T(r) \\ \epsilon_{\Theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\Theta} - \nu \sigma_r) + \alpha T(r) \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_{\Theta} = \frac{u}{r}$$

als relative Verformungen in radialer und Umfangsrichtung,  $u(r)$  als Radialverschiebung,  $T(r)$  als Gesetz der Änderungen des Temperaturfeldes,  $E$ ,  $\nu$  als Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl,  $\alpha$  als linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten. Unter Verwendung der Abkürzung

$$Q = \sigma_r h r$$

geht das Ausgangsdifferentialgleichungssystem in die Normalform über

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dr} &= a_1 Q + a_2 h u + a_3 h, \\ \frac{du}{dr} &= b_1 \frac{Q}{h} + b_2 u + b_3 \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (5)$$

$$a_1 = \frac{\nu}{r}, \quad a_2 = \frac{E}{r}, \quad a_3 = -E \alpha T,$$

$$b_1 = \frac{1 - \nu^2}{r E}, \quad b_2 = -\frac{\nu}{r}, \quad b_3 = (1 + \nu) \alpha T.$$

Bei der Aufstellung von (5) wurde eine konstante Temperatur über die Scheibendicke vorausgesetzt. Die Scheibenränder sind frei, daher lauten die Randbedingungen für das System (5)

$$Q(r_1) = Q(r_2) = 0, \quad (6)$$

wobei  $r_1$ ,  $r_2$  Innen- und Außenradius der Scheibe sind. Das System (5) und die Randbedingungen (6) bilden die Grundlage für die Wärmespannungsanalyse einer Scheibe veränderlicher Dicke.

Für die Erwärmung der Scheibe bei Nichtberücksichtigung der Verluste beim Wärmeaustausch mit der Umgebung wird folgende Wärmemenge verbraucht

$$W = 2 \pi \rho c \int_{r_1}^{r_2} T(r) h(r) r dr. \quad (7)$$

$\rho$ ,  $c$  stellen Dichte und spezifische Wärmekapazität des Scheibenmaterials dar. Die Minimierung der Wärmemenge erfolgt über die Variation des Temperaturverteilungsgesetzes  $T(r)$ , welches folgenden Einschränkungen unterliegt

$$T_1(r) \leq T(r) \leq T_2(r). \quad (8)$$

$T_1(r)$ ,  $T_2(r)$  sind vorgegebene Funktionen. Sie werden entsprechend den konkreten Erwärmungsbedingungen, den Materialeigenschaften und dem Heizgerätetyp gewählt.

Die Einschränkungen für den Spannungszustand in der Scheibe werden in der Form der Einschränkungen für die Spannungsintensität  $\sigma_i$

$$\sigma_i^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\Theta^2 - \sigma_r \sigma_\Theta \leq \sigma_0^2 \quad (9)$$

formuliert.  $\sigma_0$  ist der Grenzwert der Spannungsintensität. Die Bedingung (9) gilt für Materialien, aus denen Eisenbahnräder hergestellt werden.

Es wird gefordert, daß die Verschiebung für den Innenradius der Scheibe gleich einem vorgegebenen Wert  $\delta$  sein soll:

$$u(r_1) - \delta = 0. \quad (10)$$

Der Wert von  $\delta$  wird aus technologischen Überlegungen erhalten.

Die Optimierungsaufgabe für die Erwärmung der Scheibe besteht in der Ermittlung des Temperaturverteilungsgesetzes  $T(r)$ , wobei die Wärmemenge (7) bei der Erfüllung der Randbedingungen (6) sowie den Festigkeitseinschränkungen (9) und den technologischen Bedingungen (10) minimiert werden soll.

Die Charakteristika des Spannungs-Verformungszustandes werden durch die Lösung der Aufgabe (5), (6) definiert.

## 4.2. Analytische Lösungen

Im Rahmen der hier beschriebenen Vorgehensweise konnten qualitative Aussagen zur Optimierungsaufgabe für Scheibenprofile, für die analytische Lösungen bekannt sind, erhalten werden.

### 4.2.1. Scheibe konstanter Dicke

Für diese Scheibe ergibt die Integration des Systems (5) folgende Lösung

$$u(r) = (1 + \nu) \frac{\alpha}{r} \int_{r_1}^{r_2} T(r) r dr + c_1 r + \frac{c_2}{r}. \quad (11)$$

Für die Spannungen erhält man bei Berücksichtigung von (11)

$$\sigma_r = -E\alpha \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^{r_2} T r dr + E \left( \frac{c_1}{1-\nu} - \frac{c_2}{1+\nu} \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\sigma_\Theta = E\alpha \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^{r_2} T r dr - E\alpha T + E \left( \frac{c_1}{1-\nu} + \frac{c_2}{1+\nu} \frac{1}{r^2} \right). \quad (12)$$

Die Integrationskonstanten  $c_1, c_2$  werden aus den Randbedingungen (6) bestimmt. Das Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke in (11) führt bei Verwendung der Bedingung (10) auf

$$\delta = \frac{2\alpha r_1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} T r dr. \quad (13)$$

Unter Beachtung von (7) läßt sich (13) wie folgt aufschreiben

$$\delta = \frac{r_1 \alpha}{\pi \rho c h (r_2^2 - r_1^2)} W. \quad (14)$$

Folglich hängt die Verschiebung am Innenradius der Scheibe nicht von der Form des Temperaturfeldes ab, sondern ist der Wärmemenge, die auf die Scheibe beim

Erwärmen einwirkt, proportional. Daraus kann man den Schluß ziehen, daß eine Optimierung der Erwärmung von Scheiben konstanter Dicke nicht möglich ist.

### 4.2.2. Scheiben mit hyperbolischem Profil $h(r) = m/r^n$

$m$  und  $n$  sind Konstanten. Dann erhält man für diesen Sonderfall statt (13)

$$\delta = \frac{\alpha r_1}{R(c_1, c_2, \nu, r_1, r_2)} \int_{r_1}^{r_2} [(c_2 + \nu) (c_1 + 1) \frac{r_2^{c_1-1}}{r_1^{c_2}} - (c_1 + \nu)(c_2 + 1) \frac{r_2^{c_2-1}}{r_1^{c_1}}] T dr, \quad (15)$$

wobei

$$c_1, c_2 = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1 + \nu n},$$

$R$  eine von den Werten  $c_1, c_2, \nu, r_1, r_2$  abhängige Größe ist.

Das Funktional (7) lautet

$$W = 2\pi \rho c m \int_{r_1}^{r_2} T r^{1-n} dr. \quad (16)$$

Die Integrale in (15) und (16) können nur zusammenfallen, wenn  $c_1 = 1$  und  $c_2 = -1$  sind, d. h. die Scheibe eine konstante Dicke aufweist. In allen anderen Fällen wird die Abhängigkeit zwischen  $\delta$  und  $W$  durch  $T(r)$  definiert. Somit verliert die Optimierung der Erwärmung ihren Sinn.

### 4.2.3. Scheibe mit abschnittsweise-konstantem Profil

Bei der numerischen Berechnung von Scheiben veränderlicher Dicke werden diese meistens durch eine abschnittsweise-konstante Dicke ersetzt. Für diesen Fall soll die Verschiebung am Innenradius  $u_{r_1}$  in Abhängigkeit von  $T(r)$  ermittelt werden.

Bei Verwendung der Lösung (11) lassen sich  $\epsilon_\Theta = u/r$  und die spezifische Kraft

$$N_r^* = \sigma_r h / E h_1 \quad (h_1 = h(r_1))$$

auf dem  $i$ -ten Abschnitt wie folgt angeben

$$\epsilon_\Theta = (1 + \nu) \alpha \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr + c_{1i} + \frac{c_{2i}}{r^2}, \quad (17)$$

$$N_r^* = -\frac{h_i}{h_1} \alpha \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr + \frac{h_i}{h_1} \left( \frac{c_{1i}}{1-\nu} - \frac{c_{2i}}{(1+\nu)r^2} \right).$$

Die Konstanten  $c_{1i}$  und  $c_{2i}$  werden durch die Anfangswerte  $\epsilon_\Theta$  und  $N_r^*$  auf dem  $i$ -ten Abschnitt ermittelt. Die Bedingung (10) wird als Anfangsbedingung  $u(r_1)$  aufgefaßt. Dann gilt

$$r = r_1, \epsilon_\Theta(r_1) = \frac{\delta}{r_1}, \quad N_r^* = 0. \quad (18)$$

Unter Verwendung von (17), (18) und für den Fall, daß die Konstanten  $c_{1i}$  und  $c_{2i}$  ermittelt wurden, kann man vom ersten zum zweiten Abschnitt übergehen. Für eine Scheibe, die aus zwei Abschnitten mit den Dicken  $h_1$  und  $h_2$  besteht, gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{r_3^2} \int_{r_2}^{r_3} r T dr + \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1}{r_3^2} (1 + \nu + (1 - \nu) \frac{h_1}{h_2}) \right. \\ & \left. - \frac{1 + \nu}{r_2^2} (1 - \frac{h_1}{h_2}) \right] \\ & \int_{r_1}^{r_2} T r dr = \quad (19) \\ & \frac{\delta}{4r_1} \left[ 1 - \nu - \frac{r_1^2}{r_2^2} (1 + \nu) + (1 + \nu - (1 - \nu) \frac{r_1^2}{r_3^2}) \frac{h_1}{h_2} \right. \\ & \left. + (1 - \frac{h_1}{h_2}) \left( (1 + \nu) \frac{r_1^2}{r_2^2} - (1 - \nu) \frac{r_2^2}{r_3^2} \right) \right], \end{aligned}$$

wobei  $r_1$ ,  $r_3$  Innen- bzw. Außenradius und  $r_2$  der Radius der Übergangsstelle sind. Für  $h_1 = h_2$  geht (19) in (13) über. Für  $h_1 \neq h_2$  gibt es keine explizite Abhängigkeit zwischen  $\delta$  und  $W$ , d. h. die Optimierungsaufgabe verliert nicht ihren Sinn.

Die Analyse von (19) zeigt, daß für die Verschiebungen am Innenradius die Erwärmung des Abschnittes mit der größeren Dicke entscheidend ist.

#### 4.3. Notwendige Optimalitätsbedingungen für Scheiben veränderlicher Dicke $h = h(r)$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die oben formulierte Optimierungsaufgabe werden auf der Grundlage des Pontrjaginschen Maximum-Prinzips [9] ermittelt. Folgende Straffunktion für die Festigkeitsbeschränkung (6) wird eingeführt

$$k_1(r) = \begin{cases} 1, & \sigma_i \leq \sigma_o \\ 0, & \sigma_i > \sigma_o \end{cases}, \quad k_2(r) = \begin{cases} 1, & k_1 = 0 \\ 0, & k_1 = 1 \end{cases}. \quad (20)$$

Die Einschränkung (10) wird über einen Lagrange-Faktor  $\lambda$  erfaßt. Das Qualitätsfunktional für die Optimierungsaufgabe lautet dann

$$\begin{aligned} I = & \int_{r_1}^{r_2} [k_1(r) \cdot 2\pi\rho c h(r) T(r) r \\ & + k_2(r) (\sigma_i^2 - \sigma_o^2)] dr + \lambda [u(r_1) - \delta]. \quad (21) \end{aligned}$$

Entsprechend dem Maximum-Prinzip [9] wird das Hamiltonfunktional und das entsprechende konjugierte Differentialgleichungssystem gebildet

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{dr} &= \frac{\nu}{r} \bar{Q} + \frac{Eh}{r} \bar{u} - k_2(r) \\ & \left[ \frac{2E^2}{r^2} u - \frac{(1-2\nu)QE}{r^2 h} - \frac{2E^2 \alpha T}{r} \right], \\ \frac{d\bar{u}}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{Ehr} \bar{Q} - \frac{\nu \bar{u}}{r} + k_2(r) \quad (22) \\ & \left[ \frac{1-2\nu}{r^2 h} Eu - \frac{2(1-\nu+\nu^2)}{r^2 h^2} Q - \frac{(1-2\nu)}{rh} E\alpha T \right]. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen für (22) erhält man aus den Transversalitätsbedingungen. Sie lassen sich folgendermaßen aufschreiben

$$\bar{Q}(r_1) = -\lambda, \quad \bar{Q}(r_2) = 0. \quad (23)$$

Das System (22) mit den Randbedingungen (23) bildet die konjugierte Randwertaufgabe. Das optimale Temperaturfeld  $T(r)$  wird aus der Menge der Ausgangsaufgabe und der konjugierten Aufgabe ermittelt, wobei diese durch die Maximum-Beziehung für das Hamiltonfunktional  $H(T)$  gekoppelt sind

$$\begin{aligned} H(T) &= k_2(r) \\ & \left[ \frac{2u}{r} E^2 \alpha T - E^2 \alpha^2 T^2 - (1-2\nu) \frac{Q}{rh} E \alpha T \right] \\ & - [\bar{u} E \alpha h + \bar{Q} (1 + \nu) \alpha + 2k_1(r) \pi \rho c h r] T. \quad (24) \end{aligned}$$

In (24) wurden die Glieder, die von  $T$  nicht explizit abhängen, weggelassen.

Die Optimierungsaufgabe wird in der formulierten Form numerisch gelöst, wobei iterative Näherungen für die variierte Funktion verwendet werden [10].

Qualitativ wurden die notwendigen Optimalitätsbedingungen in [11] untersucht. Sie stimmen gut mit den analytischen Lösungen überein und verbessern die Lösungsbeschränkungen für diese Aufgabe.

#### 4.4. Ein numerisches Beispiel zu den notwendigen Optimalitätsbedingungen

Es wird die Optimierung der Erwärmung einer Scheibe betrachtet. Die Scheibe ist ein vereinfachtes Modell für ein Eisenbahnrad (Bild 7). Die Berechnung erfolgte bei verschiedenen  $\sigma_o$ -Werten. Die optimalen Temperaturfelder (Kurve 2, 3 auf Bild 7) wurden mit einem realen Temperaturfeld (Kurve 1 auf Bild 7), welches für ein Rad in einem induktiven Heizgerät erhalten wurde, verglichen.

Die numerischen Ergebnisse sind in der Tabelle 3 und auf Bild 7 dargestellt. Bei  $\sigma_o = \infty$  (Optimierungsaufgabe ohne Einschränkungen für die Spannungen) konnte das optimale Feld relativ schnell ermittelt werden, da die Besonderheiten der Optimierung im Algorithmus be-

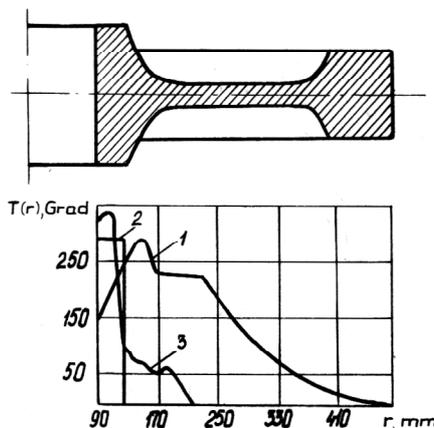


Bild 7

Temperaturfelder des Eisenbahnradmodells

- 1 - für den Fall eines realen induktiven Heizgeräts
- 2 - optimales Temperaturfeld (ohne Beschränkungen der Spannungen)
- 3 - optimales Temperaturfeld (bei Beschränkung der Spannung  $\sigma_o = 320 \text{ MN/m}^2$ )

Tabelle 3

Lösung der Optimierungsaufgabe für das Modell eines Eisenbahnrades

Temperaturfeld	Wärmemenge, die auf das Modell wirkt W, kJ	$T_{\max}$ , °C	$\sigma_{i \max}$ , MN/m <sup>2</sup>
reales, experimentell ermitteltes (für ein induktives Heizgerät)	11160	280	309
optimales (für $\sigma_0 = \infty$ )	6890	281	431
optimales (bei Begrenzung $\sigma_0 = 320 \text{ MN/m}^2$ )	7110	342	320

rücksichtigt wurden. Eine Abschätzung zeigte, daß der Umfang der Optimierungsaufgabe das 10 bis 12fache der Analyseaufgabe betrug. Das Einführen von Einschränkungen für die Spannungen  $\sigma_0 = \sigma_T$  ( $\sigma_T$  – Fließgrenze) erhöht die Lösungsdauer weiter und der Umfang der Optimierungsaufgabe beträgt das 60 bis 100fache der Analyseaufgabe (in Abhängigkeit von der Anfangsnäherung für das Temperaturfeld). Für die Berechnung wurde  $T_1(r) = 0$ ,  $T_2(r) = 350$  °C,  $\sigma_0 = 320 \text{ MN/m}^2$  angenommen.

Die Analyse der numerischen Resultate zeigte, daß das optimale Temperaturfeld (bei  $\sigma_0 = 320 \text{ MN/m}^2$ ) einen Wärmegewinn von 36,3 % im Vergleich zum realen Temperaturfeld gibt. Das Maximum des Temperaturfeldes ist in Richtung des dicksten Scheibenabschnitts verschoben. Diese Ergebnisse werden durch die qualitativen Untersuchungen der notwendigen Optimalitätsbedingungen bestätigt.

Bei der Lösung der Optimierungsaufgabe ohne Festigkeitsbeschränkungen beträgt der Wärmegewinn 38,2 % im Vergleich zum realen Temperaturfeld. Dabei überschreitet die Spannungsintensität nicht den Wert von  $430 \text{ MN/m}^2$ .

## LITERATUR

- [ 1 ] Гмызин А. А., Манохин В. А., Гудков А. В., Дмитриев Е. С. Узкоколейные тепловозы ТУ 6 и ТУ 7. Транспорт, 1976, 208 с.
- [ 2 ] Зедгенидзе Г. П. Измерение температуры вращающихся деталей машин, Машгиз, Москва, 1962, 271 с.
- [ 3 ] Андреев Г. Я. Тепловая сборка колесных пар, Изд. Харьковского университета, Харьков, 1965, 227 с.
- [ 4 ] Клокова Н. П., Лукашик В. Ф., Воробьева Л. М. и др. Тезодатчики для экспериментальных исследований, Москва, Машиностроение, 1972, 151 с.
- [ 5 ] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике, Москва, Мир, 1975, 541 с.
- [ 6 ] Айронс Б. М. Замечание к статье „Матрицы жесткости элементов в форме сектора“, Ракетная техника и космонавтика, 8 (1970), № 3, с. 270 – 271
- [ 7 ] Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики, Москва, Физматгиз, 1963, 660 с.
- [ 8 ] Nishioko, K., Morita, Y. The Strength of Railroad wheels, Bull. JSME, 1971, vol. 14, No. 67, p. 11 – 19.
- [ 9 ] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрилидзе Р. В., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов, Москва, Наука, 1969, 384 с.
- [ 10 ] Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам, Киев, Наукова думка, 1975, 294 с.
- [ 11 ] Андреев А. Г., Гарев О. Л., Копылов Д. В. Определение оптимального температурного поля при нагреве дисков переменной толщины, Динамика и прочность машин, 1984, вып. 396 с. 43 – 49.

Anschrift der Verfasser:

A. G. Andreev  
 O. L. Garev  
 V. A. Manochin  
 A. V. Scepkin  
 Lehrstuhl für Dynamik und Festigkeit von Maschinen  
 Charkover Polytechnisches Institut „V. I. Lenin“  
 310 002 Charkov UdSSR  
 ul. Frunse 21