

# Zwangskoppelung von Schalen- und 3D-Finite-Elemente-Modellen mittels Penalty-Methode

Ulrich Gabbert

## 1. Problemstellung

Es gibt international eine Anzahl leistungsfähiger universeller Finite-Element-Programmsysteme, mit denen statische und dynamische Berechnungen auch für sehr komplexe praktische Bauteile durchgeführt werden können [1] bis [3]. Bemerkenswert ist, daß nur sehr wenige Systeme Möglichkeiten zur Koppelung von Schalenelementen mit 3D-Elementen anbieten. Typisch für den Aufbau vieler Bauteile des Maschinenbaus und anderer Industriezweige ist aber gerade das Zusammenwirken von kompakten mit dünnwandigen Strukturen (z. B. Verdichterslaufrad: Tragscheibe – Schaufeln). Aber auch bei reinen dünnwandigen Konstruktionen können räumliche Berechnungen notwendig werden, wenn in bestimmten Übergangsbereichen (z. B. Rohrverzweigung) genaue Spannungswerte benötigt werden. Derartige Berechnungen werden überwiegend vollständig dreidimensional durchgeführt, wobei ein sehr großer Berechnungs- und Modellierungsaufwand in Kauf genommen werden muß. Ein weiterer Nachteil dieser Vorgehensweise ergibt sich aus der im Vergleich zu speziellen Schalenelementen geringeren Genauigkeit der räumlichen Elemente (z. B. 20-Knoten Hexaeder) bei der Berechnung dünnwandiger, überwiegend auf Biegung beanspruchter Konstruktionen.

Eine effektive Berechnung komplexer Bauteile ist zu erreichen, wenn die gleichzeitige Nutzung unterschiedlicher Elementklassen (z. B. 3D, Schalen, Balken, Stäbe) auf der Grundlage mechanisch sinnvoller Verknüpfungen möglich ist. Prinzipiell gibt es zwei Wege, um zu einer mechanisch einwandfreien Verbindung unterschiedlicher finiter Elemente zu kommen:

1. Koppelung mittels spezieller Übergangselemente
2. Koppelung über Zwangsbedingungen

Um die Entwicklung spezieller Übergangselemente hat sich vor allem Surana verdient gemacht [4] bis [8]. So hat er beispielsweise Elemente für den Übergang zwischen rotationssymmetrischen Ringelementen und Rotationsschalen [4], 20-Knoten-Hexaederelementen und dicken Schalenelementen (Ahmadsches Schalenelement) [5], 2D- und Balkenelementen [6] sowie Erweiterungen zur Berechnung geometrisch nichtlinearer Probleme [7], [8] angegeben. Übergangselemente gehören zu den Elementkatalogen der Systeme ADINA (20-Knoten Hexaeder/16 Knoten isoparametrisches Schalenelement) und ASKA (27-Knoten-Hexaeder/dickes Schalenelement) [1]. Die für eine unkonventionelle Realisierung von Netzverfeinerungen entwickelten Übergangselemente (Übergang von einem auf zwei oder vier Elemente) sind in diesem Zusammenhang ebenfalls zu nennen [9] bis [11].

Die Entwicklung spezieller Übergangselemente, ihre programmtechnische Realisierung und ihre Nutzung im Rahmen eines vorhandenen Programmsystems ist mit erheblich größeren Schwierigkeiten und einem höheren Aufwand verbunden als die Koppelung der Elemente mit Hilfe von Zwangsbedingungen. Entscheidend ist jedoch, daß sich die Ableitung theoretisch einwandfreier Übergangselemente als sehr kompliziert erweist und für viele praktisch wichtigen Fälle (insbesondere für die Koppelung von 3D-Elementen mit dünnen Schalenelementen) keine Lösungen bekannt sind. Die Alternative dazu besteht in der Einführung von Zwangsbedingungen zwischen den unterschiedlichen finiten Elementen und Modellen dergestalt, daß eine mechanisch sinnvolle Koppelung erreicht wird. Die Erfüllung der Zwangsbedingungen mittels Penalty-Methode hat sich im Hinblick auf die rechen-technische Realisierung als besonders effektiv erwiesen [12]. Sie wird beispielsweise im FEM-Programmsystem COSAR [3] für die Einarbeitung nahezu aller in diesem System implementierten geometrischen Rand-, Übergangs- und Koppelbedingungen benutzt.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie das 20-Knoten-Hexaederelement mit dem Semiloof-Schalenelement [13] gekoppelt werden kann. Das Schalenelement kann dabei eine beliebige Lage auf der Oberfläche des Raumelementes einnehmen, muß jedoch innerhalb dieser Fläche liegen. Die Vorgehensweise läßt sich auf die Koppelung anderer Elementtypen übertragen. Die nachfolgend dargestellte Koppelstrategie wurde im Rahmen des Programmsystems COSAR realisiert und getestet und steht für die praktische Nutzung zur Verfügung.

Im FEM-Programmsystem PMD ist ebenfalls eine Zwangskoppelung zwischen Hexaeder- und Semiloof-Elementen realisiert [14]. Allerdings ist die Koppelung des Schalenelementes nur auf der Seitenkante oder der Mitte einer Vierecksseite des Raumelementes möglich.

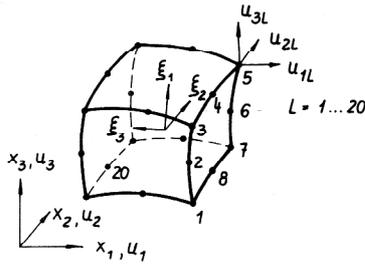
Erste Anregungen zur Realisierung einer Koppelung Hexaeder-/Semiloof-Element erhielt der Autor des vorliegenden Beitrages von S. Ptak [15].

## 2. Zwangskoppelung 20-Knoten-Hexaeder-/Semiloof-Schalenelement

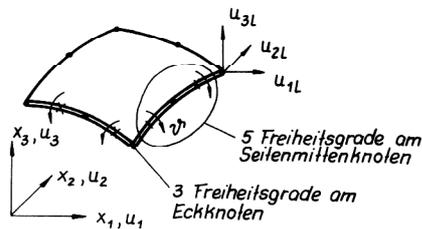
### 2.1. Elemente

Das isoparametrische Hexaederelement mit 20 Knotenpunkten (siehe Bild 1) ist international das am häufigsten für 3D-Berechnungen eingesetzte finite Element [1]. Im Programmsystem COSAR gibt es fünf weitere Raumelemente, die durch Degeneration aus dem Hexa-

eder abgeleitet wurden [16]. Die Koppelung mit den Schalenelementen soll prinzipiell auf allen Seitenflächen der Raumelemente möglich sein. Weniger weit verbreitet sind die Semiloof-Schalenelemente (Dreieck und Viereck) [13]. Sie haben sich jedoch im Programmsystem COSAR für die Berechnung dünner Platten und Schalen als außerordentlich leistungsfähig erwiesen [17] und sind daher in diesem System die Standardelemente für Schalenberechnungen (siehe Bild 2). Es handelt sich um nichtkompatible Elemente, die an den Eck- und Seitenmittenknoten jeweils 3 Verschiebungen und an den beiden Gauß-Punkten auf jeder Seite den Biegewinkel um den Tangentenvektor als Freiheitsgrade aufweisen.



**Bild 1**  
Isoparametrisches 20-Knoten-Hexaederelement mit 60 Freiheitsgraden (Typ: HK 60)



**Bild 2**  
Viereckiges 8-Knoten-Semiloof-Schalenelement mit 32 Freiheitsgraden (Typ: SLRK 32)

## 2.2. Penalty-Methode

Die Zwangsbedingungen für die vorliegende Problemstellung lassen sich als Funktion des Ortes  $\mathbf{x}$  und der Freiheitsgrade  $\mathbf{v}$  (Verschiebungen, Biegewinkel) in der Form

$$z(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0 \text{ auf } 0 \quad (1)$$

darstellen (0-Kontaktfläche). Das Minimum des elastischen Potentials

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f}$$

( $\mathbf{K}$  – Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{f}$  – Kraftvektor) unter Wirkung der Zwangsbedingung (1) kann durch Minimierung des zusammengesetzten Funktionals

$$\chi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} + \frac{1}{2} \alpha \int_{\Omega} z^T z d\Omega \rightarrow \text{Min.} \quad (2)$$

erreicht werden. Dabei bezeichnet  $\alpha$  die Penalty-Zahl, deren Größe die Genauigkeit der Erfüllung von (1) steuert. Wenn sich die Zwangsbedingungen in der Form

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

darstellen lassen, führt die Minimierung von  $\chi$  bezüglich der Freiheitsgrade  $\mathbf{v}$  zu

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_z) \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (4)$$

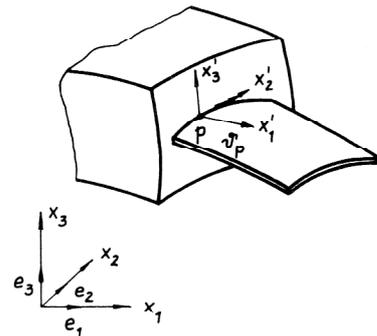
mit der Zusatzsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_z = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{Z}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (5)$$

Diese Zusatzsteifigkeitsmatrix kann auf dem üblichen Weg (wie eine Elementsteifigkeitsmatrix) in die Systemmatrix eingespeichert werden.

## 2.3. Formulierung der Zwangsbedingungen

Es wird angenommen, daß eine Seitenkante des zu koppelnden Schalenelementes vollständig innerhalb der Grenzen einer Seitenfläche des 3D-Elementes liegt, dort aber eine beliebige Lage einnehmen kann (siehe Bild 3). Auf einem Punkt P der Berührungslinie der



**Bild 3**  
Anschluß des Schalenelementes an eine Seitenfläche des Hexaederelementes

Schalenmittelfläche mit dem Raumelement ist ein lokales kartesisches Koordinatensystem  $\mathbf{x}'_i$  so definiert, daß die Achse  $\mathbf{x}'_1$  mit der Normalen an die Seitenfläche identisch ist,  $\mathbf{x}'_2$  die Richtung der Tangente an die Berührungslinie hat und  $\mathbf{x}'_3$  senkrecht auf der durch  $\mathbf{x}'_1$  und  $\mathbf{x}'_2$  aufgespannten Ebene steht ( $\mathbf{x}'_2$  und  $\mathbf{x}'_3$  liegen daher in der Tangentialebene der Seitenfläche des Raumelementes im Punkt P).

Die Zwangsbedingungen lassen sich für die hier verwendeten Elementtypen in folgender Form angeben.

$$z(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{3D} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vartheta \end{bmatrix}_{\text{Semiloof}} = 0 \quad (6)$$

Bei Schalenelementen, die als Freiheitsgrade auch die Biegewinkel um die Achsen  $x'_1$  und  $x'_3$  enthalten, kann es zweckmäßig sein, auch für diese Freiheitsgrade Zwangsbedingungen zu formulieren. Eine Übertragung der Biegewirkung um diese Achsen wird jedoch näherungsweise stets über die Koppelung der Verschiebungen erreicht. Einsetzen der Formfunktionen des Raumelementes und des Semiloof-Elementes in (6) (unter Beachtung der erforderlichen Transformation) liefert Zwangsbedingungen der Form (3), so daß eine Berechnung der Zusatzsteifigkeitsmatrix nach (5) erfolgen kann. In den Vektor  $v$  gehen sämtliche Freiheitsgrade der zu koppelnden Elemente ein. Die Auswertung des Integrals (5) über den Kontaktbereich stellt sich als äußerst kompliziert dar und kann nur numerisch erfolgen. Die numerische Integration wird hier umgangen, indem die Zwangsbedingungen (6) im Sinne der Kollokationsmethode an einigen Punkten der Koppelfläche exakt erfüllt werden. Um die Anzahl der an der Formulierung der Zwangsbedingungen beteiligten Freiheitsgrade und damit den numerischen Aufwand zu reduzieren, werden folgende Kollokationspunkte gewählt:

- die 3 Knotenpunkte des Semiloof-Elementes für die Zwangsbedingungen der Verschiebungskoppelung,
- die 2 Gauß-Punkte auf der Seite des Semiloof-Elementes für die Zwangsbedingung der Biegewinkelkoppelung.

Vom Semiloof-Element und vom 3D-Element gehen so nur die Freiheitsgrade der zu koppelnden Elementseiten ein. Bei einer Koppelung Semiloof/3D-Viereckseite ergeben sich 35 Freiheitsgrade (die Matrix  $K_z$  hat das Format  $35 \times 35$ ).

Mit den Formfunktionen der Oberfläche des Raumelementes  $G_L^*(\xi_1, \xi_2)$  ( $L=1 \dots N$ ,  $N$ -Anzahl der Knoten auf der Fläche) und den Formfunktionen für die Approximation der Geometrie der Kontaktlinie des Semiloof-Elementes  $N_K(\eta)$  ( $K=1, 2, 3$  entsprechen den Knotennummern 9, 10, 11 in Bild 4)

$$G_1^* = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(-\xi_1-\xi_2-1)$$

$$G_2^* = \frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2^2)$$

⋮

$$N_1 = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)$$

$$N_2 = 1-\eta^2$$

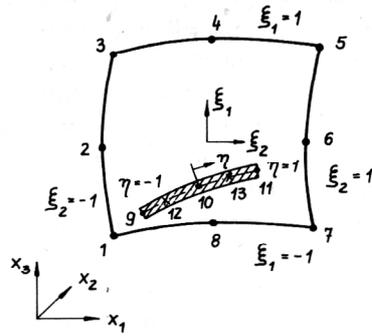
$$N_3 = \frac{1}{2}\eta(1+\eta)$$

lassen sich die erforderlichen Berechnungen ausführen.

#### Koppelung der Verschiebungsfreiheitsgrade

Die 9 Zwangsbedingungen (6) für die Verschiebungsfreiheitsgrade an den Knoten des Semiloof-Elementes lauten:

$$\sum_{L=1}^N G_L^*(\xi_{1p}, \xi_{2p}) u_{iL} - u_{ip} = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ p = 9, 10, 11 \end{matrix} \quad (7)$$



**Bild 4**  
Lage der Koppelfläche auf der Oberfläche des Hexaederelementes

#### Koppelung der Biegewinkel

Die zwei restlichen Zwangsbedingungen ergeben sich aus der Koppelung der Biegewinkel an den GAUSS-Punkten der Kontaktlinie (Bild 4):

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x'_3} \right|_p - \vartheta_p = 0 \quad p = 12, 13 \quad (8)$$

Um die Ableitungen am Raumelement bestimmen zu können, sind einige Transformationen erforderlich. Die Lage des lokalen Koordinatensystems  $x'_1$  (Bild 3) ist durch die Richtungskosinus  $c_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$  bestimmt, die sich folgendermaßen berechnen lassen (über gleiche Indizes  $i, j, k$  ist von 1 bis 3 zu summieren):

$$\vec{\xi}_1 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \vec{e}_i; \quad \vec{\xi}_2 = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \vec{e}_i \quad (9)$$

$$x_i = \sum_{L=1}^N G_L^*(\xi_1, \xi_2) x_{iL} \quad (10)$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{\xi}_2 \times \vec{\xi}_1}{|\vec{\xi}_2 \times \vec{\xi}_1|} = c_{1i} \vec{e}_i \quad (11)$$

$$\vec{\eta} = \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \vec{e}_i \quad (12)$$

$$x_i = \sum_{p=9}^{11} N_p(\eta) x_{ip} \quad (13)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{\eta}}{|\vec{\eta}|} = c_{2i} \vec{e}_i \quad (14)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = c_{3i} \vec{e}_i \quad (15)$$

Mit Hilfe der so bestimmten Richtungskosinus kann die Transformation der Ableitung in (8) auf das globale kartesische Koordinatensystem durchgeführt werden:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x'_3} \right|_p = c_{1i} c_{3j} \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_p \quad (16)$$

Um den Ausdruck (16) berechnen zu können, muß noch die Transformation auf das lokale  $\xi_1$ -Koordinatensystem erfolgen. Das geschieht mit Hilfe der inversen Jacobi-Matrix des Raumelementes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

mit

$$\mathbf{R} = \mathbf{J}^{-1} \quad (18)$$

und den Elementen der Jacobischen Matrix

$$J_{kl} = \frac{\partial x_l}{\partial \xi_k} = \sum_{L=1}^M \frac{\partial G_L}{\partial \xi_k} x_{lL} \quad (19)$$

M-Anzahl der Knoten des Raumelementes,  $G_L$ -Formfunktionen des Raumelementes.

Einsetzen der Formfunktionen der Vierecksfläche  $G_L^*$  in (16) liefert schließlich

$$\left. \frac{\partial u_1'}{\partial x_3} \right|_p = c_{1i} c_{3j} R_{jk} \sum_{L=1}^N \left. \frac{\partial G_L^*}{\partial \xi_k} \right|_p u_{iL} \quad (20)$$

Damit sind die Ableitungen in (8) durch die Knotenverschiebungen der Seitenfläche des Raumelementes ausgedrückt. Die beiden Zwangsbedingungen für die Biegewinkel nehmen dann folgende Form an:

$$c_{1i} c_{3j} R_{jk} \sum_{L=1}^N \left. \frac{\partial G_L^*(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_k} \right|_p u_{iL} - \vartheta_p = 0 \quad (21)$$

$p = 12, 13$

Die 9 Gleichungen (7) und die 2 Gleichungen (21) lassen sich in die Form (3) bringen, wobei  $\mathbf{Z}$  das Format  $11 \times (3N + 11)$  hat. Der Vektor  $\mathbf{v}$  enthält bei einer Vierecksfläche 35 an der Koppelung beteiligte Knotenfreiheitsgrade (siehe Bild 4):

$$\mathbf{v}^T = [\underbrace{u_{11}, u_{21}, u_{31}, \dots, u_{38}}_{\text{Hexaeder}} ; \underbrace{u_{19}, u_{29}, \dots, u_{311}, \vartheta_{12}, \vartheta_{13}}_{\text{Semiloof}}] \quad (22)$$

Die Zusatzsteifigkeitsmatrix ergibt sich aus

$$\mathbf{K}_Z = \alpha \cdot \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \quad (23)$$

Ermittlung der lokalen Koordinaten eines Punktes P

In den Gleichungen (7) und (21) wird vorausgesetzt, daß die lokalen  $\xi_{ip}$ -Koordinaten des Punktes P bekannt sind. Die Geometriebeschreibung erfolgt jedoch durch Eingabe der globalen kartesischen Koordinaten  $x_{ip}$  für die Knotenpunkte des Schalelementes. Nach dem isoparametrischen Elementkonzept gilt für einen Punkt P im 3D-Element der Zusammenhang

$$x_{ip} = \sum_{L=1}^M G_L(\xi_{1p}, \xi_{2p}, \xi_{3p}) x_{iL} \quad (24)$$

mit den Formfunktionen  $G_L$  [16]. Da die Gleichungen (24) nicht nach den  $\xi_{ip}$  aufgelöst werden können, werden die lokalen Koordinaten iterativ als Nullstellen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$f_i = x_{ip} - \sum_{L=1}^M G_L(\xi_{1p}, \xi_{2p}, \xi_{3p}) x_{iL} \quad (25)$$

berechnet.

Für die Lösung hat sich das Newton-Raphsonsche Verfahren bewährt, bei dem die  $\xi_{ip}$  in der Regel mit 3 Iterationsschritten (Startvektor  $\xi_{ip} = 0$ , Fehlerschranke  $\epsilon = 10^{-3}$ ) aus folgender Rekursionsformel bestimmt werden können:

$$\xi_{ip+1} = \xi_{ip} - \mathbf{J}_{ij}^{-1} f_j(\xi_{1p}, \xi_{2p}, \xi_{3p}) \quad (26)$$

mit

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \right|_p = - \sum_{L=1}^M \left. \frac{\partial G_L}{\partial \xi_j} \right|_p x_{iL} \quad (27)$$

$i, j = 1, 2, 3$

### 3. Testbeispiele

Die programmtechnische Realisierung von Zwangsbedingungen der Art, wie sie im Abschnitt 2 beschrieben sind, stellt im Rahmen des universellen FEM-Programmsystems COSAR kein Problem dar [18]. Die Ursache dafür ist in der Konzeption von COSAR als „offenes“ System mit vielfältigen Erweiterungsmöglichkeiten (z. B. Elementkataloge [17], Randbedingungen, Belastungen usw.) zu sehen, die speziell durch Schnittstellen in der Datenstruktur des rechnerinternen Modells und der Programmstruktur unterstützt werden [19].

Der Nutzer muß für jedes Koppelpaar 3D-Element/Schalelement über Eingabedaten im Datenblock ++COUP die Zuordnung der Elementnummern und die Beschreibung der Koppelfläche (Knotennummern) vornehmen. Die Koppelvariante wurde umfassend getestet, wobei zum Vergleich Rechnungen mit anderen FEM-Vernetzungen und analytische Lösungen benutzt wurden. Die Ergebnisse für den Kragbalken nach Surana [5] sind nachfolgend ausführlich dargestellt.

Kragbalken nach Surana [5]

Für den im Bild 5 dargestellten Kragbalken ist in [5] eine Vielzahl von Ergebnissen für die Verschiebungen zusammengestellt, die unter Verwendung eines von Surana entwickelten Übergangselementes Hexaeder/dickes Schalelement erzielt wurden. Diese Ergeb-

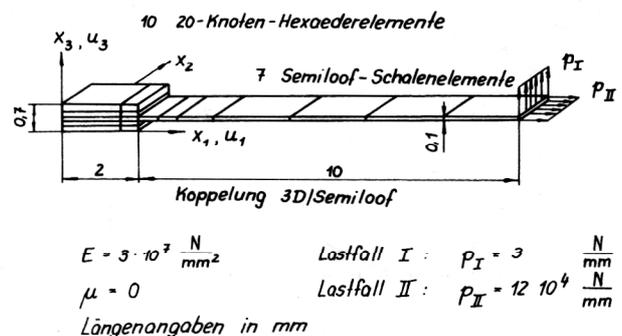


Bild 5  
Kragbalken nach Surana [5]

**Tabelle 1**  
Verschiebungen über der Längsachse des Kragbalkens (Bild 5)  
( $x_2=0, x_3=0,35$ )

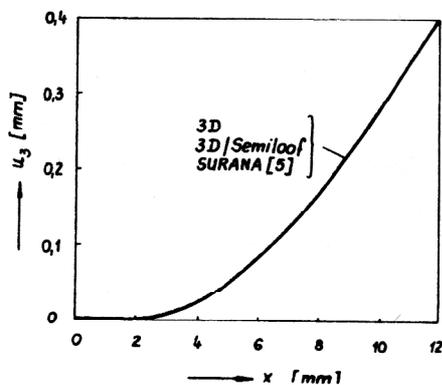
Lastfall	$u_i \cdot 10^4$ [mm]	Modell	$x_1$			
			1,5	2,0	3,0	12,0
I	$u_3$	3D (grob)	0,456	0,804	61,216	3994,4
		3D (fein)	0,456	0,835	62,24	3994,9
		3D Semil.	0,456	0,804	61,376	4026,5
II	$u_1$	3D (grob)	86,2	141,8	541,1	4141,0
		3D (fein)	87,06	150,1	547,6	4149,2
		3D Semil.	85,7	148,8	548,8	4148,8

**Tabelle 2**  
Verschiebungen über der Höhe des Kragbalkens (Bild 5)  
( $x_1=2,0, x_2=0$ )

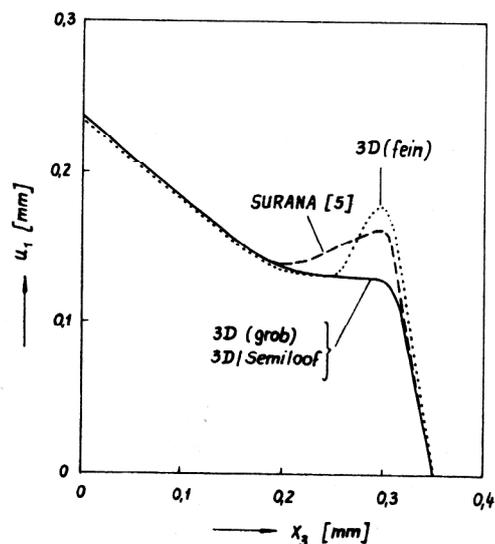
Lastfall	$u_i \cdot 10^4$ [mm]	Modell	$x_3$			
			0	0,2	0,25	0,3
I	$u_1$	3D (grob)	0,239	0,135	0,131	0,129
		3D (fein)	0,237	0,137	0,129	0,179
		3D Semil.	0,239	0,135	0,131	0,129
II	$u_1$	3D (grob)	99,28	113,2	125,5	139,4
		3D (fein)	92,77	111,71	122,18	143,67
		3D Semil.	90,07	112,7	125,5	140,1

nisse werden nachfolgend mit der hier vorgestellten Koppelvariante und zwei verschieden feinen vollständig dreidimensionalen Rechnungen verglichen. Bei der groben 3D-Vernetzung entspricht die Elementaufteilung der Darstellung in Bild 5 (statt der Schalenelemente werden lediglich gleich große Hexaederelemente benutzt, die feine 3D-Vernetzung weist in Richtung der Achsen  $x_3$  und  $x_1$  eine doppelt so feine Elementaufteilung auf. Einige Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 und in den Bildern 6 und 7 angegeben. Die mit der Koppelung 3D/Semiloof berechneten Ergebnisse stimmen gut mit den 3D-Rechnungen überein. Die in Bild 7 zu erkennende Abweichung der Verschiebungen  $u_1$  in der unmittelbaren Umgebung des Übergangsbereiches von der kom-

pakten zur dünnwandigen Teilstruktur sind eine Folge der zu groben Vernetzung in diesem Bereich. Hier liefert das genauere Übergangselement von Surana offenbar etwas bessere Ergebnisse. Die Ergebnisse der Rechnung mit der Koppelung 3D/Semiloof stimmen sehr gut überein mit der entsprechenden groben 3D-Rechnung. Das trifft auch auf die Spannungen zu.



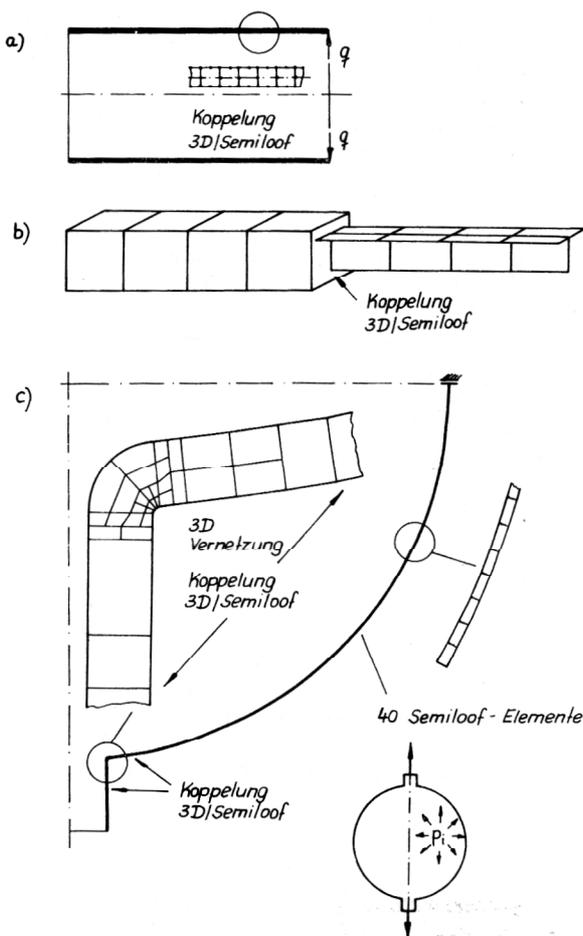
**Bild 6**  
Verschiebung in Richtung der Achse  $x_3$  aufgetragen über der Längsachse des Kragbalkens (Bild 5) infolge des Lastfalles I



**Bild 7**  
Verschiebung in Richtung der Achse  $x_1$  aufgetragen über der Höhe des Kragbalkens (Bild 5) bei  $x_1=2$  mm infolge des Lastfalles I

## Weitere Testbeispiele

Einige weitere Beispiele zum Test der vorgestellten Koppelvariante enthält Bild 8. Die Lösungen sind in [18] zusammengestellt, eine ausführliche Bewertung der Ergebnisse für das Beispiel 8c) ist [17] zu entnehmen. Das Beispiel 8a) wurde benutzt, um durch Vergleich mit der analytischen Lösung den durch die Koppelung hervorgerufenen Fehler festzustellen. Dabei zeigt sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der analytischen Lösung, sowohl für die Verschiebungen als auch die Spannungen und zwar auch unmittelbar an der Koppelstelle (Aufteilung 20 Elemente: Fehler der maximalen Verschiebung unter der Ringlast 0,06 % und an der Koppelstelle 0,7 %; Fehler der Spannungen an der Koppelstelle 2,7 % und im übrigen Bereich in der Größenordnung von 1 %). Das Beispiel 8b) soll der Demonstration einer extremen Koppelmöglichkeit dienen. Trotz der groben Modellierung zeigen die Ergebnisse eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit der Biegebalkenlösung (3 % Fehler in der Absenkung unter der Last, 6,5 % Fehler in der Spannung an der Einspannung).



**Bild 8**

Zusammenstellung weiterer Testbeispiele für die 3D/Semiloof-Schalenkoppelung

- Zylinderschale (rotationssymmetrisch) unter Randlinienlast
- Kragbalken mit Koppelung eines T-Profiles an ein 3D-Element
- Kugel mit Stützenabzweig unter Innendruck und Zugkräften an den Stützen

Das Beispiel 8c) demonstriert eine praktische Anwendungsmöglichkeit der entwickelten Koppelvariante. Die räumlich durchgeführte Rechnung (es wurde ein Sektor von  $30^\circ$  vernetzt) wurde mit einer rotationssymmetrischen Rechnung verglichen und auch hier eine ausgezeichnete Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt. Die maximalen Abweichungen in den Spannungen im Koppelbereich liegen bei ca. 5 %. Mit der gewählten Vernetzung ist eine sehr genaue dreidimensionale Analyse der Spannungsverteilung im Anschlußbereich des Stützens möglich, während im übrigen Bereich eine Berechnung als Schalentragwerk erfolgt. In diesem Beispiel wurden darüber hinaus die in [11] angegebenen Elemente zur unkonventionellen Netzverfeinerung erfolgreich eingesetzt (siehe Bild 8c) und dadurch eine problemlose Netzverfeinerung im unmittelbaren Übergangsbereich Stützen/Kugel erreicht.

## 4. Wahl der Penalty-Zahl

Die Wahl einer geeigneten Penalty-Zahl wird in der Literatur als ein wesentliches Problem bei der Anwendung der Penalty-Methode genannt. Sowohl eine zu große als auch eine zu kleine Penalty-Zahl führen zu einer unzureichenden Erfüllung der Zwangsbedingungen, wobei im Extremfall die Steifigkeitsmatrix singulär wird. Zwischen diesen beiden Extremwerten gibt es jedoch einen mehrere Zehnerpotenzen umfassenden Bereich, in dem die Penalty-Zahl variieren kann, ohne daß ein wesentlicher Einfluß auf die Ergebnisse festzustellen ist. Dieser Bereich hängt ab von der Wortlänge des Rechners und der Größe der Zahlenwerte in der Steifigkeitsmatrix. Da bei der FEM die Rechnungen aus numerischen Gründen in der Regel mit doppelt genauen Real-Werten (mindestens jedoch 48 Bit) durchzuführen sind und bei mechanisch sinnvollen Aufgabenstellungen keine extremen Differenzen in der Größe der Elemente der Steifigkeitsmatrix vorhanden sind, ist die Wahl einer geeigneten Penalty-Zahl unproblematisch und kann rechnerintern automatisch erfolgen.

Im Programmsystem COSAR wird die Penalty-Zahl  $\alpha$  aus

$$\alpha = d \cdot \max k_{ij} \quad (28)$$

mit

$$d = 10^{p/2} \quad (29)$$

ermittelt, wobei  $\max k_{ij}$  das größte Hauptdiagonalelement der Steifigkeitsmatrix und  $p$  die maximale Anzahl der im Rechner darstellbaren Dezimalstellen ist. Für das REAL\*8-Wort (64 Bit) ergibt sich  $d = 10^7$  als Standardwert, mit dem man bei gleich großen Steifigkeitswerten etwa in der Mitte zwischen den beiden Extremwerten liegt. Durch zahlreiche Tests an praktischen Beispielen mit einer Vielzahl unterschiedlicher Zwangsbedingungen und unterschiedlicher Steifigkeiten (z. B. durch Verwendung verschiedener Materialien in einer Struktur) wurde die Wahl der Penalty-Zahl abgesichert. Tabelle 3 gibt den prozentualen Fehler der maximalen Verschiebung (bezogen auf die Verschiebung bei  $d = 10^7$ ) für einen Kragbalken nach Bild 5 an.

**Tabelle 3**

Prozentuale Abweichung der Durchbiegung eines Kragbalkens nach Bild 5 in Abhängigkeit von der Größe der Penalty-Zahl

i	$\epsilon$ [%]	
2	0,66	
3	0,066	
4	0,0066	
5	0,00064	
6	0,000052	Penalty-Zahl
7	0	$\alpha = 10^i \cdot \max k_{jj}$
8	0,000025	$\epsilon = \frac{u(i=7) - u(i)}{u(i=7)} \cdot 100 \%$
9	0,00021	
10	0,0011	
11	0,069	$i \geq 13$ Matrix singulär
12	-0,14	

Andere Verschiebungskomponenten und die Biege- winkel liefern die gleiche Größenordnung des Fehlers. Auf die Angabe von Spannungswerten konnte bei diesem Beispiel verzichtet werden, da diese nahezu über das gesamte Spektrum der Penalty-Zahlen keine nennenswerten Abweichungen aufweisen.

## 5. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist ein Verfahren zur Koppelung von Semiloof-Schalenelementen und Raumelementen dargestellt. Die Koppelung erfolgt durch Formulierung geeigneter Zwangsbedingungen für die Verschiebungen und die Biege- winkel und deren Einarbeitung in die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems mittels Penalty-Methode. Die vorgestellte Strategie ist auch anwendbar für die Realisierung einer mechanisch sinnvollen Verknüpfung anderer Elementtypen.

Durch die Möglichkeit der Koppelung von Vollkörper- und Schalenelementen wird eine effektive Berechnung von Bauteilen und Tragwerken erreicht, die aus kompakten und dünnwandigen Teilen bestehen. Im Vergleich zu einer vollständig dreidimensionalen Berechnung wird mit einem geringeren Aufwand für die Datengenerierung und die Durchführung der Rechnung (Rechenzeit) eine höhere Genauigkeit in den dünnwandigen Teilen erreicht. Die Qualität der auf diesem Weg erzielten Koppelung wird an Hand von Testbeispielen nachgewiesen. Durch die Zwangskoppelung wird das Gesamtverhalten des Berechnungsmodells nicht beeinflusst; die Störungen im unmittelbaren Koppelbereich sind gering und klingen bereits innerhalb eines angrenzenden Elementes vollständig ab. Die Testrechnungen widerlegen eindeutig die von Surana [5] geäußerte Meinung, daß bei einer Zwangskoppelung große Fehler im Übergangsbereich auftreten und nur mit speziellen Übergangselementen eine einwandfreie Verbindung zu erzielen ist. Es läßt sich vielmehr feststellen, daß die Zwangskoppelung mittels Penalty-Methode eine wesentlich leichter zu realisierende, sehr effektive und ausreichend genaue Ergebnisse liefernde Strategie zur mechanisch sinnvollen Verknüpfung unterschiedlicher Elementtypen ist.

Im Gegensatz dazu erfordert die Entwicklung von speziellen Übergangselementen (falls dieses überhaupt gelingt) und deren programmtechnische Realisierung im Rahmen eines universellen Programmsystems einen

wesentlichen höheren Aufwand und ist mit einer Reihe von Konsequenzen verbunden. So ist es beispielsweise für die praktische Nutzung erforderlich, Übergangselemente mit ein- und zweiseitiger Koppelmöglichkeit zu haben, es müssen für diese Elemente neben den Moduln zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen, Moduln für die Elementkraftvektoren (Volumen-, Temperatur-, Flächen- und Linienlasten), die Massenmatrizen, gegebenenfalls für Temperaturfeldberechnung, für die Spannungsberechnung, grafische Darstellung von Vernetzungen und Ergebnissen und vieles andere mehr zusätzlich geschaffen werden.

Unter Beachtung dieser Tatsache und der sehr guten Ergebnisse, die mit der Koppelung durch Zwangsbedingungen erzielt wurden, ist dieser Strategie im Rahmen eines universellen FEM-Programmsystems eindeutig der Vorzug zu geben.

Falls eine sehr genaue Berechnung der Spannungsverteilung im unmittelbaren Übergangsbereich erforderlich ist, muß in diesem Fall eine dreidimensionale Analyse (z. B. in Form einer Ausschnittanalyse) dieses Bereiches durchgeführt werden.

## LITERATUR

- [1] Brebbia, C. A. (Editor): Finite Element Systems – A Handbook. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1985.
- [2] Bausinger, R.; Groth, P.; Falkenburger, P.: TPS 10 – Ein bewährtes Programmsystem. Berichte der 8. Reutlinger Arbeitstagung Finite-Elemente-Methode in der Praxis, T-Programm GmbH Reutlingen, April 1985, S. 325 – 375.
- [3] Gabbert, U.; Berger, H.; Zehn, M.; Fels, D.: Universelles FEM-Programmsystem COSAR-Übersicht über den nachnutzbaren Leistungsumfang. Maschinentechnik 34 (1985), Heft 8, S. 352 – 356.
- [4] Surana, K. S.: Transition finite elements for axisymmetric stress analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 15 (1980), S. 809 – 832.
- [5] Surana, K. S.: Transition finite elements for three-dimensional stress analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 15 (1980), S. 991 – 1020.
- [6] Surana, K. S.: Shape functions for the isoparametric transition elements for cross-sectional properties and stress analysis of beams. Int. J. Num. Meth. Eng. 15 (1980), S. 1403 – 1407.
- [7] Surana, K. S.: Geometrical nonlinear formulation for the axisymmetric transition finite elements. Computers and Structures 18 (1984), 689 – 694.
- [8] Surana, K. S.: Geometrical nonlinear formulation for the three-dimensional solid-shell transition finite elements. Computer and Structures 15, 549 – 566 (1982).
- [9] Gupta, A. K.: A finite element for transition from a fine to a coarse grid. Int. J. Num. Meth. Eng. 12 (1978), 35 – 45.
- [10] Cavendish, J. C.: Local mesh refinements using rectangular blended finite elements. J. Comp. Physics 19 (1975), 211 – 228.
- [11] Scholz, E.; Altenbach, J.: Kompatible Übergangselemente für lokale Netzverfeinerungen bei 2D- und 3D-Finite-Elemente-Modellen. Technische Mechanik 6 (1985), Heft 2, S. 72 – 78.
- [12] Gabbert, U.: Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktions-Methode. Technische Mechanik 4 (1983), Heft 2, S. 40 – 46.

- [13] Irons, B. M.: The semiloof shell element. in Ashwell, D. G., Gallagher, R. H. (Eds): Finite Elements for Thin Shells and Curved Members. J. Wiley and Sons, London 1976, S. 197 – 222.
- [14] Ptak, S.: Programova dokumentace system SA85 pro vypocty napjatosti masivnich, tenkoskorepinovych a kombinavanych objekta. Technicky Zaznam c SVUSS-05-02301, Praha 1985.
- [15] Ptak, S.: Meinungsaustausch. Magdeburg 1983, Prag 1984.
- [16] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- [17] Fels, D.: Konzeptioneller Aufbau, Implementierung und Testung von Elementkatalogen für universelle Finite-Elemente-Programmsysteme, Diss. TH Magdeburg 1985.
- [18] Jung, M.: Koppelung der Semiloof-Schalenelemente mit 3D-Vollkörperelementen mittels Penalty-Methode. Diplomarbeit TH Magdeburg 1985.
- [19] Gabbert, U.: Aspekte des Software Engineering bei der Entwicklung großer FEM-Programmsysteme. Wiss. Zeitschrift der TH Magdeburg 30(1986), Heft 3, S. 60 – 67.