

# Zur Stabilität starr ummantelter Ringe und Kreiszyinderschalen unter radialem Außendruck

Hans Gläser

## Einleitung

Die Kenntnis der kritischen Beullasten ummantelter Ringe und Kreiszyinderschalen ist z. B. für die Verlegung dünnwandiger Rohre in geologischen Medien im Kraftwerksanlagenbau, für die Auskleidung von Schächten aber auch für Dichtheitsprüfungen geschweißter Innenauskleidungen im chemischen Apparatebau bedeutungsvoll. Im vorliegenden Beitrag sollen die numerischen Ergebnisse aus Untersuchungen, die rein elastisches Materialverhalten der kritischen Beullastermittlung zugrunde legen mit denen, die die Fließspannung hierbei berücksichtigen, auf ihre praktische Verwendung, speziell zur Bestimmung des zulässigen Dichtheitsprüfdruckes geschweißter Innenauskleidungen, abgeschätzt werden. Dabei wird nach einer umfangreicheren Recherche einschlägiger Beiträge im wesentlichen auf die Untersuchungen von H. Hain [1] und S. Jacobsen [2] Bezug genommen.

## 1. Zur Stabilität des gebetteten elastischen Kreisringes unter radialem Außendruck

Die klassische Stabilitätstheorie geht von der Vernachlässigung der Verformung des Grundzustandes und der Linearität der Beziehungen zwischen den beim Ausbeulen zusätzlich auftretenden Verformungen und Schnittkräften aus.

Die äußeren Kräfte (konstanter, radialer Außendruck) wirken normalentreu.

Im Kontaktbereich der Beulfigur mit der Umgebung wird in [1] für die radialen Bettungskräfte näherungsweise die Gültigkeit des Winklerschen Gesetzes  $p = -c \cdot w$  angenommen. Die starre Ummantelung ergibt sich als Sonderfall.

Tangential wirkende Bettungskräfte werden vernachlässigt. Dies soll auch näherungsweise für den Fall der starren Ummantelung vorausgesetzt werden, denn die vor allem beim einwelligen Beulen mit der Umfangsstauung des Ringes verbundenen Schubkräfte zwischen Ring und Ummantelung wirken stabilisierend.

Die Differentialgleichungen für das Knickproblem des elastisch gebetteten Kreisringes werden bei Berücksichtigung einer möglichen Umfangsdehnung der Ringmittelfläche aus dem Potential der Kreiszyinderschale durch den Grenzübergang zum ebenen Deformationszustand gewonnen. Für den Kontaktbereich gilt:

$$\delta^2 \pi = \int_{-\bar{\alpha}}^{+\bar{\alpha}} [-p(\bar{w}_{,\varphi}^2 - \bar{w}^2) + \frac{E \cdot h}{(1-\nu^2)r} (\bar{v}_{,\varphi} - \bar{w})^2]$$

$$+ \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)r^3} (\bar{w} - \bar{w}_{,\varphi\varphi})^2 + r \cdot c \cdot \bar{w}^2] d\varphi \quad (1)$$

Die zugehörigen Eulerschen Differentialgleichungen heißen

$$p(\bar{w}_{,\varphi\varphi} + \bar{w}) + \frac{E \cdot h}{(1-\nu^2)r} (\bar{w} - \bar{v}_{,\varphi}) + \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)r^3} (\bar{w}_{,\varphi\varphi\varphi\varphi} + 2\bar{w}_{,\varphi\varphi} + \bar{w}) - r \cdot c \cdot \bar{w} = 0$$

$$\bar{w}_{,\varphi} - \bar{v}_{,\varphi\varphi} = 0 \quad (2)$$

bzw. zusammengefaßt zu einer Differentialgleichung für die radiale Verschiebung

$$\bar{w}_{,\varphi\varphi\varphi\varphi} + (2+a)\bar{w}_{,\varphi\varphi\varphi} + (1+a+b)\bar{w}_{,\varphi} = 0$$

$$\bar{v} = \int \bar{w} \cdot d\varphi + C_0 \bar{\varphi} + C_1 \quad (3)$$

Beim Stabilitätsproblem der starr ummantelten Auskleidung interessieren speziell die Differentialgleichung und deren Lösung für den nicht gebetteten Bereich. Diese folgen aus dem Integral von (2) und Streichung der mit c behafteten Glieder zu

$$w = C_1 + C_2 \cdot \cos \lambda \varphi + C_3 \cdot \sin \lambda \varphi + C_4 \cdot \cos \varphi + C_5 \cdot \sin \varphi$$

$$v = C_0 + (1 + \frac{1+a}{12 \cdot r^2/h^2}) C_1 \cdot \varphi + \frac{1}{\lambda} C_2 \cdot \sin \lambda \varphi - \frac{1}{\lambda} C_3 \cdot \cos \lambda \varphi + C_4 \cdot \sin \varphi + C_5 \cdot \cos \varphi \quad (4)$$

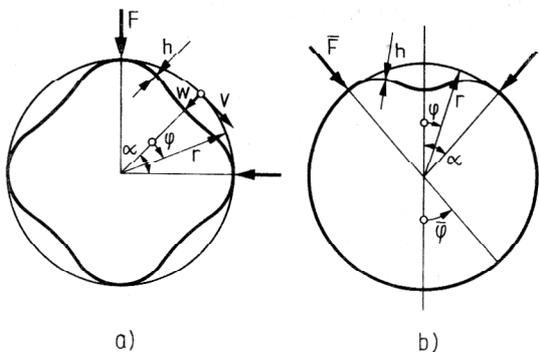
Die überstrichenen Größen beziehen sich auf den Kontaktbereich bzw. elastisch gebetteten Bereich, die nicht überstrichenen auf den nicht gebetteten.

$\varphi, \bar{\varphi}$  : Winkelkoordinate  
 $\alpha, \bar{\alpha}$  : halber Öffnungswinkel des nicht bzw. gebetteten Bereiches  
 $w, \bar{w}$  : radiale Verschiebung des Kreisringes  
 $v, \bar{v}$  : tangentielle Verschiebung des Kreisringes

$$\lambda = \sqrt{1+a}$$

$$a = \frac{p \cdot r^3}{E \cdot I^*}$$

$$I^* = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5)$$



**Bild 1**  
a) mehrwelliges Beulen  
b) einwelliges Beulen

Der Kreisring mit starrer Ummantelung zeigt bei Instabilität zwei mögliche Beulformen:

- a) rotationssymmetrisches oder mehrwelliges Beulen
- b) asymmetrisches oder einwelliges Beulen.

zu a) *mehrwelliges Beulen*

Es sind die Lösungen für den nicht gebetteten Bereich (4) maßgebend. Die Integrationskonstanten  $C_0 \dots C_5$  werden aus den folgenden Symmetrie- und Randbedingungen bestimmt.

$$v(\varphi=0) = 0, \quad w_{,\varphi}(\varphi=0) = 0, \quad F_{\varphi}(\varphi=0) = 0, \quad (6)$$

$$v(\varphi=\pm\alpha) = 0, \quad w_{,\varphi}(\varphi=\pm\alpha) = 0, \quad w(\varphi=\pm\alpha)$$

Damit erhält man aus (4) die Beulbedingung zu

$$\left(1 + \frac{1+a}{12 \cdot r^2/h^2}\right) \alpha (\cos\lambda\alpha \cdot \sin\alpha - \lambda \cdot \sin\lambda\alpha \cdot \cos\alpha) + (\lambda - \frac{1}{\lambda}) \sin\lambda\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \quad (7)$$

zu b) *einwelliges Beulen*

Die von Hain angegebene numerische Auswertung der Beulbedingung (7) zeigt, daß die auftretenden Beullasten für beliebige  $r/h$ -Verhältniszahlen stets wesentlich höher liegen als im Falle des einwelligen Beulens, d. h. bei einem abhebenden Bereich.

Unter Beachtung der Symmetriebedingungen in (6),

$$\bar{w} = 0 \text{ und } \bar{v}_{,\varphi} = \text{konst.},$$

woraus mit  $\bar{v}(\bar{\varphi}=0) = 0, \bar{v} = C_1 \bar{\varphi}$  folgt, sowie der Übergangsbedingungen

$$v(\varphi=\alpha) = \bar{v}(\bar{\varphi}=\alpha-\pi), \quad w(\varphi=\alpha) = 0, \quad (8)$$

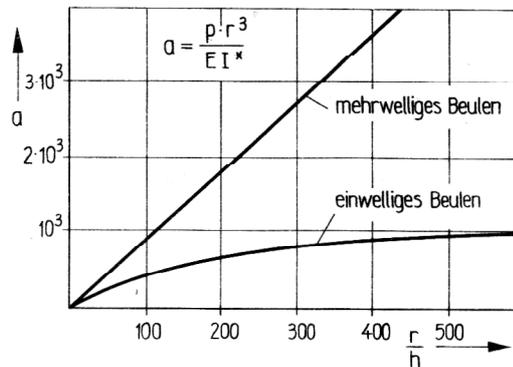
$$w_{,\varphi}(\varphi=\alpha) = 0,$$

$$M(\varphi=\alpha) = 0, \quad F_{\perp}(\varphi=\alpha) = \bar{F}_{\perp}(\bar{\varphi}=\alpha-\pi)$$

ergeben sich aus (4) nach Elimination der Integrationskonstanten zwei transzendente Gleichungen als Beulbedingungen zur Ermittlung des Eigenwertpaares  $\alpha, \lambda$ .

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) \cdot \sin\lambda\alpha + \left(\frac{\lambda^2}{12 \cdot r^2/h^2} \pi + \alpha\right) (\lambda \sin\lambda\alpha \cdot \cot\alpha - \cos\lambda\alpha) = 0 \quad (9)$$

$$\lambda \cdot \tan\alpha - \tan\lambda\alpha - 0$$



**Bild 2**  
Kritischer Druck des starr ummantelten elastischen Ringes

Zur numerischen Auswertung der Beulbedingungen (7) und (9) nach Hain ist im Bild 2 der kritische Beuldruck über Zahlenwerte  $r/h$  aufgetragen. Dabei wird deutlich sichtbar, daß die beim einwelligen Beulen bedeutend niedrigeren kritischen Beullasten für das Versagen infolge Instabilität z. B. näherungsweise auch für eine Auskleidung in einem langen starren Zylinder bei radialem Außendruck, maßgebend sind.

Als Erklärung kann die tangentielle Nachgiebigkeit angesehen werden, die beim mehrwelligen Beulen nicht möglich ist. In der nachfolgenden Übersicht sind Zahlenwerte für eine mögliche starr ummantelte Auskleidung auf der Grundlage der vorgestellten Beultheorie elastischer Ringe unter radialem Außendruck angegeben.

Für

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu = 0,3, \quad h = 5 \text{ mm}, \quad r = 400 \text{ mm},$$

$$r = 750 \text{ mm}$$

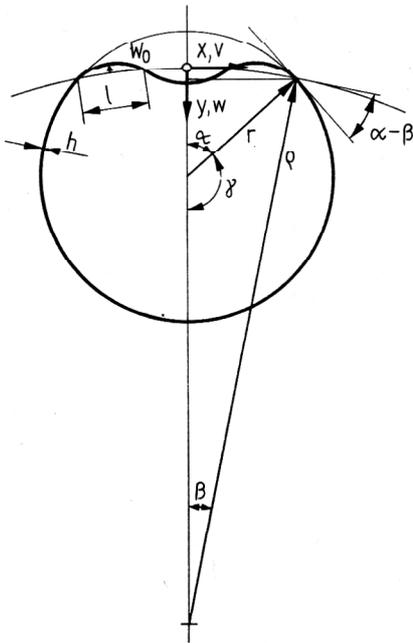
$$\sigma_F = 270 \text{ MPa folgt}$$

r (mm)	r/h	a	$p_{kr}$ (MPa)	$\sigma_{\varphi}$ (MPa)
400	80	250	9,4	751,2
750	150	500	2,9	427,5

Die infolge der kritischen Beullasten  $p_{kr}$  in der Auskleidung auftretenden Umfangsspannungen  $\sigma_{\varphi}$  liegen wesentlich höher als die Fließgrenze  $\sigma_F$  z. B. des austenitischen Materials einer Auskleidung. Die Bestimmung des kritischen Beuldruckes unter der Voraussetzung rein elastischen Materialverhaltens ist für diesen Anwendungsfall irreal.

## 2. Zur Stabilität des ummantelten Ringes unter radialem Außendruck bei Berücksichtigung der Fließgrenze

Jacobsen (2) hat Beulbedingungen für ummantelte Ringe und Kreiszyinderschalen unter radialem Außendruck angegeben, die das Nichtüberschreiten der Fließgrenze durch die Umfangsspannung in der Zylinderwand sowie einen möglichen Spalt zwischen Ummantelung und Zylinderwand berücksichtigen. Für das maßgebende einwellige Beulen nach Bild 3 sollen die wichtigsten Formeln dieser Theorie dargestellt werden.



**Bild 3**  
Geometrie zum einseitigen Beulen

Hiernach gelten folgende geometrische Beziehungen

$$\gamma = \pi - \alpha, \quad l = 2/3 \cdot \beta \cdot \rho, \quad \sin \beta = r \cdot \sin \alpha / \rho \quad \text{bzw.}$$

$$\rho = r \cdot \sin \alpha / \sin \beta, \quad l = 2/3 \cdot \beta \cdot r \cdot \sin \alpha / \sin \beta \quad (10)$$

Die Umfangslänge des Ringes bzw. der Kreiszyklinderschale vor und nach der Verformung ist bei Beachtung der Spaltbreite  $\Delta$ .

$$U_0 = 2 \cdot \pi (r - \Delta), \quad U = 2 \cdot \gamma \cdot r + 3 \cdot s, \quad (11)$$

wobei  $s$  die Halbwellenlänge darstellt.

Für die Stauchung  $\Delta U = U_0 - U$  gilt die elastische Gleichung

$$2 \cdot \pi (r - \Delta) - 2 \cdot \gamma \cdot r + 3 \cdot s = \frac{2 \cdot p}{E \cdot h} (\gamma \cdot r^2 + \beta \cdot \rho^2) \quad (12)$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie für den Kreisbogenträger

$$w_{,xx} + \frac{1}{\rho^2} \cdot w = - \frac{M}{E \cdot I} \quad (13)$$

führt mit dem Ansatz  $w = w_0 \cos \frac{\pi \cdot x}{l}$  auf die Beziehung

$$-\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{\rho^2} = -12 \frac{p \cdot \rho}{E \cdot h^3} \quad (14)$$

Die kritische Umfangsspannung, die die Fließspannung z. B. der Innenauskleidung nicht überschreiten soll, setzt sich aus den Anteilen infolge radialen Druckes, Krümmungsänderung und Knickbiegung zusammen.

$$\sigma = \sigma_F = \frac{p \cdot \rho}{h} + \frac{E \cdot h}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{6 \cdot p \cdot \rho \cdot w_0}{h^2} \quad (15)$$

Der Längsbehinderung bei langen Rohren wird durch  $E^* = E / (1 - \gamma^2)$  Rechnung getragen.

Im weiteren Fortgang der Rechnung lassen sich die Größen  $\gamma$ ,  $\rho$  und  $l$  vermöge (10) sowie  $w_0$  und  $s$  durch die Parametervariablen  $\alpha$  und  $\beta$  ausdrücken.

$$w_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot \tan(\alpha - \beta)}{\pi \cdot \sin \beta} \quad (16)$$

$$s = \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta \cdot r \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \left[ 1 + \frac{1}{4} \cdot \tan^2(\alpha - \beta) \right]$$

Die Elimination dieser Größen in den Beziehungen (12), (14) und (15) führt schließlich auf die Beulbedingung, ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\frac{r}{h} = \sqrt{\frac{\left( \frac{9 \cdot \pi^2}{4 \cdot \beta^2} - 1 \right) (\pi - \alpha + \beta \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta})}{12 \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^3 \left[ \alpha - \frac{\pi \cdot \Delta}{r} - \beta \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \left( 1 + \frac{1}{4} \cdot \tan^2(\alpha - \beta) \right) \right]}}$$

$$\frac{p}{E} = \frac{\frac{9 \cdot \pi^2}{4 \cdot \beta^2} - 1}{12 \cdot \left( \frac{r \cdot \sin \alpha}{h \cdot \sin \beta} \right)^3} \quad (17)$$

$$\frac{\sigma_F}{E} = \frac{h}{2 \cdot r} \left( 1 - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)$$

$$+ \frac{p \cdot r}{E \cdot h} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \left[ 1 + \frac{4 \cdot \beta \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot \tan(\alpha - \beta)}{\pi \cdot h \cdot \sin \beta} \right]$$

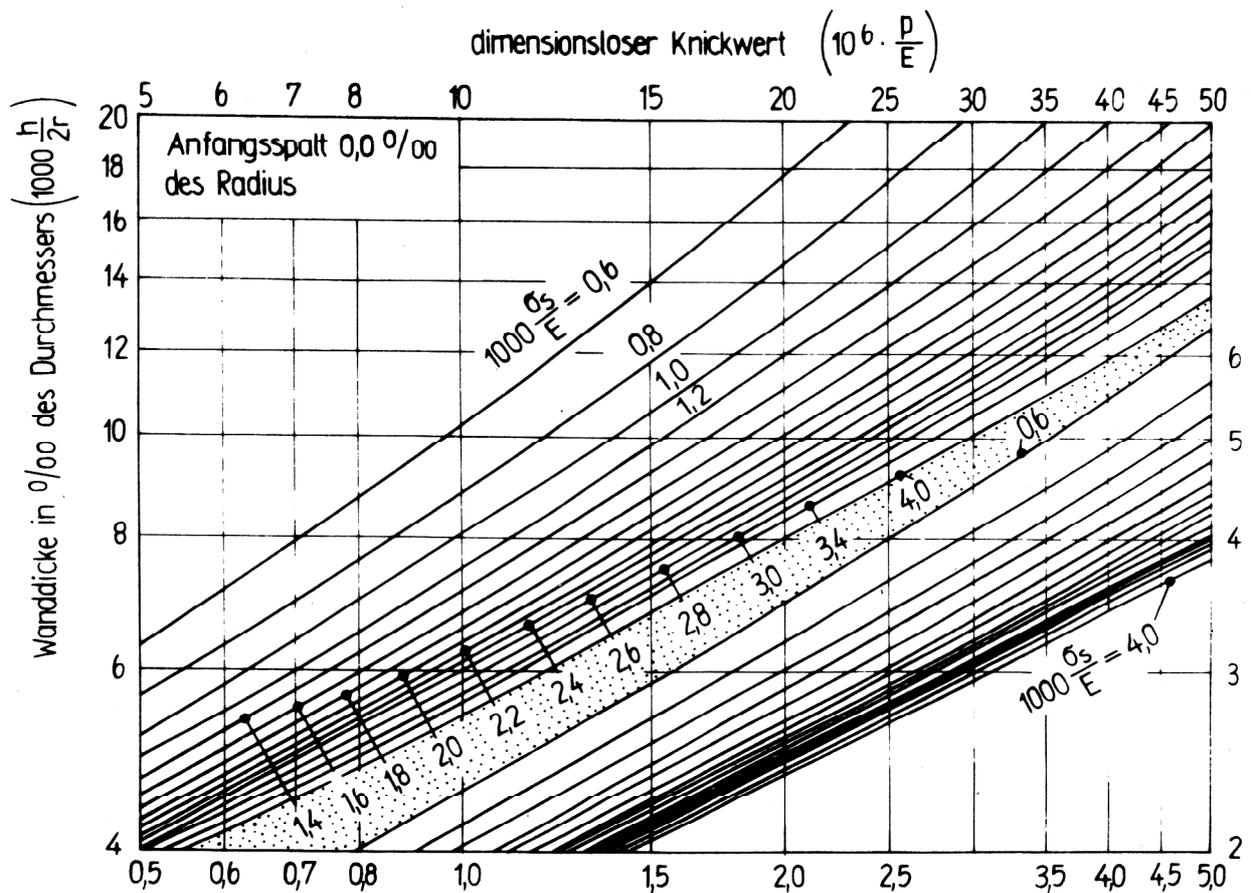
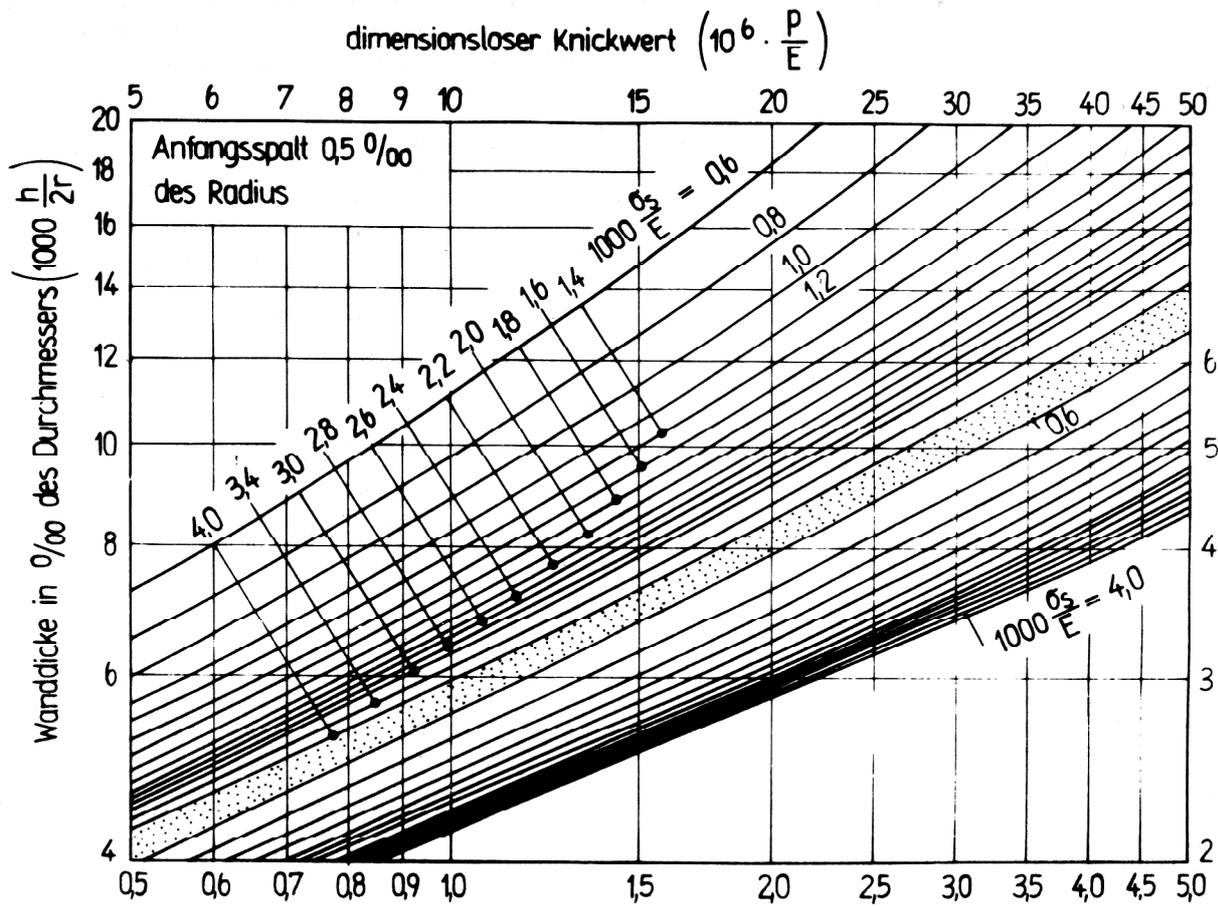
Die numerische Auswertung der Beulbedingung (17) liefert für zugeordnete Kombinationen der Parametervariablen  $\alpha$  und  $\beta$  den kritischen Beuldruck abhängig vom Wandstärken-Durchmesser Verhältnis, wobei die Spaltbreite  $\Delta$  und die Fließgrenze  $\sigma_F$  der betrachteten Kreiszyklinderschale als Parametergrößen fungieren. Das Bild 4 zeigt auszugswise diese Resultate in dimensionsloser Darstellung z. B. für die Spaltbreiten  $\Delta = 0,0$  und  $\Delta = 5 \cdot 10^{-4} r$ .

Für praktische Anwendungszwecke erweist sich die Darstellung des kritischen Beuldruckes in Abhängigkeit vom Durchmesser der starr ummantelten Kreiszyklinderschale für unterschiedliche Wandstärken  $h$ , separiert nach den Fließgrenzen der eingesetzten Werkstoffe, als günstig.

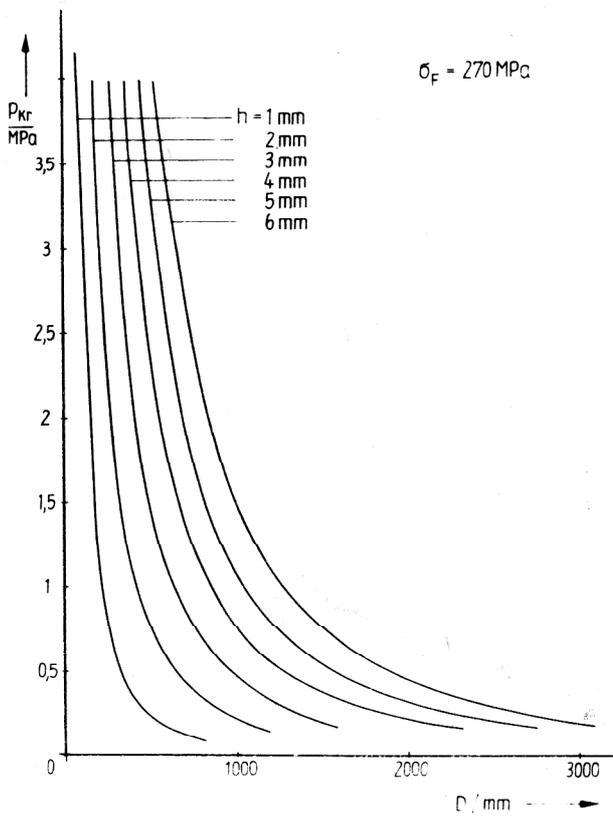
In diesem Sinne geben Darstellungen wie nach Bild 5 z. B. für eine austenitische Auskleidung mit einer Fließgrenze  $\sigma_F = 270 \text{ MPa}$  übersichtliche Informationen über den zu vermeidenden kritischen Beuldruck bei Dichtheitsprüfungen.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Hain, H.: Zur Stabilität elastisch gebetteter Kreisringe und Kreiszyklinderschalen. Mitteilungen des Inst. für Statik der TU Hannover, Nr. 12, 1968.
- [ 2 ] Jacobsen, S.: Buckling of circular rings and cylindrical tubes under external pressure. Water Power, Dez. 1974.
- [ 3 ] Jacobsen, S.: Buckling of pressure tunnel steel linings with shear connectors. Water Power and Dam Construction, Juni 1978.
- [ 4 ] Sonntag, G.: Stabilität des elastisch gebetteten Rohres unter Außendruck. Forsch. Ing.-Wes. 32, 1966.
- [ 5 ] Amstutz, E.: Das Einbeulen von Schacht- und Stollenpanzerungen. Schweizer Bauztg. 68 (1950).
- [ 6 ] Pflüger, A.: Zur praktischen Berechnung der Kreiszyklinderschale unter Manteldruck. Stahlbau 35, 1966.



**Bild 4**  
Kritischer Druck des starr ummantelten Ringes nach Jacobson



**Bild 5**  
Kritischer Druck des starr ummantelten Ringes

- [ 7 ] Zagustin, E. A., und Herrmann, G.: Stability of an elastic ring in a rigid cavity. J. Appl. Mech. 34, 1967.
- [ 8 ] Hahn, L.: Flambage des anneaux circulaires dans un milieu elastique. Internat. ver. Brückenbau u. Hochbau, Zürich XI, 1951.
- [ 9 ] Link, H.: Beitrag zum Knickproblem des elastisch gebetteten Kreisbogenträgers. Der Stahlbau 32, 1963.
- [ 10 ] Windels, R.: Spannungstheorie zweiter Ordnung für den teilweise gebetteten Kreisring. Die Bautechnik 43, 1966.
- [ 11 ] Simitzes, C. J.: An Introduction to the Elastic Stability of Structures. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.