

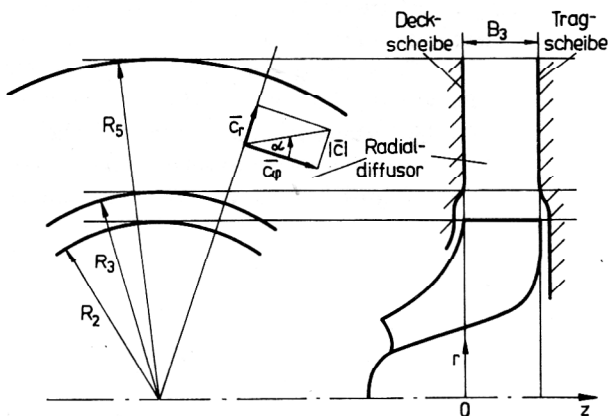
# Anwendung des $k\text{-}\epsilon$ -Turbulenzmodells auf die Strömung in Radialdiffusoren

Bernd Dreßler, Gottfried Seifert

## 1. Einleitung

Als wichtige Bauteile in Strömungsmaschinen, z. B. Verdichtern, dienen Radialdiffusoren der Erhöhung des statischen Drucks eines strömenden Mediums. Die Strömung in Radialdiffusoren verläuft bei technischen Anwendungen stets turbulent und ist im Mittel dreidimensional. Die Betrachtung dieses Strömungstyps ist deshalb sowohl von technischem als auch von physikalischem Interesse. Für viele Fragestellungen ist es ausreichend, mit vereinfachenden Voraussetzungen über die Strömung zu arbeiten. So werden oft Strömungen mit einer Hauptströmungsrichtung behandelt, wo eine parabolische bzw. partiell-parabolische Betrachtungsweise ([1]) möglich ist. Viele Arbeiten, z. B. [2] bis [4] und [5], zeigen, daß auch unter gewissen einschränkenden Annahmen brauchbare Resultate erzielt werden können, wobei durch die Annahmen der Aufwand wesentlich herabgesetzt werden kann. Untersuchungen, die auf bestimmte Einschränkungen verzichten, erfordern dagegen einen hohen Aufwand bezüglich Numerik und Rechenzeit ([6]).

In dieser Arbeit soll ein schaufelloser Radialdiffusor mit parallelen, ebenen Wänden betrachtet werden (Bild 1).



**Bild 1**  
Schematische Darstellung eines Radialdiffusors

Es werden Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  verwendet. Die geometrischen Kenngrößen eines unbeschaufelten parallelwandigen Radialdiffusors sind der Eintrittsradius  $R_3$ , der Austrittsradius  $R_5$  und die Diffusorbreite  $B_3$ . Im Bild 1 bedeutet  $R_2$  den Austrittsradius eines vorgeschalteten Laufrades. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit besitzt neben der radialen Komponente  $\bar{c}_r$  oft eine maßgebliche Komponente in Umfangsrichtung  $\bar{c}_\varphi$ . Es wurde ein numerisches Verfahren entwickelt, das die

Berechnung der praktisch wichtigsten Parameter der Strömung und insbesondere die Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Zuströmbedingungen (bei  $r = R_3$ ) gestattet. Bei Berücksichtigung und Abwägung der für eine Auslegung erforderlichen Genauigkeit der Strömungsparameter, der beschränkten Genauigkeit der zur Verfügung stehenden Eingangsdaten und des Rechenaufwandes zeigt es sich, daß es notwendig und sinnvoll ist, bestimmte Idealisierungen und Einschränkungen vorzunehmen. Für das numerische Verfahren wird die mittlere Strömung als rotationssymmetrisch und stationär angesehen. Des weiteren wird vorausgesetzt, daß der mittlere Druck  $\bar{p}$  unabhängig von der axialen Koordinate  $z$  ist, in den Grundgleichungen Grenzschichtvereinfachungen zulässig sind und in Wandnähe Wandgesetze angewendet werden können. Der Einfluß einer veränderlichen Dichte wird näherungsweise berücksichtigt. Es wird vorausgesetzt, daß die mittlere Dichte  $\bar{\rho}$  wie der mittlere statische Druck  $\bar{p}$  nur von  $r$  abhängt und ein eindeutiger Zusammenhang zwischen  $\bar{p}$  und  $\bar{\rho}$  (vgl. (2.4)) besteht. Dichteschwankungen werden vernachlässigt. Das Verfahren bietet die Möglichkeit, bei Vorgabe von Profilen für die Radial- und die Umfangskomponente der mittleren Geschwindigkeit sowie von Werten für den mittleren statischen Druck und die mittlere Dichte im Diffusoreintritt  $r = R_3$  die Geschwindigkeitsprofile an einer beliebigen Stelle  $r$  ( $R_3 < r \leq R_5$ ) im Diffusor zu bestimmen. Des weiteren werden der statische Druck und andere ausgewählte integrale Parameter ermittelt. Einige mit dem Verfahren erzielte Ergebnisse sollen hier vorgestellt werden. Neben einem Vergleich zwischen Rechnung und Experiment stehen dabei zwei Fragestellungen im Mittelpunkt:

1. Welche Unterschiede treten bei Vergrößerung der Zuströmgeschwindigkeit zwischen den Ergebnissen für inkompressibles bzw. kompressibles Medium auf?
2. Welchen Einfluß hat bei Voraussetzung eines polytropen Zusammenhangs zwischen Druck und Dichte eine Änderung des Polytropenexponenten auf die Ergebnisse?

Der genannte Vergleich zwischen Rechnung und Experiment bezieht sich auf eine Strömung, bei der das Medium aufgrund relativ niedriger Strömungsgeschwindigkeiten als inkompressibel betrachtet werden kann. Ein Vergleich für Fälle, wo aufgrund höherer Strömungsgeschwindigkeiten Kompressibilitätseffekte wesentlich werden, steht noch aus. In diesen Fällen wird in der vorliegenden Arbeit nur über theoretische Ergebnisse, d. h. über Eigenschaften des mathematischen Modells, berichtet.

## 2. Mathematisches Modell

Unter Berücksichtigung der getroffenen Voraussetzungen ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{\rho} \bar{c}_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{c}_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.1)$$

Die Impulsgleichungen für die Radialkomponente  $\bar{c}_r$  und die Umfangskomponente  $\bar{c}_\varphi$  der mittleren Geschwindigkeit nehmen bei Rotationssymmetrie und nach Anwendung der Grenzschichtvereinfachungen die folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{\rho} \bar{c}_r \bar{c}_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{c}_z \bar{c}_r)}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{c}_r}{\partial z} \right\} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \bar{\rho} \frac{\bar{c}_\varphi^2}{r},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{\rho} \bar{c}_r \bar{c}_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{c}_z \bar{c}_\varphi)}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{c}_\varphi}{\partial z} \right\} - \bar{\rho} \frac{\bar{c}_r \bar{c}_\varphi}{r}.$$

Zwischen den (nur von  $r$  abhängigen) Strömungsparametern Druck  $\bar{p}$  und Dichte  $\bar{\rho}$  soll die Beziehung

$$\bar{\rho}(r) = \bar{\rho}(R_3) \left( \frac{\bar{p}(r)}{\bar{p}(R_3)} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2.4)$$

bestehen. Der Parameter  $\kappa$  ist dabei der Polytropenexponent. Die effektive Zähigkeit  $\mu_{\text{eff}}$  setzt sich additiv aus der molekularen Zähigkeit  $\mu$  und der turbulenten Zähigkeit  $\mu_t$  zusammen. Die Turbulenz Zähigkeit wird mit Hilfe des  $k$ - $\epsilon$ -Modells bestimmt. Dabei sind  $k$  die massenbezogene kinetische Turbulenzenergie und  $\epsilon$  die zugehörige Dissipationsrate. Unter den angegebenen Voraussetzungen reduziert sich das  $k$ - $\epsilon$ -Modell auf das folgende Gleichungssystem:

$$\mu_t = c_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{\rho} \bar{c}_r k)}{\partial r} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{c}_z k)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial z} \right\} + \mu_t \left\{ \left( \frac{\partial \bar{c}_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{c}_r}{\partial z} \right)^2 \right\} - \bar{\rho} \epsilon, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{\rho} \bar{c}_r \epsilon)}{\partial r} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{c}_z \epsilon)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right\} \quad (2.7)$$

$$+ c_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t \left\{ \left( \frac{\partial \bar{c}_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{c}_r}{\partial z} \right)^2 \right\} - c_2 \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k}$$

Für die hier auftretenden Konstanten werden in Anlehnung an die Literatur folgende Werte verwendet:

$c_\mu$	$c_1$	$c_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0,09	1,44	1,92	1	1,3

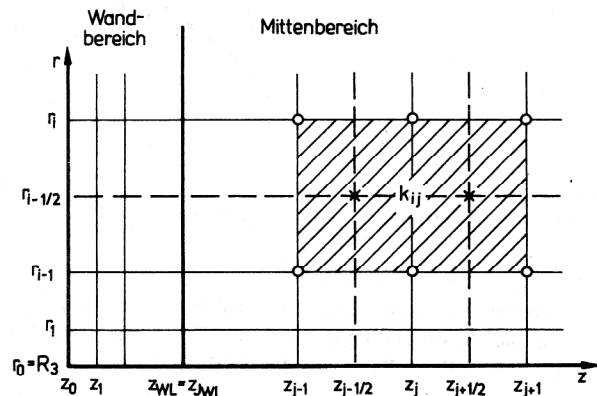
(2.8)

Die mit  $r$  veränderliche Dichte tritt damit auch in den Modellgleichungen (2.6) und (2.7) sowie in der Definition der Turbulenz Zähigkeit (2.5) auf. Ein Beispiel für eine ähnliche Anwendung des  $k$ - $\epsilon$ -Modells auf eine andere kompressible turbulente Strömung wird in [7] beschrieben.

## 3. Numerische Methode

Das Strömungsgebiet  $R_3 \leq r \leq R_5$ ,  $0 \leq z \leq B_3$  im Radialdiffusor wird mit Hilfe eines Gitters von Knotenpunkten in Rechtecke eingeteilt (Bild 2). Das Gitter wird in einen (breiten) Mittenbereich und zwei (schmale) Wandbereiche an Deck- und Tragscheibe unterteilt. In den Wandbereichen werden die gesuchten Funktionen mit Hilfe von Wandgesetzen [8], [9] ermittelt. Im Mittenbereich gelten die Bilanzgleichungen (2.1) bis (2.3) sowie die Modellgleichungen (2.5) bis (2.7). An den Trennlinien zwischen Wandbereich und Mittenbereich werden Stetigkeitsforderungen an  $\bar{c}_r$  und  $\bar{c}_\varphi$  gestellt.

Die im Mittenbereich gültigen partiellen Differentialgleichungen werden mittels eines Differenzenverfahrens behandelt. Die Differenzgleichungen erhält man durch Integration der Gleichungen über das Kontrollvolumen  $K_{ij}$  (vgl. Bild 2) und anschließender Verwendung entsprechender Näherungsformeln (Trapezregel, lineare Interpolation usw.). Es handelt sich dabei um nicht-lineare, implizite Gleichungen für die Werte der Strömungsparameter in den Knotenpunkten, deren Lösung iterativ erfolgt. Die Grundgleichungen besitzen aufgrund der Grenzschichtvereinfachungen parabolischen Charakter, so daß die Berechnung der Strömungsparameter schrittweise für wachsendes  $r$  vom Diffusoreintritt zum Diffusoraustritt hin erfolgen kann. Druck und Dichte, die beide als von  $z$  unabhängig angesehen werden, werden bei jedem  $r$ -Schritt jeweils im ersten Iterations-



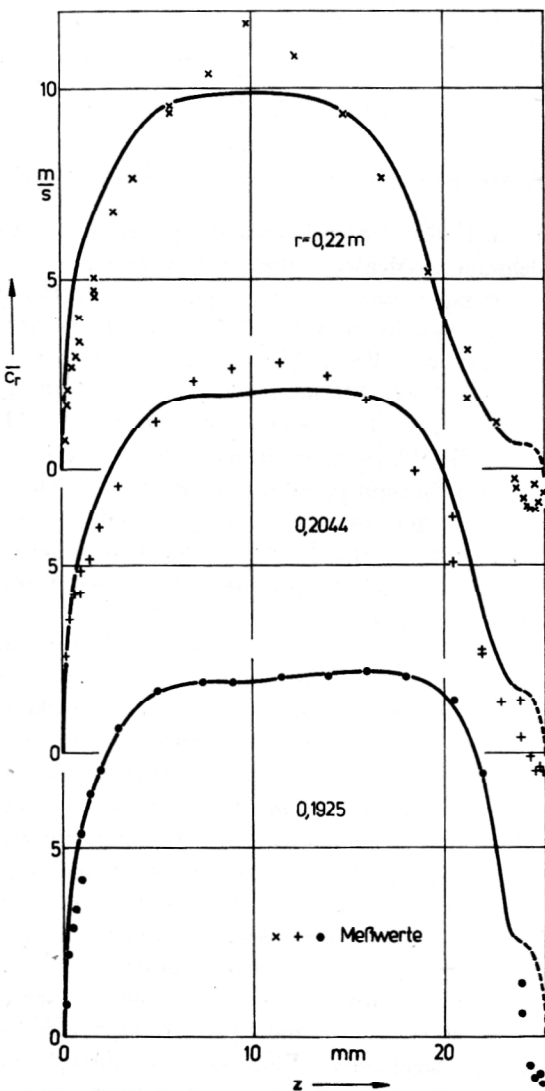
o : Punkte, in denen  $\bar{c}_r$ ,  $\bar{c}_\varphi$ ,  $k$ ,  $\epsilon$  lokalisiert sind.  
x : Punkte, in denen  $\bar{c}_z$  lokalisiert ist.

**Bild 2**  
Integrationsgebiet für die Bilanzgleichungen

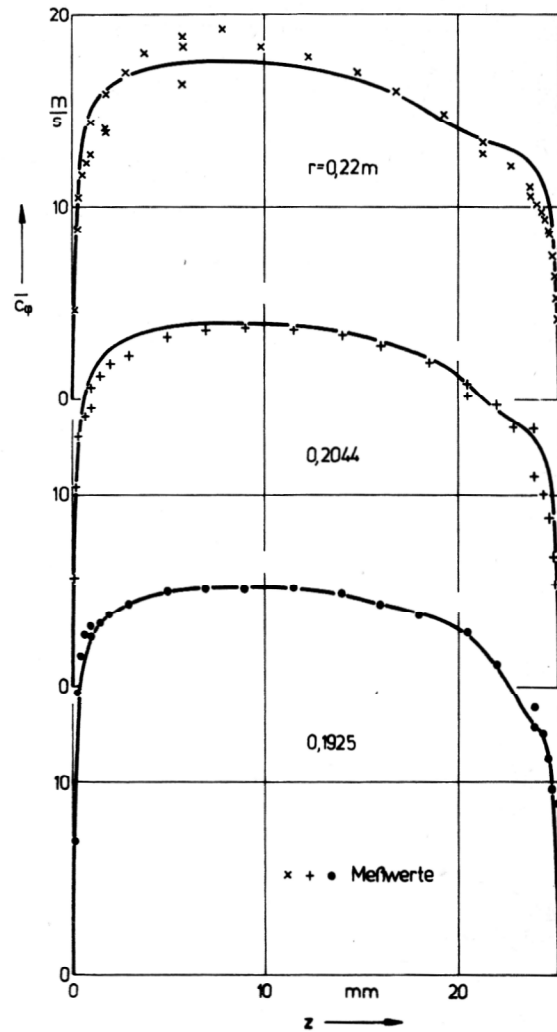
schritt mit Hilfe des von der vorhergehenden Linie  $r = \text{const}$  übernommenen Druckgradienten und von (2.4) neu festgelegt und bei jedem Iterationsschritt korrigiert. Die Korrektur des Drucks erfolgt mittels der Kontinuitätsgleichung, indem die Konstanz des Massendurchsatzes in  $r$ -Richtung gewährleistet wird. Dabei wird eine vereinfachte Form der Impulsgleichung (2.2) herangezogen, um einen Zusammenhang zwischen Druck- und Geschwindigkeitskorrekturen herstellen zu können. Die Neubestimmung der Dichte erfolgt dann mittels des korrigierten Drucks nach (2.4).

#### 4. Numerische Ergebnisse

Um einen Vergleich zwischen Rechnung und Experiment durchzuführen, wurden die Meßergebnisse [10] herangezogen, die in einer Modellströmung gewonnen wurden. Das Strömungsmedium war Luft, die maximale Geschwindigkeit betrug 25 m/s. Die geometrischen Abmessungen des Diffusors waren  $B_3 = 0,0253$  m,  $R_3 = 0,1925$  m und  $R_5 = 0,22$  m. Als Eingabedaten für die Rechnung dienten gemessene Geschwindigkeitsprofile



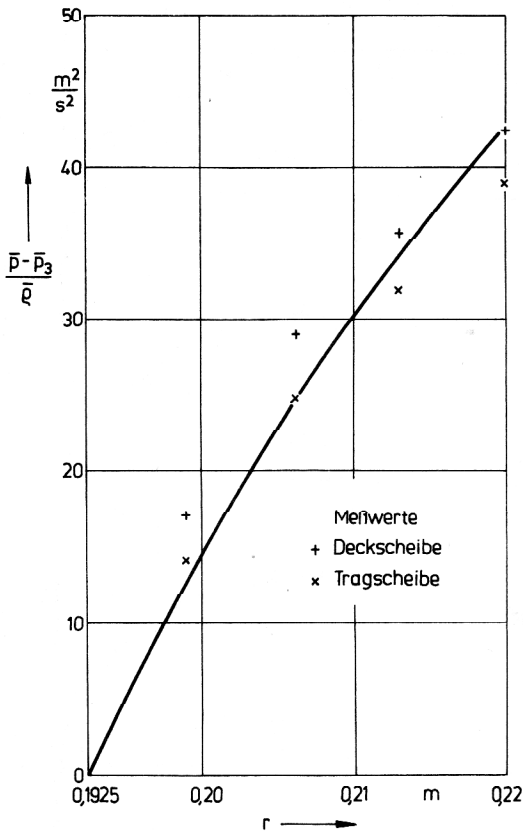
**Bild 3**  
Profile der Radialkomponente der mittleren Geschwindigkeit



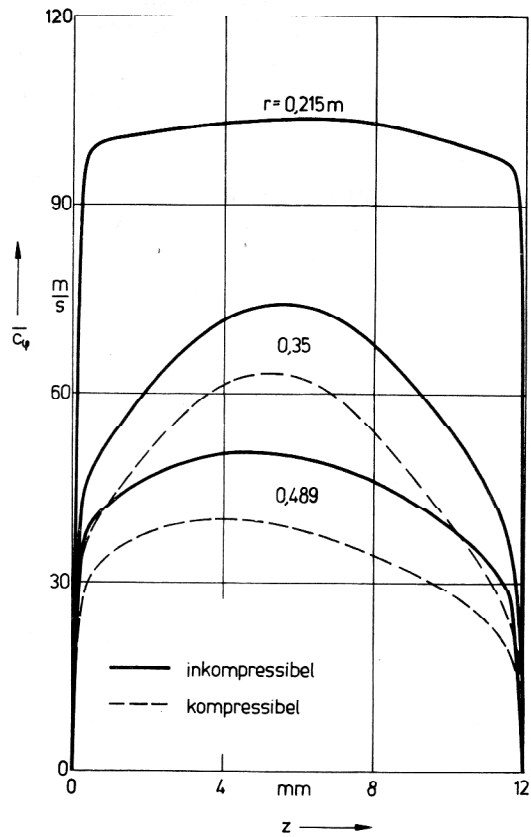
**Bild 4**  
Profile der Umfangskomponente der mittleren Geschwindigkeit

der Radial- und Umfangskomponenten am Diffusoreintritt. In den Bildern 3 bis 5 sind die berechneten Ergebnisse den gemessenen Werten gegenübergestellt. Beim Vergleich zwischen Experiment und Rechnung ist zu berücksichtigen, daß das numerische Verfahren auf einigen Voraussetzungen beruht, die von der vermessenen Strömung nur in gewisser Näherung erfüllt wurden. So war die Strömung nicht völlig rotationssymmetrisch, und es trat tragscheibenseitig ein kleines Rückströmgebiet auf. Außerdem war der Druck in axialer Richtung nicht konstant. Darüber hinaus ist zu bedenken, daß die Meßwerte fehlerbehaftet sind und daß auch das theoretische Modell keineswegs exakt ist. Unter Beachtung dieser Umstände liefert der Vergleich eine zufriedenstellende Übereinstimmung. Mit Ausnahme der Radialgeschwindigkeiten im Wandbereich der Tragscheibe, wo Abweichungen aufgrund des Rückströmgebietes zu erwarten waren, wird die Entwicklung der Profile in der Tendenz richtig wiedergespiegelt. Die Differenzen zwischen numerischen und experimentellen Resultaten für den Druckverlauf liegen größenordnungsmäßig im Bereich der Druckunterschiede zwischen Deck- und Tragscheibe.

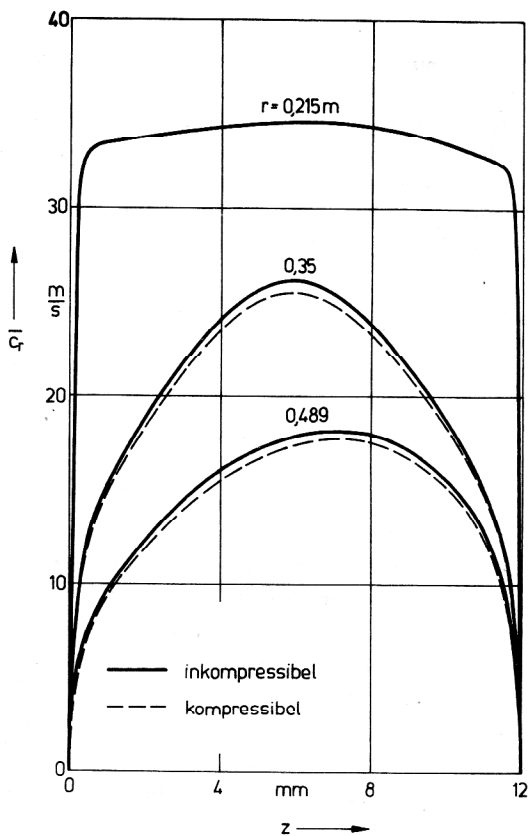
Durch einige weitere Rechnungen sollte der Einfluß der Kompressibilität im Rahmen des Modells untersucht



**Bild 5**  
Radiale Druckentwicklung



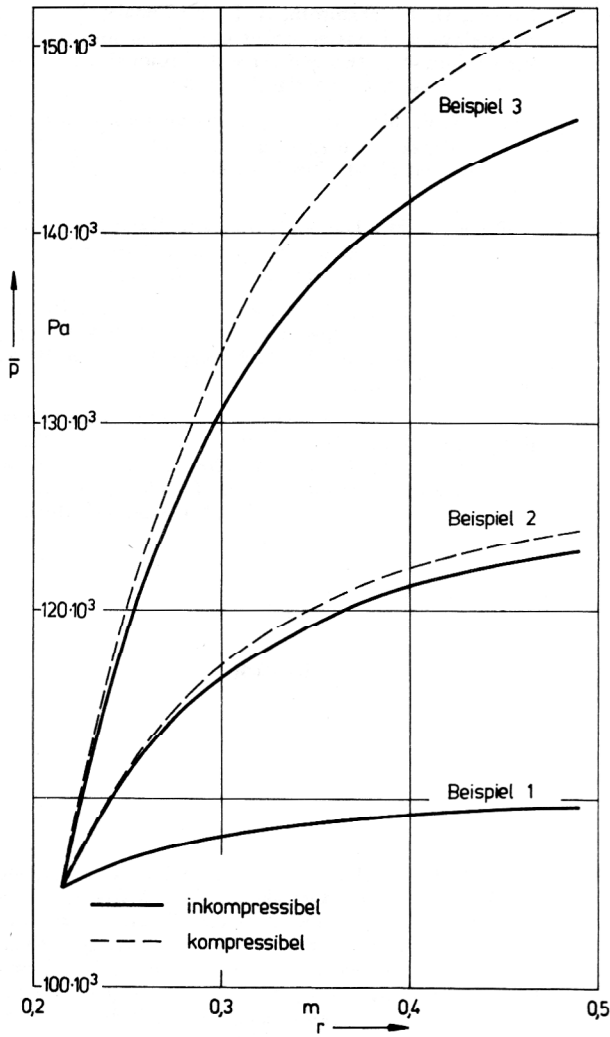
**Bild 7**  
Geschwindigkeitsprofile der Radialkomponente (Beispiel 3)



**Bild 6**  
Geschwindigkeitsprofile der Radialkomponente (Beispiel 1)

werden. Dafür wurden die Ausgangsdaten bei  $r = R_3$  in Anlehnung an Meßwerte und Profilvorgaben des Kombi-nates Pumpen und Verdichter gewählt. Die Meßwerte lagen am Eintritt in einem Diffusor mit folgenden Ab-messungen vor:  $R_3 = 0,215$  m,  $R_5 = 0,489$  m,  $B_3 = 11,9$  mm. Das Strömungsmedium war Luft ( $\bar{\rho} = 1,24$  kg/m<sup>3</sup>,  $\kappa = 1,4$ ), es lag ein Druck  $\bar{p}_3 = 105230$  Pa vor und die Strömungsgeschwindigkeit betrug 98,3 m/s. Bei einem Strömungswinkel  $\alpha$  von etwa  $20^\circ$  wurde die Umfangskomponente als nahezu konstant in axialer Richtung angegeben. Für die Radialkomponente wurde ein Profil vorgegeben, das eine geringe Asymmetrie be-sitzt (vgl. Bild 6).

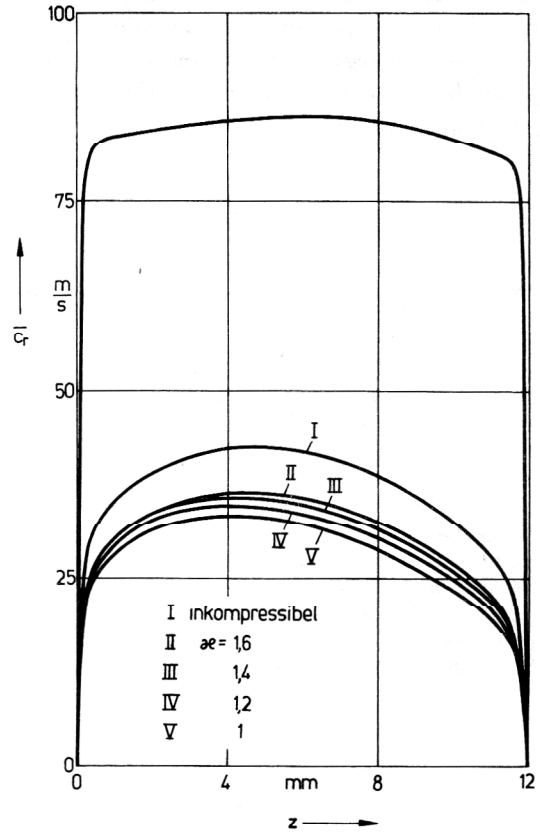
Um den Einfluß der Kompressibilität bei verschiedenen Zuströmgeschwindigkeiten zum Diffusor zu untersuchen, wurden für drei Beispiele die Geschwindigkeitspro-file und der Druck im Diffusor sowohl mittels des skiz-zierten Verfahrens als auch unter Voraussetzung der In-kompressibilität ( $\kappa = \infty$  in (2.4)) berechnet. Beim Bei-spiel 1 wurden die angegebenen Anfangswerte verwen-det. Im Beispiel 2 wurden alle Geschwindigkeitswerte verdoppelt, im Beispiel 3 die Geschwindigkeiten verdrei-facht. Alle anderen Eingangsdaten wurden beibehalten. Ergebnisse sind für die Radialkomponenten in den Bil-dern 6 und 7 und für den Druck im Bild 8 aufgetragen. Wie zu erwarten war, nimmt der Kompressibilitätsein-fluß mit wachsender Eintrittsgeschwindigkeit zu. So kommen die Unterschiede zwischen einer „inkompressi-blen“ und einer „kompressiblen“ Rechnung, die beim Beispiel 1 kaum vorhanden sind, beim Beispiel 3 deutlich zum Tragen. Sie treten vor allem in den Radialgeschwin-



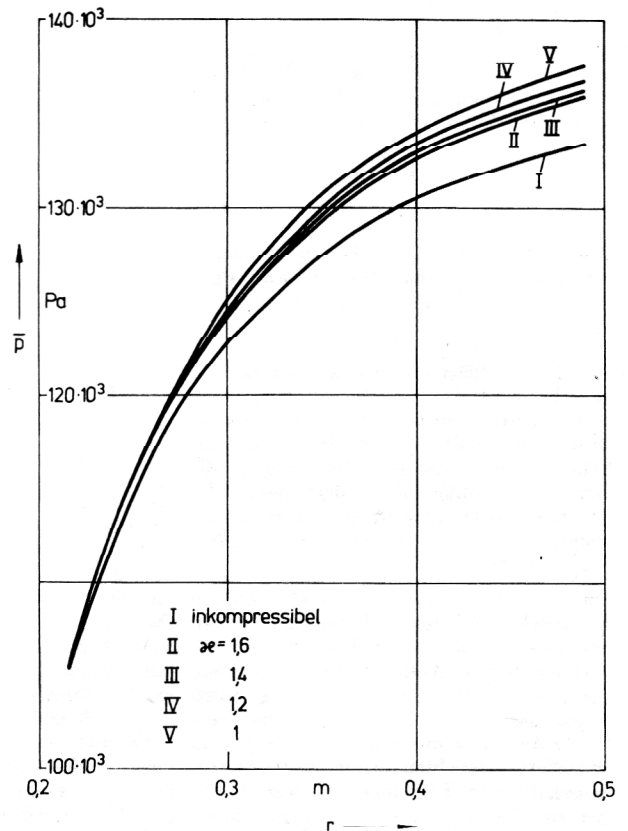
**Bild 8**  
Radialer Druckverlauf

digkeiten und beim Druck auf. So liegt im Beispiel 3 am Diffusoraustritt im kompressiblen Fall ein um 14,4 % höherer Druckanstieg im Diffusor vor als im inkompressiblen Fall. Die Differenzen in den Ergebnissen für die Umfangsgeschwindigkeiten sind dagegen prozentual relativ gering. Die qualitative Übereinstimmung der Profile erklärt sich sicher dadurch, daß sowohl für die „inkompressible“ als auch für die „kompressible“ Rechnung prinzipiell das gleiche Strömungsmodell zugrunde lag.

Um den Einfluß einer Variation des Polytropenexponenten  $\kappa$  auf die Strömungsparameter zu prüfen, wurde ein viertes Beispiel benutzt. Auch hier kamen die genannten Eingangsdaten zur Anwendung, jedoch wurden die zweieinhalbfachen Geschwindigkeiten des Beispiels 1 gewählt. Die Rechnungen erfolgten für  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 1,2$ ,  $\kappa = 1,4$ ,  $\kappa = 1,6$  und  $\kappa = 10^{12}$  (inkompressibler Fall). Die Ergebnisse, die Profile der Radialgeschwindigkeiten und der Druckverlauf sind in den Bildern 9 und 10 angegeben. Auch hier zeigt sich, daß quantitative Unterschiede zwischen dem kompressiblen und dem inkompressiblen Fall auftreten. Dagegen machen sich geringe Änderungen von  $\kappa$  im Bereich üblicher Werte für Gase kaum bemerkbar. Die Abweichungen beim Druckanstieg im Diffusor betragen zwischen  $\kappa = 1,4$  und  $\kappa = 1,6$  nur 1,1 %. Man



**Bild 9**  
Geschwindigkeitsprofile der Radialkomponente (Beispiel 4)



**Bild 10**  
Radialer Druckverlauf (Beispiel 4)

kann also erwarten, daß für die Rechnung eine genaue Kenntnis dieses Exponenten nicht unbedingt erforderlich ist, damit wird gegebenenfalls eine Reduzierung des Aufwandes bei der Ermittlung der Stoffeigenschaften von technischen Gasen möglich.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Patankar, S. V., Spalding D. B.: A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15 (1972) S. 1787 – 1806.
- [ 2 ] Briley, W. R.: Numerical Method for Predicting Three-Dimensional Steady Viscous Flow in Ducts. *J. of Computational Physics*, 14 (1974), S. 8 – 28.
- [ 3 ] Pratap, V. S., Spalding, D. B.: Numerical Computations of the Flow in Curved Ducts. *Aeronautical Quarterly*, 1975, S. 219 – 229.
- [ 4 ] Mazumdar, A. K., Pratap, V. S. Spalding, D. B.: Numerical Computation of Flow in Rotating Ducts. *J. of Fluid Engineering*, 1977, S. 148 – 153.
- [ 5 ] Zahn, G.: Theoretische und experimentelle Strömungsuntersuchungen in Umlenkanälen von Turbomaschinen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1982.
- [ 6 ] Roscoe, D. V., Shamroth, B. J., Mc Donald, H.: An ensemble averaged Navier-Stokes calculation procedure for the prediction of two and three dimensional radial diffuser flow fields. C 63/84, IMech E 1984.
- [ 7 ] Jones, W. P., Mc Guirk, J. J.: Computation of a Round Turbulent Jet Discharging into a Confined Cross-Flow. In: *Turbulent Shear Flow 2* Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [ 8 ] Hoffmeister, M.: Das logarithmische Wandgesetz turbulenter Grenzschichten bei positiven Druckkennzahlen. *Technische Mechanik* 1 (1980) 1, S. 95 – 101.
- [ 9 ] Ullrich, D., Dreßler, B., Seifert, G.: Beitrag zur Untersuchung turbulenter Strömungen durch Radialdiffusoren. Institut für Mechanik der AdW, Report R-Mech. 04/82, 1982, S. 227 – 231.
- [ 10 ] Helmstädter, E.: Experimentelle Untersuchung einer Ringraumströmung unter Berücksichtigung des mittleren Geschwindigkeitsvektors und aller Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors. Forschungsbericht des Instituts für Mechanik der AdW, 1981, unveröffentlicht.