

Zur Genauigkeit des Übertragungsmatrizenverfahrens bei der Schalenberechnung

Gunter Georgi

0. Einleitung

Die gegenwärtig zur Verfügung stehenden Rechnerprogramme zur Spannungs- und Verformungsermittlung von Flächentragwerken basieren entweder auf der Methode der finiten Elemente oder benutzen das Übertragungsmatrizenverfahren.

Der Diskussion der Genauigkeit der mit dem Übertragungsmatrizenverfahren gewonnenen Ergebnisse ist dieser Beitrag gewidmet.

Die meisten Schalenprobleme lassen sich bei der analytischen Behandlung durch Differentialgleichungssysteme beschreiben. Diese kanonischen Differentialgleichungssysteme haben die Form:

$$\vec{y}' = \underline{B}_1 \vec{y} + \vec{b}_1 \quad (1)$$

oder bei zeitabhängigen Problemen:

$$\vec{y}' = \underline{B}_2 \vec{y} + \vec{b}_2 \quad (2)$$

Dabei bedeuten

\vec{y} – Unbekanntenvektor

\underline{B} – Systemmatrix

\vec{b} – Lastvektor

$$\begin{aligned} (\cdot)' &= \begin{cases} \frac{d(\cdot)}{ds} & \text{in (1)} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} & \text{in (2)} \end{cases} & s - \text{Ortskoordinate} \\ (\cdot)^* &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} & t - \text{Zeit} \end{aligned}$$

Gleichungssysteme der Formen (1) und (2) liegen u. a. folgenden Programmen zugrunde:

- NISCHIA: Berechnung von Rotationsschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten ([1]);
- ROSCHA: Statische und dynamische Berechnung beliebig belasteter Rotationsschalen nach verschiedenen linearen Theorien ([2]);
- EPSCHA: Berechnung physikalisch nichtlinearer beliebiger Schalen ([3]);
- BESCHA: Berechnung harmonischer Schwingungen beliebiger Schalen ([4]);
- SUBSAL: Berechnung von dickwandigen drehsymmetrisch belasteten Rotationsschalen mit elastisch-viskoplastisch-plastischem Materialverhalten ([5]).

Auf das Übertragungsmatrizenverfahren, dessen numerische Stabilisierung durch Landgraf [6] und Herrlich [7] nach der Theorie von Zurmühl [8] erfolgte, soll hier nicht eingegangen werden. Von Interesse ist vielmehr die optimale Schrittweite bei der Ortsintegration.

1. Berechnungsvorschrift für die Schrittweite bei der Ortsintegration

Die Schrittweite darf nicht zu klein sein, da Zentraleinheits- und Transferzeiten sowie der Speicherplatzbedarf auf der EDVA näherungsweise linear von der Anzahl der Abschnitte K , in die der Integrationsbereich eingeteilt wird, abhängen. In [2] sind dazu konkrete Zahlenwerte gegeben.

Andererseits muß die geometrische Diskretisierung aber so fein sein, daß eine dem praktischen Problem angepaßte Genauigkeit erzielt wird. Erforderlich ist also eine Berechnungsvorschrift für die Abschnittslängen Δs_k ($k = 1, \dots, K$), die beiden Forderungen gerecht wird.

Da dazu in den Anwendungsbeschreibungen zu den Programmsystemen nach [1] bis [3] und [4] gar keine oder unbefriedigende Angaben enthalten sind, wurde auf die Fehlerabschätzung von Übertragungsmatrizen, die nach den Formeln von Runge-Kutta aufgestellt wurden, zurückgegriffen. Nach Zurmühl [8] berechnet sich die zulässige Länge des Abschnittes k zu:

$$\Delta s_k \leq \Delta s_{k \text{ zul}} = \frac{\kappa}{\lambda} \quad (3)$$

Die Größe λ steht für den größten Betrag aller Eigenwerte der Systemmatrix \underline{B} :

$$\lambda = \max |\lambda_l(\underline{B})| \quad l = 1, \dots, L \quad (4)$$

L = Anzahl der Komponenten von \vec{y}

κ ist ein die Genauigkeit der Ergebnisse beeinflussender Parameter.

Daraus werden zwei Aufgaben ersichtlich:

1. Festlegung des genauigkeitsbestimmenden Parameters κ
2. Ermittlung des betragsmäßig größten Eigenwertes λ .

2. Festlegung des genauigkeitsbestimmenden Parameters κ

Zurmühl gibt in [8] problemunabhängig $\kappa = 0,1 \dots 0,2$ an. Herrlich [7] läßt für die elastisch-plastische Berechnung von Rotationsschalen $\kappa = 0,5$ zu. Hennig [9] sieht in $\kappa = 1$ die obere Schranke. Schließlich geben Bergander/Resche [10] $\kappa = 1,5 \dots 1,7$ als ausreichend für Schalenberechnungen an. Davon ausgehend, wurden mit SUBSAL zahlreiche Beispielrechnungen durchgeführt, die folgendes Ergebnis brachten:

- 1.) Der Index k wird im weiteren Verlauf dieses Abschnittes und im Abschnitt 3.1. der Übersichtlichkeit wegen weglassen.

Für $\kappa < 0,5$ tritt im Rahmen der Ausgabegenauigkeit keine sichtbare Verbesserung der Ergebnisse auf. Die mit $\kappa = 0,5$ ermittelten Werte werden demzufolge als die „exakten“ angesehen. Unter Zugrundelegung von $\kappa = 1$ ergaben sich die größten Abweichungen zu 1,5 %. Bei Erhöhung von κ auf 1,5 waren Fehler von 5,5 % zu verzeichnen. Geht man davon aus, daß bei praktischen Problemen Geometrie, Belastung und Materialkenngrößen von vornherein mehr oder weniger fehlerbehaftet sind, dann erscheint die Wahl von $\kappa = 1,5$ für Anwendungsfälle durchaus sinnvoll. Daher wird im Programm SUBSAL für den Fall, daß kein anderer Wert gelesen wird, $\kappa = 1,5$ gesetzt. Zur Verdeutlichung der schnellen Zunahme des Fehlers bei einer größeren Unterteilung des Integrationsbereiches wurde die Rechnung noch mit $\kappa = 1,8$ geführt. Hier zeigen sich Fehler von mehr als 10 %, d. h. eine derartige Unterteilung liefert unbrauchbare Ergebnisse.

3. Ermittlung des betragsmäßig größten Eigenwertes λ

3.1. Analytische Ermittlung

Für eine drehsymmetrisch belastete Rotationsschale lassen sich für elastisches Materialverhalten, kleine Verformungen und unter Voraussetzung der bei dünnen Schalen getroffenen Vereinfachungen („vereinfachte Theorie“) die Eigenwerte exakt ermitteln.

Die Koordinate s repräsentiert in diesem Fall die Bogenkoordinate in Meridianrichtung, Δs steht für die Länge eines Schalenabschnittes. Die aus der Systemmatrix B (s. [11] bzw. [2]) erhaltene Eigenwertgleichung lautet:

$$\left\{ \begin{aligned} &(\lambda^2 r^2 - \nu^2 \cos^2 \varphi)^2 - [2(1 - \nu^2) \cos^2 \varphi + \frac{12}{5}(1 + \nu) \sin^2 \varphi] \\ &(\lambda^2 r^2 - \nu^2 \cos^2 \varphi) + (1 - \nu^2)^2 \cos^4 \varphi + \frac{12}{5}(1 - \nu^2) \\ &(1 + \nu) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 12(1 - \nu^2) \frac{r^2}{h^2} \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \lambda^2 = 0 \quad (5)$$

mit

ν – Querkontraktionszahl
 h – Dicke
 r – Breitenkreisradius
 φ – Neigung der Meridiantangenten

} des Schalenabschnittes (Mittelwerte)

Sie hat die Lösungen:

$$\lambda_{5,6} = 0$$

$$\lambda_{1, \dots, 4} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{6}{5}(1 + \nu) \sin^2 \varphi \pm i \sin \varphi \sqrt{12(1 - \nu^2) \frac{r^2}{h^2} - \frac{36}{25}(1 + \nu)^2 \sin^2 \varphi}} \quad (6)$$

Da die Wurzel im Radikanden der Gleichung (6) für alle möglichen Geometrien positiv ist, lautet der betragsmäßig größte Eigenwert schließlich:

$$\lambda = \frac{1}{r} \sqrt{\cos^4 \varphi + 12(1 + \nu) \sin^2 \varphi \left[\frac{1}{5} \cos^2 \varphi + (1 - \nu) \frac{r^2}{h^2} \right]} \quad (7)$$

bzw. für $\nu = 0,3$:

$$\lambda = \frac{1}{r} \sqrt{\cos^4 \varphi + 10,92 \sin^2 \varphi \left(0,2857 \cos^2 \varphi + \frac{r^2}{h^2} \right)} \quad (8)$$

Für $\varphi = 0$ (Platte) erhält man:

$$\lambda_p = \frac{1}{r} \quad \text{Index } p \text{ für „Platte“} \quad (9)$$

Die zulässigen Meridianabschnittslängen sind damit nur dem Radius proportional.

Analog folgt für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (Kreiszylinderschale):

$$\lambda_z = \frac{\sqrt[4]{12(-\nu^2)}}{\sqrt{rh}} \quad \text{Index } z \text{ für „Kreiszylinderschale“} \quad (10)$$

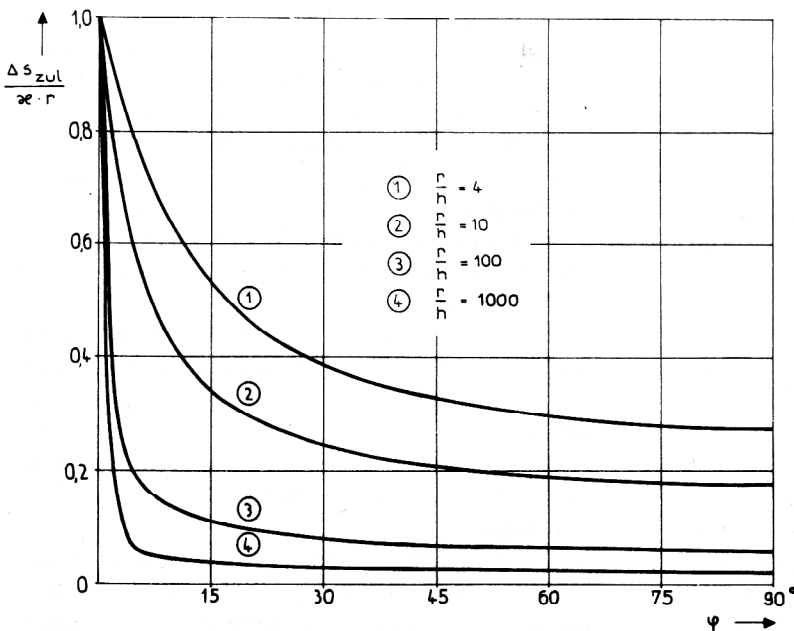


Bild 1
 Abhängigkeit der zulässigen Abschnittslängen von der Meridianneigung

bzw. für $\nu = 0,3$:

$$\lambda_z \approx \frac{1,82}{\sqrt{rh}} \quad (11)$$

Unter Verwendung von Gleichung (8) wurde im Bild 1 die Abhängigkeit

$$\frac{\Delta s_{zul}}{\kappa r} = \frac{\Delta s_{zul}}{\kappa r} \left(\varphi; \frac{r}{h} = \text{konst.} \right)$$

für einige ausgewählte Verhältnisse von $\frac{r}{h}$ dargestellt.

Bild 2 enthält die Graphen der Funktion

$$\frac{\Delta s_{zul}}{\kappa r} = \frac{\Delta s_{zul}}{\kappa r} \left(\varphi = \text{konst.}; \frac{r}{h} \right)$$

für die Winkel $\varphi = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 90^\circ$.

Beide Bilder zeigen recht anschaulich die starke Änderung der zulässigen Abschnittslängen im Bereich kleiner Winkel φ . Diese Tendenz wird durch große Werte des Verhältnisses $\frac{r}{h}$ verstärkt. Bei einem Verhältnis von $\frac{r}{h} = 100$ muß z. B. schon bei $\varphi \approx 15^\circ$ mit den Abschnittslängen des Zylinders gearbeitet werden.

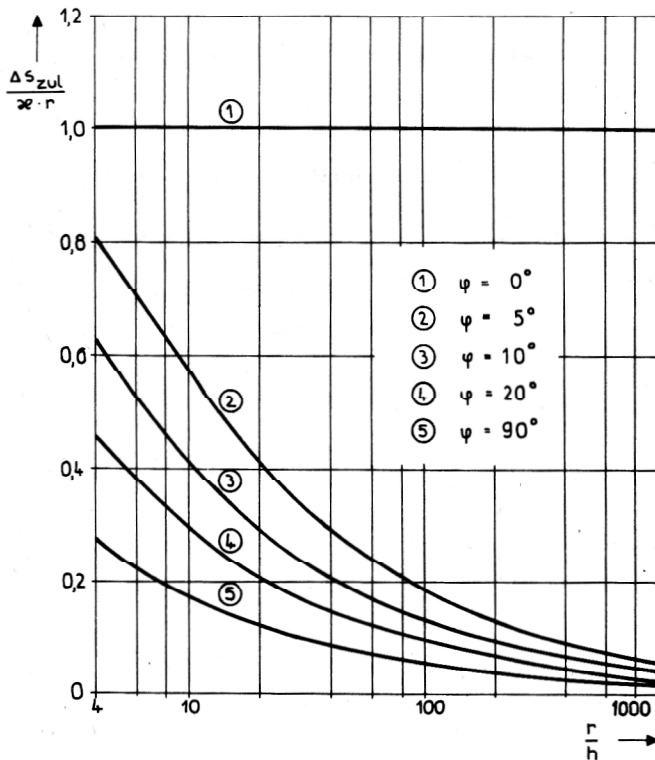


Bild 2
Abhängigkeit der zulässigen Abschnittslängen vom Verhältnis $\frac{r}{h}$

3.2. Numerische Ermittlung

Das Programm SUBSAL enthält ein Segment, das die numerische Ermittlung der zulässigen Abschnittslängen gestattet. Dazu können die Eigenwerte für die Abschnittsmitten bei einer beliebigen Belastung (damit auch bei viskoplastischem und plastischem Materialverhalten und größeren Verformungen) bestimmt

werden. Der Eigenwertermittlung liegt ein modifiziertes Jacobi-Verfahren zugrunde. Dieses Verfahren wurde benutzt, weil hierfür ein anwendungsfähiges und effektives Unterprogramm bereits zur Verfügung stand. Im Ausgabeprotokoll erhält man die Abschnittsnummer k , die gewählte Schrittweite Δs_k , die zulässige Schrittweite $\Delta s_{kzul} = \frac{\kappa}{\lambda_k}$ und das Verhältnis

$\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{kzul}} = \delta s_k$. Außerdem werden noch der Mittelwert

$$\delta s_{mit} = \frac{\sum_{k=1}^K \delta s_k}{K}$$

und der Maximalwert

$$\delta s_{max} = \max(\delta s_k)$$

ausgegeben.

Ist $\delta s_{mit} > 1$ oder $\delta s_{max} > 1,5$, dann wird die Rechnung abgebrochen, ist dagegen $\delta s_{mit} < 0,5$, erfolgt die Mitteilung, daß die Rechnung uneffektiv ist.

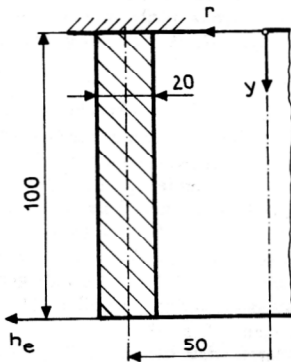
4. Schlußfolgerungen

Mit Hilfe des Programmes SUBSAL wurde über die numerische Ermittlung der Eigenwerte die Antwort auf eine Reihe praktisch interessierender Fragen gegeben:

- Die Richtigkeit der analytisch ermittelten Eigenwerte konnte bestätigt werden. Die Formeln (7) bzw. (8) sind damit geeignet, die Unterteilung in Meridianrichtung optimal zu gestalten.
- Die Berücksichtigung des Trapezeffektes, der Querkraftschubverzerrungen und anderer Korrekturglieder („genauere Theorie“) bringt bei elastischer Beanspruchung eine vernachlässigbar kleine Änderung der zulässigen Abschnittslängen.
- Bei Belastungserhöhung (Temperatur bleibt konstant) ändern sich die Δs_{kzul} unwesentlich, solange der Werkstoff elastisch bleibt. Bei größeren Verformungen ist die Veränderung von r , h und φ zu beachten.
- Kommt es in einzelnen Bereichen der Meridianabschnitte zum Fließen des Materials, dann nehmen die dazugehörigen zulässigen Meridianabschnittslängen stark zu. Bis zum Erreichen der Traglast nehmen die Werte wieder ab, ohne jedoch die ursprüngliche Größe wieder zu erreichen. Diese Effekte sind bei der vereinfachten Theorie viel deutlicher ausgeprägt als bei der genaueren.
- Viskoplastisches Materialverhalten beeinflusst die zulässigen Abschnittslängen nicht direkt, da die Glieder, die die viskoplastischen Anteile enthalten, im Lastvektor des Gleichungssystems stehen. Zu beachten sind jedoch die Temperaturabhängigkeit der Materialkenngrößen und die möglicherweise größeren Verformungen.
- Die beiden letzten Aussagen erlauben den Schluß, daß die unter Voraussetzung elastischen Materialverhaltens gewonnene Unterteilung auch bei plastischem und viskoplastischem Materialverhalten anwendbar ist.

– Setzt man damit die Brauchbarkeit der Anfangsunterteilung auch für höhere Belastungen voraus, dann bietet sich die Möglichkeit, vor dem Start der eigentlichen numerischen Rechnung die Unterteilung automatisch vornehmen zu lassen. Diese Maßnahme würde zu einer Verminderung des Aufwandes bei der Datenaufbereitung beim Programmnutzer führen. Neu zu erstellende Programme sollten von dieser Möglichkeit Gebrauch machen.

Zur Illustration einiger dieser Schlussfolgerungen soll folgendes Beispiel dienen: Die in Bild 3 dargestellte Kreiszyklinderschale aus elastisch-idealplastischem Material wird durch eine Ringlast in radialer Richtung h_e beansprucht. Die Belastung wird vom Wert Null an über die elastische Grenzlast h_{eGr} hinaus bis zur Traglast h_{eTr} gesteigert. Für diesen Belastungsverlauf sind in Bild 4 die zulässigen Abschnittslängen für den letzten Meridianabschnitt (am freien Rand) sowohl nach der vereinfachten als auch nach der genaueren Theorie aufgetragen.



Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$
 Fließgrenze $\sigma_f = 2 \cdot 10^2 \text{ MPa}$

LITERATUR

- [1] Röhle, H.; Ulbricht, V.: Berechnung von Rotationschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten. Diss. TU Dresden 1976.
- [2] Hellmann, V.: Die statische und dynamische Berechnung beliebig belasteter Rotationsschalen nach verschiedenen linearen Theorien. Diss. TU Dresden 1978.
- [3] Weber, D.: Berechnung physikalisch nichtlinearer beliebiger Schalen. Diss. B TU Dresden 1983.
- [4] Lenssen, St.: Die numerische Berechnung harmonischer Schwingungen beliebiger Schalen. Diss. TU Dresden 1984.
- [5] Georgi, G.: Die Berechnung von dickwandigen dreh-symmetrisch belasteten Rotationsschalen mit elastisch-viskoplastisch-plastischem Materialverhalten, Anwendungsbeschreibung, TU Dresden 1984.
- [6] Landgraf, G.: Berechnung beliebig belasteter Rotationsschalen mit und ohne Berücksichtigung der Querkraftschubverzerrung. Habil.-Schrift TU Dresden 1969.
- [7] Herrlich, O.: Die Berechnung des elastisch-plastischen Verhaltens von rotationssymmetrisch belasteten Rotationsschalen unter Berücksichtigung endlicher Verformungen. Habil.-Schrift 1969.
- [8] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 5. Auflage. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1965.
- [9] Hennig, K.: Numerische Verfahren zur Integration des linearen Differentialgleichungssystems der Rotationsschale. Vorträge zum Problemseminar „Flächentragwerke“, Heft 1/74.
- [10] Bergander, H.; Resche, G.: Berechnung viskoplastischer Flächentragwerke im nichtlinearen Bereich. Techn. Mechanik 6 (1985) Heft 1.
- [11] Georgi, G.: Die Berechnung von dickwandigen dreh-symmetrisch belasteten Rotationsschalen mit elastisch-viskoplastisch-plastischem Materialverhalten. Diss. B TU Dresden (eingereicht).

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Gunter Georgi
 Technische Universität Dresden
 Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
 DDR – 8027 Dresden, Mommsenstr. 13

Bild 3
 Geometrie und Belastung der Kreiszyklinderschale

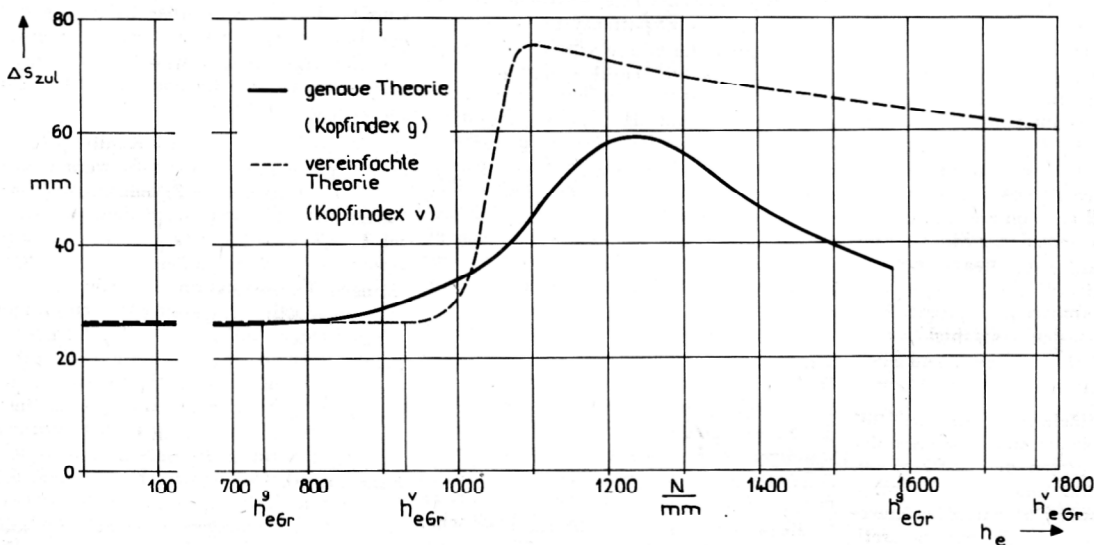


Bild 4
 Zulässige Abschnittslängen in Abhängigkeit von der Belastung