TECHNISCHE MECHANIK 7(1986) Heft 2
Manuskripteingang: 31. 10. 1985

Ähnlichkeitskriterien für Stoßwellenprozesse in Zweiphasengemischen

A. I. Iwandajew

Am Beispiel von Gas-Partikel-Strömungen bei unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten werden die Ähnlichkeitskriterien für Stoßwellenprozesse in Zweiphasengemischen untersucht. Es wird gezeigt, daß die Ähnlichkeit solcher Strömungen durch mindestens acht Parameter bestimmt wird, deren wichtigste der Isentropenexponent des Gases, die Mach-Zahl der Stoßwelle, der Massenanteil der Partikel im Gas und ein Ähnlichkeitskomplex, der das Verhältnis der Relaxationslänge der Phasengeschwindigkeiten zur charakteristischen Länge des Strömungsgebietes darstellt, sind.

In den letzten Jahren wurde eine Vielzahl von Arbeiten veröffentlicht, die den instationären Prozessen hinter Stoßwellen in Gas-Partikel-Strömungen gewidmet sind [1] bis [15]. In ihnen wurden die Resultate von numerischen Berechnungen einer Reihe von Aufgaben vorgestellt und diskutiert. So zum Beispiel der Zerfall einer beliebigen Unstetigkeit [1] bis [5], die Wechselwirkung einer Stoßwelle mit einem staubbeladenen halbunendlichen Raum und ihre Reflexion an einem Hindernis [2], [3], [5], [6], [8], Gas-Partikel-Strömungen in einer Stoßwellenröhre [13] oder die Evolution kurzer Stoßwellen in Luft mit Partikeln [7], [9], [10], [11], [15] {ein ausführlicher Überblick aller bis 1981 veröffentlichten Arbeiten wird in [16] gegeben}.

Jedoch wurden, obwohl diese Frage sehr aktuell ist, die Ähnlichkeitskriterien für Stoßwellenprozesse in Gas-Partikel-Strömungen bisher in der Literatur nicht betrachtet.

Zur mathematischen Beschreibung von Gas-Partikel-Strömungen werden wir die Methoden der Mechanik heterogener Medien [17] heranziehen, wobei wir das Modell eines Gemisches mit nur einem Druck [18] benutzen. Wir wollen voraussetzen, daß die Partikel kugelförmig und von gleicher Größe sind. Es finden keine Zusammenstöße, Teilungen und Zusammenschlüsse der Partikel statt. Die Einflüsse von Viskosität und Wärmeleitung sind nur in den Prozessen der unmittelbaren Phasenwechselwirkung von Bedeutung. Äußere Massenkräfte und Wärmeströme fehlen. Jede Phase wird als ideal angesehen, d. h., die Zustandsgleichungen der Phasen lauten

$$\bar{\bar{p}} = \rho_1^o R_1 T_1 , \; e_1 = \bar{\bar{c}}_{\underline{\underline{v}}1} T_1 \quad (\bar{\bar{c}}_{\underline{\underline{v}}1} = \text{const}); \qquad \rho_1^o = \text{const}, \; e_2 = c_2 T_2 \; (c_2 = \text{const}). \tag{1}$$

Wir wollen uns auf eindimensionale instationäre Strömungen mit ebener, zylindrischer oder Kugelsymmetrie beschränken. Den Volumenanteil des Gemisches, der von der j-ten Phase eingenommen wird, werden wir durch die Größe des Volumenanteils α_j $\{j = 1,2, \; \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$ kennzeichnen. In jedem Punkt des Gemisches werden die mittlere Phasendichte ρ_j (Phasenmasse pro Gemischvolumen), die Phasendichte ρ_j^o (Phasenmasse pro Phasenvolumen) und die spezifische Partikelanzahl n eingeführt. Wir haben

$$\rho_1^o = \rho_1/\alpha_1 , \; \rho_2^o = \rho_2/\alpha_2 , \quad n = 6\alpha_2/\pi d^3 ,$$

mit d als Partikeldurchmesser.

Die Bewegungsgleichungen schreiben wir in der differentiellen Form der Massen- und Impulserhaltungssätze der Phasen, des Erhaltungssatzes der inneren Energie der dispersen Phase und des Energieerhaltungssatzes des gesamten Gemisches an

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu}\frac{\partial \rho_1 u_1 x^\nu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu}\frac{\partial \rho_2 u_2 x^\nu}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu}\frac{\partial \rho_1 u_1^2 x^\nu}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial x} = -F,$$

$$\frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu}\frac{\partial \rho_2 u_2^2 x^\nu}{\partial x} = F,$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu}\frac{\partial \rho_2 e_2 u_2 x^\nu}{\partial x} = Q, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu}\frac{\partial(\rho_1 E_1 u_1 + \rho_2 E_2 u_2)x^\nu}{\partial x} + \frac{1}{x^\nu}\frac{\partial \bar{\bar{p}}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)x^\nu}{\partial x} = 0$$

$$(E_j = e_j + u_j^2/2; \; j = 1,2).$$

Hierbei sind u_j, e_j und E_j Geschwindigkeit, innere und Gesamtenergie der j-ten Phase, $\bar{\bar{p}}$ der Druck, F und Q die Kraft des Gases auf ein Partikel und der Wärmestrom vom Gas zu den Partikeln pro Volumeneinheit des Gemisches. Die Indizes 1und 2 entsprechen der Disperionsphase bzw. der dispersen Phase. Der Parameter ν nimmt bei ebener, zylindrischer oder Kugelsymmetrie entsprechend die Werte 0,1 oder 2 an.

Die Resultate einer Analyse [19] zeigen, daß die instationären Effekte der Kräfte- und Wärmewechselwirkung der Phasen bei ausreichend intensiven Stoßwellen vernachlässigt werden können. Der Einfluß der Kompressibilität des Gases {der Mach-Zahl der Welle} auf F und Q kann gewöhnlich ebenfalls unberücksichtigt bleiben [16].

Damit ergibt sich

$$F = \frac{3\alpha_2}{2d}\,\rho_1^o\, C_d\, Re_{12}\, \frac{(u_1 - u_2)\,|u_1 - u_2|}{2} ,$$

$$Q = \frac{6\alpha_2}{d^2} \lambda_1 \, Nu\,(Re_{12}, Pr_1)\,(T_1 - T_2)$$

$$Re_{12} = \rho_1^o \, | u_1 - u_2 | \, d/\mu_1,$$

$$Pr_1 = c_{\overline{\overline{p}}1} \, \mu_1/\lambda_1 \, ; \; c_{\overline{\overline{p}}1}, \; \mu_1, \lambda_1 = \text{const} \tag{3}$$

$$C_d\,(Re_{12}) = 24\, Re_{12}^{-1} + 4\, Re_{12}^{-1/2} + 0{,}4,$$

$$Nu(Re_{12}, Pr_1) = 2 + 0{,}306\, Re_{12}^{0{,}55}\, Pr_1^{0{,}33}.$$

Hierbei sind λ_1 und μ_1 die Wärmeleitzahl und Viskosität des Gases, $c_{\overline{\overline{p}}1}$ die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck.
Entsprechend den Zustandsgleichungen (1) und den Phasenwechselwirkungsgesetzen (3) wird die Gemischbewegung durch folgende thermo-physikalische Parameter bestimmt.

$$c_{\underline{\underline{v}}1}, \; c_{\underline{\underline{p}}1} ; \; \rho_2^o, \; c_2 ; \; \mu_1, \; \lambda_1 .$$

Die ersten beiden Parameter charakterisieren die Zustandsgleichung des Gases ($R = c_{\overline{\overline{p}}1} - c_{\overline{\overline{v}}1}$, $\gamma = c_{\overline{\overline{p}}1}/c_{\overline{\overline{v}}1}$), die nächsten beiden die Zustandsgleichung der dispersen Phase und μ_1 und λ_1 die Reibung und den Wärmeaustausch zwischen den Phasen.
Bei der Analyse der Ähnlichkeit von Zweiphasengemischen der Art Gas-Partikel ist es notwendig, auch das Vorhandensein innerer charakteristischer Relaxationszeiten der Phasengeschwindigkeiten und -temperaturen zu berücksichtigen. Hierbei ist darauf zu achten, daß den Haupteinfluß auf die Wellenausbreitung in Gas-Partikel-Strömungen die Geschwindigkeitsdifferenzen und die damit verbundene Reibung zwischen den Phasen haben $\{$ und nicht die Temperaturdifferenzen und der Wärmeaustausch $\}$ [16]. Unter Berücksichtigung dessen beschränken wir uns im weiteren auf die charakteristischen Relaxationszeiten der Phasengeschwindigkeiten: der Stokesschen Zeit $\tau_{\underline{\underline{v}}}^{\underline{\underline{s}}}$ $\{$für schwache Wellen, wenn die Reynolds-Zahlen der Partikelumströmung klein sind, $Re_{12} \leqslant 1$ $\}$ und der Newtonschen Zeit $\tau_{\underline{\underline{v}}}^{N}$ $\{$ für Wellen, bei denen die Reynolds-Zahlen Re_{12} hinreichend groß sind, $Re_{12} > 10^2$ [20] $\}$:

$$\tau_{\underline{\underline{v}}}^{\underline{\underline{s}}} = \frac{\rho_2^o\, d^2}{18\,\mu_1} \;, \quad \tau_{\underline{\underline{v}}}^{N} \cong 5{,}2\, \frac{\rho_2^o}{\rho_{1f}^o} \, \frac{d}{| u_{1f} - u_{2o} |} \,. \tag{4}$$

Hierbei sind ρ_{1f}^o die charakteristische Phasendichte in der Welle und $| u_{1f} - u_{2o} |$ die charakteristische Schlupfgeschwindigkeit zwischen den Phasen $\{$ es ist zu sehen, daß im Unterschied zur Stokesschen Zeit $\tau_{\underline{\underline{v}}}^{\underline{\underline{s}}}$ die Newtonsche Zeit $\tau_{\underline{\underline{v}}}^{N}$ von dem charakteristischen Phasendichteverhältnis und der charakteristischen Schlupfgeschwindigkeit abhängt $\}$.
Die charakteristischen Werte der Dichte ρ_{1f}^o und der Schlupfgeschwindigkeit $| u_{1f} - u_{2o} |$ werden durch die Intensität der Welle Ma (der Mach-Zahl) bestimmt.

$$\rho_{1f}^o \cong \rho_{1o}^o \, \frac{(\gamma_1 + 1)\, Ma^2}{2 + (\gamma_1 - 1)\, Ma^2} \,,$$

$$| u_{1f} - u_{2o} | \sim 2\, a_{1o} \, \frac{1}{\gamma_1 + 1} \left(Ma - \frac{1}{Ma} \right) \tag{5}$$

$$(a_{1o}^2 = \gamma_1 \, \overline{\overline{p}}_o \, / \, \rho_{1o}^o).$$

Der Ausdruck (4) für die Relaxationszeit $\tau_{\underline{\underline{v}}}^{N}$ hinter der Stoßfront kann damit folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\tau_{\underline{\underline{v}}}^{N} \cong \frac{\rho_2^o}{\rho_1^o} \, \frac{d}{a_{1o}} \, \psi\,(Ma) \sim \frac{\rho_2^o}{\rho_{1o}^o} \, \frac{d}{D} (\gamma_1 - 1) \,,$$

$$\psi\,(Ma) = \frac{2 + (\gamma_1 - 1) Ma^2}{Ma(Ma^2 - 1)} \,,$$

mit D als der Geschwindigkeit der Stoßwelle.
Zur Abschätzung der Zeit der Phasengeschwindigkeitsangleichung in den Stoßwellen können folgende Formeln empfohlen werden

$$\tau_{\underline{\underline{v}}}^{\underline{\underline{s}}} = \frac{\rho_2^o\, d^2}{18\,\mu_1} \,, \quad \psi\,(Ma) \gtrsim 2\, Re_{\underline{\underline{s}}}$$

oder $Ma < \sim (1 + Re_{\underline{\underline{s}}}^{-1})^{1/2}$

$$\tau_{\underline{\underline{v}}}^{N} \cong \frac{\rho_2^o}{\rho_1^o} \, \frac{d}{a_{1o}} \, \psi\,(Ma) \sim \frac{\rho_2^o}{\rho_{1o}^o} \, \frac{d}{D} \, (\gamma_1 - 1), \tag{6}$$

$$\psi\,(Ma) \ll 10^{-2}\, Re_{\underline{\underline{s}}} \,,$$

$$Re_{\underline{\underline{s}}} = \frac{\rho_{1o}^o \, d\, a_{1o}}{\mu_1}$$

die in den angezeigten Bereichen der Mach-Zahlen anwendbar sind $\{$ die Bedingungen ihrer Anwendbarkeit ergaben sich mit (5) daraus, daß die charakteristischen Reynolds-Zahlen Re_{12} der relativen Bewegung von Gas und Partikel in den Relaxationszonen der Stoßwellen entweder entsprechend klein, $Re_{12} \lesssim 1$ („schwache" Stoßwellen), oder groß, $Re_{12} \gtrsim 100$ („starke" Stoßwellen) zu sein haben $\}$.
Die charakteristischen Dicken schwacher und starker Stoßwellen in Gas-Partikel-Strömungen werden entsprechend durch folgende charakteristische Längen bestimmt

$$L_{\underline{\underline{v}}}^{\underline{\underline{s}}} \cong \tau_{\underline{\underline{v}}}^{\underline{\underline{s}}} \, D \sim \frac{1}{18} \, d \, \frac{\rho_2^o}{\rho_{1o}^o} \, Re_{\underline{\underline{s}}} \,,$$

$$\psi\,(Ma) \gtrsim 2\, Re_{\underline{\underline{s}}}$$

$$L_{\underline{\underline{v}}}^{N} \cong \tau_{\underline{\underline{v}}}^{N} \, D \sim d \, \frac{\rho_2^o}{\rho_{1o}^o} \, Ma\, \psi\,(Ma) \,,$$

$$\psi\,(Ma) \ll 10^{-2}\, Re_{\underline{\underline{s}}}$$

Die Größe des Dickenverhältnisses solcher Wellen hängt von den dimensionslosen Parametern $Re_{\underline{\underline{s}}}$ und Ma ab

$$L_{\underline{\underline{v}}}^{\underline{\underline{s}}} \, / \, L_{\underline{\underline{v}}}^{N} = Re_{\underline{\underline{s}}} \, / \, 18\, Ma\, \psi\,(Ma).$$

Für Teilchen vom Durchmesser 10 – 100 μm bei gewöhnlichen Gasen und Normaldruck liegen die Werte von Re_s im Bereich $10^2 - 10^3$. Folglich übersteigt die Dicke schwacher Wellen die Dicke starker Wellen, bei denen Ma ψ (Ma) $\sim(\gamma_1 - 1)$ ist, um ein bis zwei Größenordnungen. Die charakteristische Dicke der starken Wellen nimmt ab bei zunehmender Intensität und hat einen minimalen Grenzwert von $L_v{}^N \sim (\gamma_1 - 1) d\, \rho_2^o/\rho_1^o$.

Wir wollen nun die Variablen dimensionslos machen. Die dimensionslose Zeit $\bar{t}$ und die Koordinate $\bar{x}$ führen wir mit Hilfe der oben betrachteten charakteristischen Zeiten τ_v und der Längen L_v ein

$$\bar{t} = t/\tau_v\ , \quad \bar{x} = x/L_v = x/D\tau_v .$$

Den Druck $\bar{p}$, die Phasendichten ρ_j und -temperaturen T_j beziehen wir auf ihre Ruhegrößen. Als Maßstab für Phasengeschwindigkeiten u_j nehmen wir die Schallgeschwindigkeit des Gases im Ruhezustand a_{1o} und als Maßstab für die Phasenenergien e_j und E_j die Größe a_{1o}^2.

Es ist leicht zu zeigen, daß nach Umschreiben der linken Seiten der Differentialgleichungen (2) in den Variablen vier Komplexe entstehen:

$$\gamma_1,\ a_{1o},\ m = \rho_{2o}/\rho_{1o},\ \mathrm{Ma}. \tag{7}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichungen erscheinen die Größen des Impuls- und Wärmeaustausches zwischen den Phasen

$$\bar{F} = \frac{\tau_v}{\rho_{2o}\, a_{1o}}\, F, \quad \bar{Q} = \frac{\tau_v}{\rho_{2o}\, e_{2o}}\, Q.$$

In schwachen Wellen, Ma $\lessapprox (1 + Re_s^{-1})^{1/2}$ mit $C_d \approx 24/Re_{12}$ und Nu = 2 haben wir $\tau_v = \tau_v^s$, womit sich für den Impuls- und Wärmeaustausch die Beziehungen

$$\bar{F} = \bar{\rho}_2\,(\bar{u}_1 - \bar{u}_2),\ \bar{Q} = \frac{2}{3}\,\bar{\rho}_2\,\frac{c_{p1}}{c_2}\,\frac{1}{Pr_1}\,(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \tag{8}$$

ergeben.

Bei der Untersuchung hinreichend starker Wellen, $\psi(\mathrm{Ma}) \ll 10^{-2}\, Re_s$ mit $C_d = 0{,}44$ und $Nu = 0{,}6\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}$ ist die charakteristische Relaxationszeit gleich $\tau_v{}^N$, und somit

$$\bar{F} = \frac{3}{4}\alpha_{1o}\,\psi(\mathrm{Ma})\,C_d\,(Re_{12})\frac{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2}{\alpha_1}\,(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\,|\bar{u}_1 - \bar{u}_2|, \tag{9}$$

$$Re_{12} = \alpha_{1o}\, Re_s\, \frac{\bar{\rho}_1}{\alpha_1}\, |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|\ ;$$

$$\bar{Q} = 6\,\frac{1}{Re_s}\,\frac{c_{p1}}{c_2}\,\frac{1}{Pr_1}\,\psi(\mathrm{Ma})\,Nu(Re_{12}, Pr_1)\,\bar{\rho}_2\,(\bar{T}_1 - \bar{T}_2),$$

$$Re_s = \frac{\rho_{1o}^o\, d\, a_{1o}}{\mu_1}$$

Aus (8) und (9) ist zu sehen, daß neben den dimensionslosen Komplexen (7) die Ähnlichkeit von Gas-Partikel-Strömungen durch folgende Kriterien bestimmt wird

$$\underline{C} = \frac{c_{p1}}{c_2}\ ,\ Pr_1 = \frac{c_{p1}\,\mu_1}{\lambda_1}\ ,\ Re_s = \frac{\rho_{1o}^o\, d\, a_{1o}}{\mu_1}\ .$$

Im Falle schwacher Wellen entfällt das Kriterium Re_s aus der Anzahl der bestimmenden Parameter siehe (8). Im Falle starker Wellen ist entsprechend (9) $Q \sim Re_s{}^{-1/2}$, jedoch ist $\bar{F}$ auf Grund der benutzten Maßstäbe für x und t bei $Re_{12} \gtrapprox 10^2$ praktisch unabhängig von Re_s $\{ C_d\,(Re_{12}) \approx \mathrm{const} \}$. Somit sind konstante Werte von Re_s ebenso wie konstante Werte von $\underline{C}$ und Pr_1 für die Garantie der Ähnlichkeit bei Vorhandensein von Wärmeaustausch zwischen den Phasen notwendig. Wir bemerken, daß das Kriterium α_{1o} im allgemeinen unwesentlich ist, da im Rahmen des betrachteten Modells Wellen in Gasen mit hinreichend geringem Partikelzusatz $\{ \alpha_{1o} \sim 1 \}$ untersucht werden. Da den bestimmenden Einfluß auf die Wellenausbreitung in Gas-Partikel-Strömungen gewöhnlich die Geschwindigkeitsdifferenz und damit die Reibung zwischen den Phasen hat [16], ergeben sich so ohne Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen folgende drei Kriterien als Hauptkriterien für die Ähnlichkeit bei Stoßwellenprozessen in Gas-Partikel-Strömungen

$$\gamma_1,\ \mathrm{Ma} = D/a_{1o},\ m = \rho_{2o}/\rho_{1o}.$$

Gehen in die Zahl der bestimmenden Parameter der Aufgabe die linearen Maßstäbe $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ein, die die Anfangs- und Randbedingungen charakterisieren, so wird die Ähnlichkeit erreicht, wenn außer den aufgezeigten Kriterien folgende Komplexe konstant bleiben

$$\bar{L}_v = \frac{L_v}{L_n}\ ,\ \bar{L}_1 = \frac{L_1}{L_n}\ , \ldots ,\ \bar{L}_{n-1} = \frac{L_{n-1}}{L_n}\ . \tag{10}$$

Der Komplex $\bar{L}_v$ charakterisiert die Rolle der Effekte aus den Geschwindigkeitsdifferenzen und wird bei schwachen und starken Wellen entsprechend durch folgende Formeln bestimmt

$$\bar{L}_v = \begin{cases} \dfrac{1}{18}\, Re_s\, \dfrac{\rho_2^o}{\rho_{1o}^o}\, \dfrac{d}{L_n}\,, & \mathrm{Ma} \lessapprox \sqrt{1 + Re_s^{-1}} \\[2ex] \mathrm{Ma}\,\psi(\mathrm{Ma})\, \dfrac{\rho_{2o}^o}{\rho_{1o}^o}\, \dfrac{d}{L_n}, & \psi(\mathrm{Ma}) \ll \sim 10^{-2}\, Re_s\,. \end{cases}$$

Die Komplexe $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \ldots, \bar{L}_{n-1}$ sind gewöhnliche geometrische Kennzahlen.

Nach der Größe des Komplexes $\bar{L}_v$ kann der zu erwartende Grad des Ungleichgewichtes der Strömung in bezug auf die Phasengeschwindigkeiten beurteilt werden. $\{$Je größer $\bar{L}_v$, desto mehr befindet sich die Strömung im Ungleichgewicht$\}$.

Sind die Werte von $\bar{L}_v$ klein $\{ \bar{L}_v = < 1 \}$, so sind die Effekte der Geschwindigkeitsdifferenzen der Phasen unwesentlich. Zur Beschreibung solcher Strömungen kann das Eingeschwindigkeitsmodell [16] benutzt werden, das dem Grenzfall $\bar{L}_v = 0$ entspricht. Sind die Werte von $\bar{L}_v$ groß $\{ \bar{L}_v \gg 1 \}$, so werden sich die Partikelgeschwindigkeiten in der charakteristischen Zeit des Prozesses praktisch nicht ändern. Solche Strömungen können im Rahmen sogenannter festgefrorener Schemata [16] beschrieben werden, die dem Grenzfall $\bar{L}_v = \infty$ entsprechen.

LITERATUR

[1] Ottermann B., Levine A. S.: Analysis of gas-particle flows in shock tubes. AIIA Journal, 1974, v. 12, Nr. 5, p 579 – 580.

[2] Губвйдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.: Некоторые результаты численного исследования нестационарных волн в газовзвесях. Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, 1976, No. 5, с. 64 – 69.

[3] Outa E., Tajima K., Morii H.: Experiments and analysis on shock waves propogating through a gas-particle mixtures. Bull. JSME, 1976, v. 19, Nr. 130, p 384 – 394.

[4] Гулидов А. И., Сафин Р. И., Фомин В. М.: Численное исследование одномерных нестационарных течений двухфазных сред. В сб.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977, с. 143 – 152.

[5] Матвеев С. К., Сеюкова Л. П.: Расчет одномерных нестационарных течений газа с частицами. Учен. записки ЛГУ, 1977, No. 393, Мат. науки, с. 139 – 146.

[6] Гольцикер А. Д., Тараканов С. В., Тодес О. М., Чивилихин С. А.: Формирование плоской релаксационной волны в аэровзвеси твердых частиц. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1977, No. 2, с. 57 – 66.

[7] Кауфман А. С., Лимонов Б. С., Тараканов С. В.: Исследование распространения ударных волн по аэровзвеси. – Теплофиз. и физ. гидродинамика, Новосибирск, 1978, с. 31 – 34.

[8] Marconi F., Rudman S., Galia V.: One-dimensional unsteady two-phase flows with shock waves. AIAA Pap., 1980, Nr. 1448, 15 pp.

[9] Кутушев А. Г.: Численное исследование нестационарных ударных волн в двухфазных смесях газа с каплями или частицами. В сб.: Газотермодинамика многофазных потоков в энергоустановках, Харьков, 1980, вып. 3, с. 45 – 50.

[10] Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.: Численное исследование разлета облака диспергированных частиц или капель под действием взрыва. Изв. АН СССР, Мех. жидк. и газа, 1982, с. 82 – 90.

[11] Меньшов И. С.: Распространение сильных взрывных волн в дисперсной смеси. Докл. АН СССР, 1982, т. 267, No. 4, с. 807 – 811.

[12] Коробейников В. П., Меньшов И. С.: Метод малого параметра в задачах о нестационарных двухфазных течениях с ударными волнами. ДАН СССР, 1983, т. 286, No. 5, с. 1078 – 1081.

[13] Ивандаев А. И.: Течение в ударной трубе при наличии взвешенных частиц. Физика горения и взрыва, 1984, No. 3, с. 105 – 111.

[14] Ивандаев А. И., Кутушев А. Г.: Влияние экранирующих слоев газовзвеси на отражение ударных волн. Ж. прикл. мех. и техн. физики, 1985, No. 1, с. 115 – 120.

[15] Ивандаев А. И., Кутушев А. Г.: Некоторые закономерности эволюции плоских и сферических взрывных волн в аэровзвесях. Теплоф. высоких температур, 1985, No. 3, с.

[16] Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.: Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях. Итоги науки и техники ВИНИТИ, сер. Механика жидкости и газа, 1981, т. 16, с. 209 – 293.

[17] Нигматулин Р. И.: Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. – 336 с.

[18] Рахматулин Х. А.: Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. Прикл. мат. и мех., 1956, т. 20, No. 2. с. 184 – 195.

[19] Ивандаев А. И.: О влиянии нестационарных эффектов на обмен импульсом и теплом между фазами газовзвеси в ударных волнах. Теплофизика высоких температур, 1985, т. 23, No. 5, с.

[20] Ивандаев А. И.: Об оценке характерных времен динамического и теплового взаимодействия фаз в задачах волновой динамики газовзвесей. Ж. прикл. мех. и техн. физики, 1985, No. 2, с. 102 – 106.