

# Eine programmtechnische Realisierung von Matrizenalgorithmen der Methode der Finiten Elemente für Aufgaben der Festkörpermechanik

Burman, Z. I., Zarchin, B. Ja.

Seitdem in der Baumechanik und in der Festkörpermechanik digitale EDVA angewendet werden, sind „Matrizenberechnungsverfahren“ und „Methode der Finiten Elemente (FEM)“ untrennbar mit ihrer rechen-technischen Realisierung verbunden. Vermutlich gehört die in [12] in der Übersetzung erschienene Arbeit von P. M. Hunt „Die Programmierung von Berechnungsverfahren der Baumechanik in der Matrizenformulierung von Agyris unter Beachtung der Anwendung von digitalen EDVA“ (1954) zu den ersten in dieser Richtung. Nachfolgend entwickelte sich die FEM zur Hauptmethode bei der Analyse und Projektierung unterschiedlicher Ingenieurkonstruktionen. Parallel dazu wurden die Programmelemente zur numerischen Realisierung der FEM, die Matrizenalgorithmen, entwickelt und vervollkommen [2] bis [4], [9], [11], [13], [17] bis [22].

In der Arbeit wird in kurzer Form ein Programmsystem für Matrizenverfahren (PSMV) beschrieben. Dieses stellt ein universelles Verfahren zur Realisierung von Matrizenalgorithmen für Aufgaben der linearen Algebra und Baumechanik dar. Damit wurde eine allgemeine Grundlage für die Schaffung von Anwenderprogrammen zur Lösung verschiedenster Aufgaben der Festkörpermechanik mit Hilfe der FEM gelegt.

## 1. Grundkonzeption für die Erarbeitung von anwenderbezogenen Programmpaketen für die FEM

Die Autoren gehen davon aus, daß ein modernes Programmsystem zur FEM-Festigkeitsanalyse von Maschinen und Konstruktionen folgende Bestandteile haben sollte: FE-Verschiebungsgrößenmethode, FE-Kraftgrößenmethode, gemischte FE-Methode und hybride Methode, wobei die drei zuerst genannten Methoden auch durch Superelementtechnik realisiert werden sollten.

Das Vorhandensein verschiedener FEM-Varianten gestattet eine unterschiedliche Berechnung einer Konstruktion, wodurch eine Verbesserung des Ergebnisses erreicht werden kann. Die Zweckmäßigkeit dieser Vorgehensweise läßt sich damit begründen, daß z. B. der Spannungszustand genauer mit der FE-Kraftgrößenmethode als mit der Verschiebungsgrößenmethode berechnet werden kann [9], [13].

Diese Möglichkeiten können jedoch in Programmsystemen nur erreicht werden, wenn bestimmte Forderungen erfüllt sind: Bei Matrizenoperationen erfolgt der Datentransfer zum Externspeicher automatisch, die Operationen der linearen Algebra für Matrizen mit beliebigen Dimensionen und beliebiger Struktur werden effektiv rea-

lisiert, es existieren eine dynamische Verteilung des Speicherplatzes, ein maximaler Benutzerkomfort und eine gute Überschaubarkeit des Programmpakets. Zuverlässigkeit, Erweiterungsfähigkeit, Modifizierungsfähigkeit, Mobilität und hohe Operationsgeschwindigkeit sind gesichert.

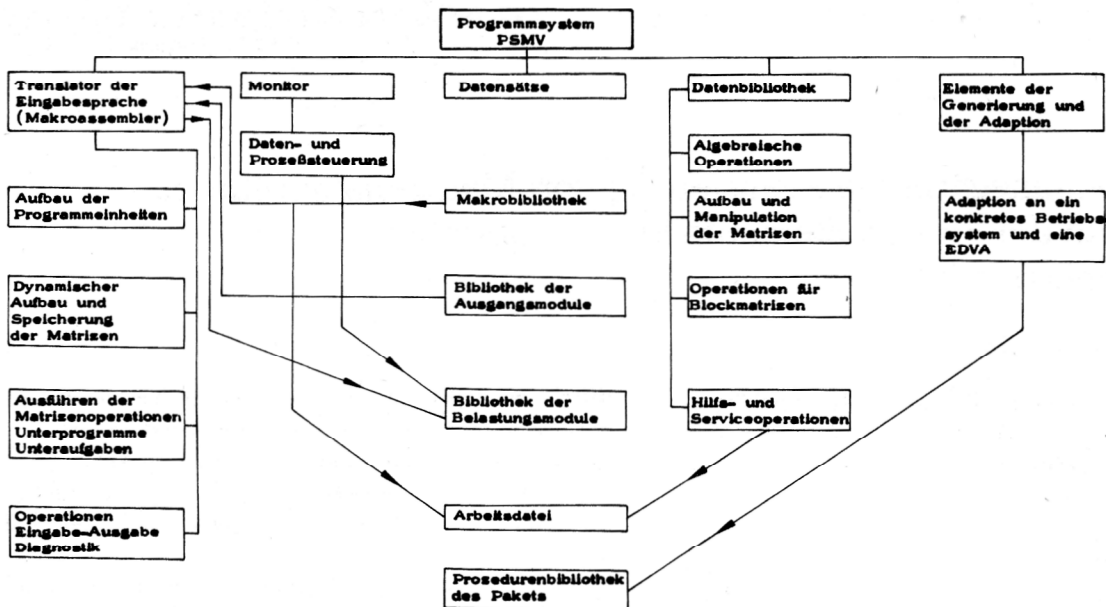
Das hier beschriebene Programmsystem ist aufgrund seines Aufbaus für alle Rechner der ESER-Serie geeignet.

## 2. Das Programmsystem Matrizenverfahren (PSMV)

Das PSMV enthält folgende Komponenten: Monitor (Steuerprogramm), Translator, Modulbibliothek, Elemente zur Generierung und der Adaption und die Datensätze (Bild 1). Das PSMV basiert auf den Betriebssystemen OS/ES bzw. DOS/ES. Das Steuerprogramm arbeitet unter unmittelbarer Kontrolle des Betriebssystems und sichert die Steuerung des Rechenprozesses innerhalb des Systems. Der Translator verarbeitet den Eingabemodul und baut ein rechnerinternes Modell für die Prozedur zur Aufgabenlösung auf. Als Translator wird im PSMV der Makroassambler des ESER-Rechners verwendet. Die Systembibliothek enthält Module, die die verschiedensten Aufgaben der linearen Algebra für Matrizen mit unterschiedlicher Struktur und Dimension lösen. Die Serviceprogramme haben Hilfsfunktionen, die mit der Funktionsweise des Steuerprogramms, der Vorbereitung der Eingabedaten und der Bearbeitung der Ergebnisse verbunden sind. Die Elemente der Generierung und Adaption gestatten eine optimale Anpassung an das konkrete Betriebssystem und die Maschinenkonfiguration. Die Systemdatensätze enthalten die Prozedurtexte der Steuersprache, die Makrodefinitionen und die Systemmodule.

Im PSMV sind die Eingabe- und Ausgabeoperationen für die Matrizen vollständig automatisiert. Die dynamische Verteilung von Arbeits- und Externspeicherplatz gestattet die Verarbeitung einer größeren Anzahl von Matrizen, deren Dimensionen ein Mehrfaches des für die Aufgabe verfügbaren Arbeitsspeicherplatzes betragen. Matrizen mit großer Dimension werden im PSMV im universellen Block-Format dargestellt. Viele Algorithmen der linearen Algebra, die traditionell für die Elemente der Matrizen formuliert sind, lassen sich leicht auf Block-Matrizen ausdehnen. In diesem Fall nehmen die Blöcke den Platz der Elemente ein.

Für die Lösung des Systems der linearen algebraischen Gleichungen wird das Cholesky-Verfahren und das Gauß-Verfahren realisiert [15].



**Bild 1**  
Elemente des Programmsystems PSMV

Zur Lösung eines vollständig nichtsymmetrischen Eigenwertproblems wird das Jacobi-Verfahren mit reduzierter Norm [15] genutzt. Zur Lösung eines vollständig symmetrischen Eigenwertproblems wird ein QL-Algorithmus angewendet [10], [14], [15]. Für die Lösung eines speziellen Eigenwertproblems wurden im PSMV die Methode Subspace-Iteration [10], [14] und die einfache Iterationsmethode realisiert. Außerdem sind im PSMV Algorithmen enthalten, die ein verallgemeinertes symmetrisches Eigenwertproblem, welches oft in angewandten Aufgaben vorkommt, in ein gewöhnliches symmetrisches Problem überführen [15].

Das PSMV ist vollständig in Assembler programmiert, wobei Makroelemente verwendet wurden. Diese sichern eine hohe Effektivität. Die Systemelemente gestatten die Schaffung gut strukturierter Programme.

Das PSMV wurde in erster Linie für Festigkeitsberechnungen komplexer Konstruktionen geschaffen, es kann aber auch mit Erfolg in der Festkörpermechanik verwendet werden, wo man es mit Matrizen beliebiger Dimension und Struktur zu tun hat. Besonders günstig ist der Einsatz dann, wenn die Dimension der Matrizen den Arbeitsspeicherplatz übersteigt.

Unter den existierenden PS zur Matrizenverarbeitung gibt es Systeme mit in FORTRAN oder PL/1 geschriebenen Unterprogrammen [5], [6]. In diesen Systemen fehlen jedoch vollständig Elemente für die Automatisierung der Arbeit mit Datenbasis (Systeme mit einfacher Struktur). Mit der Erhöhung der Schwierigkeitsstufe der zu lösenden Aufgaben ist es jedoch offensichtlich, daß die Verwendung der normalen Möglichkeiten des Betriebssystems, der gewöhnlichen Programmiersprachen und einfach strukturierter Programme nicht optimal ist [8], [16]. In solchen Fällen ist der Einsatz höher strukturierter PS zweckmäßig.

Zu den höher strukturierten PS gehört das Programmpaket MATLAN zur Lösung von Matrizenaufgaben [7],

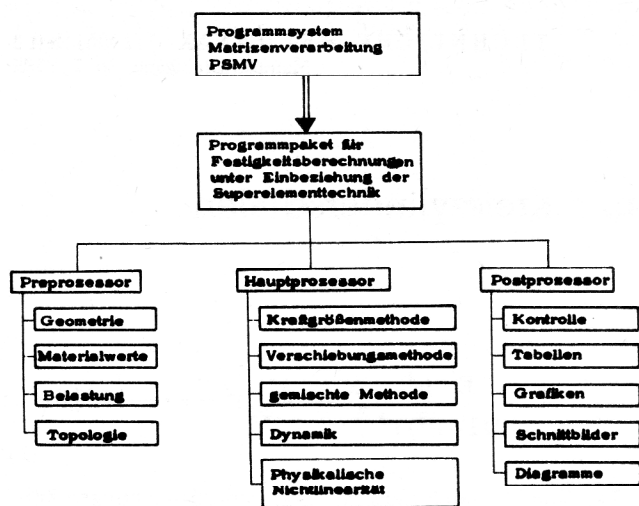
[20]. Dieses Paket ist in Assembler (Steuerteil) und FORTRAN (Programmmodule) geschrieben und arbeitet im Betriebssystem OS/ES. Es gestattet die Verarbeitung von Matrizen verschiedener Struktur und Dimension. Jedoch treten bei der Lösung großer Aufgaben eine Reihe von wesentlichen Nachteilen auf. Hauptsächlich sind dies die folgenden: großer Bedarf an Arbeits- und Externspeicherplatz, geringe Geschwindigkeit der Matrizenoperationen, begrenzte Anzahl von Operatoren. Diese Nachteile konnten durch das PSMV überwunden werden. Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden [1] bis [3].

### 3. Die Verwendung des PSMV bei der Schaffung von problemorientierten Anwenderprogrammen

Das hier kurz vorgestellte System kann als Beispiel bei der Schaffung effektiver problemorientierter Anwenderprogramme zur Lösung von Aufgaben der Festkörpermechanik mit der Methode der Finiten Elemente dienen.

An dieser Stelle soll kurz ein solches Anwenderprogramm für Festigkeitsberechnungen von dünnwandigen Konstruktionen beschrieben werden. Dieses ist problemorientiert und basiert auf dem prozedurorientierten Paket PSMV. Es ist in der Eingabesprache des PSMV geschrieben. Das Programmpaket für die Festigkeitsberechnungen unter Einbeziehung der Superelementmethode läßt sich in drei funktionelle Bestandteile aufteilen: Preprozessor, Postprozessor und Hauptprozessor. Jeder Bestandteil beinhaltet mehrere Untersysteme (Bild 2).

Die wichtigste Komponente, die den Algorithmus der formalisierten Methode zur Aufgabenlösung realisiert, ist der Hauptprozessor. In diesen gehen die Untersysteme zur Realisierung der Superelementmethode und der auf ihrer Basis gelösten Aufgaben ein. Eine Besonderheit der Arbeitsweise des Hauptprozessors besteht darin, daß eine große Menge von Informationen verarbeitet werden muß, daß verschiedenste Matrizen- und



**Bild 2**  
Struktur eines Programmpaketes für Festigkeitsberechnungen

Logikoperationen ausgeführt werden und viel Rechenzeit verbraucht wird. Diese Schwierigkeiten führten zur Entwicklung von leistungsstarken prozedurorientierten Rechenmitteln.

Die Effektivität der Verwendung dieser Rechenmittel bei kurzen Projektierungszeiten hängt nicht nur von den Charakteristika der Hauptprozessorkomponenten ab, sondern auch von denen des Pre- und des Postprozessors. Ansonsten entstehen große Disproportionen durch den großen Zeit- und Arbeitsaufwand bei der Vorbereitungs- etappe für die Eingabedaten und die Verarbeitung der Ergebnisse der Rechnung. Für diese Etappe wird für die Programmierung neben den speziellen Mitteln des PSMV auch FORTRAN verwendet, da die Aufwendungen an Rechenzeit hier relativ gering sind und somit nicht das Hauptproblem bilden. Mit FORTRAN läßt sich jedoch besser die Aufgabenvielfalt verarbeiten.

Das Paket ermöglicht die Bestimmung des Spannungs- und Deformationszustands der Konstruktionen, die Berechnung der Eigen- und erzwungenen Schwingungen und die Festigkeitsberechnungen für versteifte Schalen unter Einbeziehung physikalischer Nichtlinearität.

Die Finite-Element-Bibliothek gestattet die Berechnung von dünnwandigen Konstruktionen mit der Kraftgrößen- und der Verschiebungsgrößenmethode und die Verwendung von hybriden Modellen.

Die im vorliegenden Artikel genannten Ergebnisse basieren auf Arbeiten des Aspiranten I. M. Agnistikov, des Ingenieurs B. Ja. Zarchin, unter Anleitung des Professors Z. I. Burman.

#### LITERATUR

- [1] Agnistikov I. M., Burman Z. I. Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек, ч. 1. система матричного программного обеспечения для численной реализации метода конечных элементов на ЕС ЭВМ. — Казань, 1982. — 104 с. — Рукопись представлена Каз. инж. — строит. ин — том. Деп. в ВИНТИ 16 фев. 1982, № 699 — 82.
- [2] Burman Z. I., Тимофеев М. Т. Математическое обеспечение для матричных расчетов тонкостенных конструкций с применением МКЭ. — В кн.:

Вопросы оптимального использования ЭЦВМ в расчете сложных конструкций. — Казань: КГУ, 1973, с. 87 — 94.

- [3] Бурман З. И., Лукашенко В. И., Тимофеев М. Т. Расчет тонкостенных подкрепленных оболочек методом конечных элементов с применением ЭЦВМ. — Казань: КГУ, 1973, 569 с.
- [4] Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. — Москва, Мир, 1984, 333 с.
- [5] ЕС ЭВМ. Пакет научных подпрограмм на языке ПЛ/1. ПРО. 309.008. Д1 (Д2, Д3).
- [6] ЕС ЭВМ. Пакет научных подпрограмм на языке Фортран IV. ПРО. 309.004. Д1 (Д2, Д3, Д4).
- [7] ЕС ЭВМ. Пакет прикладных программ для решения матричных задач. ПРО. 309.005. Д1 (Д2).
- [8] Йодан Э. Структурное проектирование и конструирование программ. — Москва, Мир, 1979, 415 с.
- [9] Метод конечных элементов в механике твердых тел./Под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. — Киев, Вища школа, 1982, 480 с.
- [10] Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. — Москва, Мир, 1983, 384 с.
- [11] Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. — Москва, Мир, 1984, 264 с.
- [12] Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем. Сборник статей. / Под ред. А. П. Филина. — Ленинград, Судпромгиз, 1961, 876 с.
- [13] Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек./ З. И. Бурман, О. М. Аксенов, В. И. Лукашенко, М. Т. Тимофеев. — Москва, Манинстроение, 1982, 256 с.
- [14] Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — Москва, Наука, 1970, 564 с.
- [15] Уилкинсон Дж. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. — Москва, Машиностроение, 1976, 389 с.
- [16] Хьюз Дж., Мичтом Мичтом Дж. Структурный подход к программированию. — Москва, Мир, 1980, 278 с.
- [17] Dankert, J., Limpert, H. Ein System zur Verwaltung großer Datenmengen, — Rechentechnik und Datenverarbeitung, 1977, Heft 1.
- [18] Ein Matrizeninterpretationssystem der Strukturmechanik für Praxis, Forschung und Lehre. W. B. Krätzig, H. Metz, G. Schmid, B. Weber. — Techn. Wiss. Mitt. IKIB der Ruhr-Univ. Bochum, Nr. 77 — 5.
- [19] Gabbert, U., Berger, H. Universelles FEM-Programmsystem COSAR — Leistungsumfang, Anwendungserfahrungen, Weiterentwicklungen. X. Internationaler Kongress über die Anwendungen der Mathematik, Weimar, 1984, Berichte.
- [20] IBM Application Program. System / 360, Matrix Language (MATLAN) (360-CM-05X) Program Description Manual, 1968.
- [21] Nagy, D. A. Software engineering for finite element analysis. J. Struct. Div., Proc. ASCE, Vol. 104, N ST8 (August), 1978, pp. 1278 — 1298.
- [22] Schaffner, H. G. A review of the international Symposium on structural mechanics software. Comp. and Struct., Vol. 8, 5, pp. 589 — 598.

З. И. Бурман, Б. Я. Зархин  
Казанский инженерно-строительный институт  
420 043 Казань ул. Зеленая, дом 1