

Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die Eigenschwingungsanalyse dünnwandiger Konstruktionen

J. Altenbach und M. Zwicke

1. Einleitung

Zur mechanischen Analyse realer Konstruktionen stehen heute leistungsfähige moderne Computerprogrammssysteme zur Verfügung. Diese Programmsysteme, die numerische Lösungsverfahren anwenden, arbeiten meist auf der Grundlage allgemeiner mechanischer Modelle. Deshalb entsteht ein relativ großer Aufwand, wenn man sie zur Berechnung dünnwandiger, vielfach ausgesteifter Konstruktionen benutzt. Für die globale Analyse solcher Konstruktionen ist es vorteilhafter, speziell angepasste mechanische Modelle zugrunde zu legen.

Für typische Konstruktionen des Schiff- und des Brückenbaus wurden bereits in [1] geeignete verallgemeinerte Stabmodelle deduktiv abgeleitet. Mit den in [1] angegebenen Modellen konnte durch die Berücksichtigung der Querschnittsdeformationen und der Schubverzerrungen im Vergleich zu den klassischen Stabmodellen eine neue Aussagequalität erreicht werden.

Im allgemeinen ist der erste Schritt einer dynamischen Strukturanalyse die Ermittlung des dämpfungsfreien Eigenschwingungsverhaltens. Da es sich dabei um eine typische globale Untersuchung handelt, ist die Anwendung verallgemeinerter Stabmodelle zweckmäßig.

In dieser Arbeit werden in Weiterführung von [1] die für diese dynamische Strukturanalyse geeigneten quasi-eindimensionalen Modelle hergeleitet.

2. Eindimensionale Schwingungsdifferentialgleichungen für dämpfungsfreie Eigenschwingungen dünnwandiger prismatischer Schalen (biegesteife Faltwerke)

Für die Ableitung des Berechnungsmodells wird angenommen, daß alle Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie erfüllt sind und ein homogenes, isotropes Material mit dem Elastizitätsmodul E , der Querkontraktionszahl ν und der Dichte ρ vorliegt.

Die Beschreibung der Geometrie der aus mehreren Schalenstreifen bestehenden dünnwandigen prismatischen Schale erfolgt mit Hilfe globaler und lokaler Koordinaten (s. Bild 1 und [1]). Zur Widerspiegelung des von der Zeit t abhängigen Verformungszustandes der Schalenmittelfläche werden für jeden Schalenstreifen i die Verschiebungen

$$u_i = u_i(z, s_i, t)$$

$$v_i = v_i(z, s_i, t)$$

$$w_i = w_i(z, s_i, t)$$

definiert (Bild 1 a).

Innerhalb der einzelnen Schalenstreifen wird dann der ebene Scheibenspannungszustand mit dem Biegespannungszustand der Kirchhoffschen Plattentheorie überlagert, und mit

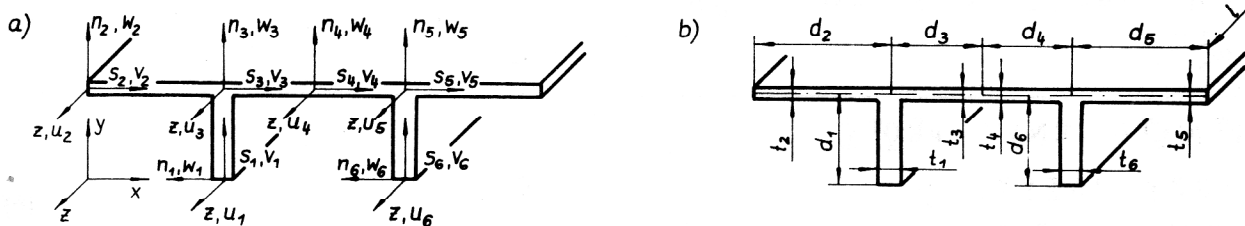


Bild 1

Beispiel eines Stabschalenquerschnitts

a) Definition der Koordinatensysteme und der Verschiebungen

b) Geometrische Abmessungen

$$\bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$(\)' = \frac{\partial}{\partial z} \quad (\)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial s_i}$$

ergibt sich das elastische Potential der prismatischen Schale

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{(i)} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \bar{E} t_i [(u_i' + \nu \dot{v}_i) u_i' + (\dot{v}_i + \nu u_i') \dot{v}_i] \right. \\ \left. + G t_i [\dot{u}_i + v_i']^2 \right. \\ \left. + \bar{E} \frac{t_i^3}{12} [(\ddot{w}_i + w_i'')^2 - 2(1-\nu)(\ddot{w}_i w_i'' - \dot{w}_i^2)] \right\} ds_i dz \quad (1)$$

Ebenso läßt sich die kinetische Energie angeben

$$T = \frac{1}{2} \sum_{(i)} \int_0^1 \int_0^1 \rho t_i \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] ds_i dz \quad (2)$$

Auf Grund der vorausgesetzten Dünnwandigkeit wurden die Rotationsträgheiten des differentiellen Schalenstreifen-elementes vernachlässigt. Dabei bleiben die Rotationsträgheiten des Gesamtquerschnittes berücksichtigt.

Zur Reduktion auf ein eindimensionales Modell werden analog zu [1] die verallgemeinerten Koordinaten $\varphi_j(s)$, $\psi_k(s)$ und $\xi_k(s)$ eingeführt. Für die hier zeitabhängigen verallgemeinerten Verschiebungen $U_j(z, t)$ und $V_k(z, t)$ wird ein harmonischer Ansatz gemacht.

$$U_j(z, t) = U_j(z) \cdot \sin \omega_0 t \quad (3)$$

$$V_k(z, t) = V_k(z) \cdot \sin \omega_0 t$$

Damit lautet der Produktansatz für die Verschiebungen

$$u_i(z, s_i, t) = \sum_{(j)} U_j(z) \cdot \varphi_j(s_i) \cdot \sin \omega_0 t \\ v_i(z, s_i, t) = \sum_{(k)} V_k(z) \cdot \psi_k(s_i) \cdot \sin \omega_0 t \\ w_i(z, s_i, t) = \sum_{(k)} V_k(z) \cdot \xi_k(s_i) \cdot \sin \omega_0 t \quad (4)$$

Setzt man die Gln. (4) in das elastische Potential (1) und die kinetische Energie (2) ein und wendet das Prinzip von Hamilton an

$$\delta \int_{t=t_A}^{t=t_E} (T - \pi) dt = 0,$$

dann ergeben sich das Schwingungsdifferentialgleichungssystem (5) und für $z = 0$ und $z = 1$ die Randbedingungen (6)

$ \begin{aligned} & - \bar{E} \underline{A} \underline{U}'' + G \underline{B} \underline{U} + G \underline{C} \underline{V}' - \nu \bar{E} \underline{D} \underline{V}' - \omega_0^2 \bar{A} \underline{U} = \underline{0} \\ & \nu \bar{E} \underline{D}^T \underline{U}' - G \underline{C}^T \underline{U}' + \bar{E} \underline{N} \underline{V}''' + \nu \bar{E} \underline{Q} \underline{V}'' + \nu \bar{E} \underline{Q}^T \underline{V}'' \\ & - G \underline{R} \underline{V}'' - 4 G \underline{T} \underline{V}'' + \bar{E} \underline{S} \underline{V} + \bar{E} \underline{H} \underline{V} - \omega_0^2 \bar{R} \underline{V} \\ & - \omega_0^2 \bar{N} \underline{V} = \underline{0} \end{aligned} \quad (5) $
$ \begin{aligned} & \delta \underline{V}^T (G \underline{C}^T \underline{U} - \bar{E} \underline{N} \underline{V}''' - \nu \bar{E} \underline{Q}^T \underline{V}'' \\ & + G \underline{R} \underline{V}'' + 4 G \underline{T} \underline{V}'') = 0 \\ & \delta \underline{V}^T (\bar{E} \underline{N} \underline{V}'' + \nu \bar{E} \underline{Q}^T \underline{V}') = 0 \\ & \delta \underline{U}^T (\bar{E} \underline{A} \underline{U}' + \nu \bar{E} \underline{D} \underline{V}') = 0 \end{aligned} \quad (6) $

Die Vektoren und Matrizen sind wie folgt vereinbart:

$$\underline{\varphi}^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_j, \dots) \quad \underline{U}^T = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_j, \dots)$$

$$\underline{\psi}^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_k, \dots) \quad \underline{V}^T = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots)$$

$$\underline{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots)$$

$$\underline{A} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T t_i \, d s_i$$

$$\underline{B} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\psi} \underline{\psi}^T t_i \, d s_i$$

$$\underline{C} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\varphi} \underline{\psi}^T t_i \, d s_i$$

$$\underline{D} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\varphi} \underline{\psi}^T t_i \, d s_i$$

$$\underline{H} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\psi} \underline{\psi}^T t_i \, d s_i$$

$$\underline{R} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\psi} \underline{\psi}^T t_i \, d s_i$$

$$\underline{Q} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\xi} \underline{\xi}^T \frac{t_i^3}{12} \, d s_i$$

$$\underline{S} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\xi} \underline{\xi}^T \frac{t_i^3}{12} \, d s_i$$

$$\underline{T} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\xi} \underline{\xi}^T \frac{t_i^3}{12} \, d s_i$$

$$\underline{N} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\xi} \underline{\xi}^T \frac{t_i^3}{12} \, d s_i$$

$$\underline{\bar{A}} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \rho t_i \, d s_i$$

$$\underline{\bar{R}} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\psi} \underline{\psi}^T \rho t_i \, d s_i$$

$$\underline{\bar{N}} = \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \underline{\xi} \underline{\xi}^T \rho t_i \, d s_i$$

Wegen der Produktansätze Gl. (4) sind die Vektoren der verallgemeinerten Koordinaten nur Funktionen von s , die der verallgemeinerten Verschiebungen nur Funktionen von z und die Matrizen unabhängig von s und z . Alle hier definierten Vektoren und Matrizen stimmen bis auf die Matrizen $\underline{\bar{A}}$, $\underline{\bar{N}}$ und $\underline{\bar{R}}$, die die Massenträgheiten erfassen, mit den in [1] definierten Vektoren und Matrizen überein.

Da das Berechnungsmodell (5), (6) alle Steifigkeits- und Trägheitsterme der Theorie für dünne Scheiben/Platten-Konstruktionen enthält, wird die Qualität der Lösung durch die Auswahl der linear unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten bestimmt, und mit wachsender Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten erfolgt die Konvergenz zu der für dünnwandige Scheiben/Platten-Konstruktionen geltenden exakten Lösung.

In den Glr. (5) und (6) haben die einzelnen Terme im allgemeinen einen unterschiedlichen Anteil an der Qualität des Ergebnisses. So kann z. B. prinzipiell festgestellt werden, daß die Bedeutung der Plattenverformungen und -steifigkeiten für höhere Eigenformen und -frequenzen zunimmt. Demzufolge können vor allem zur Ermittlung der niedrigsten Eigenfrequenzen Vereinfachungen vorgenommen werden. Da die Möglichkeiten zur Vereinfachung der Steifigkeiten bereits in [1] ausführlich behandelt wurden, sollen im folgenden nur die in der Literatur für dynamische Probleme benutzten Modelle erläutert werden.

3. Modelle mit Berücksichtigung der Querschnittskonturdeformationen

3.1. Elimination der Querdehnungen der Schalenmittelfläche

Die Querdehnungen der Schalenmittelfläche sind im allgemeinen von geringer Bedeutung. Analog zu [1] lassen sie sich mit den Annahmen

$$\epsilon_{si} = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_z = E u'_i$$

vernachlässigen.

Mit diesen Gleichungen untersucht Möller [4] die Eigenschwingungen eines dreizelligen Kastenträgers. Dabei hat er auch die typischen Plattenschwingungen berücksichtigt, deren Eigenfrequenzen bei dem sehr dünnwandigen Beispiel die Größenordnung der Balkenschwingungen erreichen. (Auf die von Möller einbezogenen Vorspannungen in Längsrichtung sei an dieser Stelle verzichtet.)

$ \begin{aligned} - \underline{E} \underline{A} \underline{U}'' + \underline{G} \underline{B} \underline{U} + \underline{G} \underline{C} \underline{V}' - \omega_0^2 \underline{\bar{A}} \underline{U} &= \underline{0} \\ - \underline{G} \underline{C}^T \underline{U}' + \underline{\bar{E}} \underline{N} \underline{V}'''' + \nu \underline{E} \underline{Q} \underline{V}'' + \nu \underline{\bar{E}} \underline{Q}^T \underline{V}'' - \underline{G} \underline{R} \underline{V}'' & \\ - 4 \underline{G} \underline{T} \underline{V}'' + \underline{\bar{E}} \underline{S} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{\bar{R}} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{\bar{N}} \underline{V} &= \underline{0} \end{aligned} $	(7)

$ \begin{aligned} \delta \underline{V}^T (\underline{G} \underline{C}^T \underline{U} - \underline{\bar{E}} \underline{N} \underline{V}'''' - \nu \underline{\bar{E}} \underline{Q}^T \underline{V}' \\ + \underline{G} \underline{R} \underline{V}' + 4 \underline{G} \underline{T} \underline{V}') &= \underline{0} \\ \delta \underline{V}^T (\underline{\bar{E}} \underline{N} \underline{V}'' + \nu \underline{\bar{E}} \underline{Q}^T \underline{V}) &= \underline{0} \\ \delta \underline{U}^T (\underline{E} \underline{A} \underline{U}') &= \underline{0} \end{aligned} $	(8)

3.2. Vernachlässigung der Steifigkeit gegenüber Längskrümmungen der Schalenmittelfläche

Eine andere Möglichkeit der Modellvereinfachung besteht in der Vernachlässigung der Längskrümmungen $w_i'' \approx 0$.

Dann ergibt sich statt der Gln. (5) und (6)

$ \begin{aligned} - \underline{\bar{E}} \underline{A} \underline{U}'' + \underline{G} \underline{B} \underline{U} + \underline{G} \underline{C} \underline{V}' - \nu \underline{\bar{E}} \underline{D} \underline{V}' - \omega_0^2 \underline{\bar{A}} \underline{U} &= \underline{0} \\ \nu \underline{\bar{E}} \underline{D}^T \underline{U}' - \underline{G} \underline{C}^T \underline{U}' - \underline{G} \underline{R} \underline{V}'' - 4 \underline{G} \underline{T} \underline{V}'' & \\ + \underline{\bar{E}} \underline{S} \underline{V} + \underline{\bar{E}} \underline{H} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{\bar{R}} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{\bar{N}} \underline{V} &= \underline{0} \end{aligned} $	(9)

$ \begin{aligned} \delta \underline{V}^T (\underline{G} \underline{C}^T \underline{U} + \underline{G} \underline{R} \underline{V}' + 4 \underline{G} \underline{T} \underline{V}') &= \underline{0} \\ \delta \underline{U}^T (\underline{\bar{E}} \underline{A} \underline{U}' + \nu \underline{\bar{E}} \underline{D} \underline{V}) &= \underline{0} \end{aligned} $	(10)

Vorteilhaft ist, daß es sich nur noch um ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung handelt. Außerdem erlaubt die Berücksichtigung der Querdehnungen eine relativ einfache automatische Definition der verallgemeinerten Koordinaten. Deshalb wurde im Rahmen des Programmsystems COSAR [9] auf der Grundlage dieses Modells ein finites Element entwickelt, welches für beliebige Querschnitte einsetzbar ist.

3.3. Eigenschwingungsanalyse auf der Grundlage der halbmomentenfreien Schalentheorie von VLASOV

3.3.1. Berücksichtigung der Schubverzerrungen der Schalenmittelfläche

Werden die Querdehnungen eliminiert und die Längskrümmungen sowie die Verdrillungen w_i der Schalenstreifen vernachlässigt, dann entspricht das Modell in seinen elastischen Eigenschaften der halbmomentenfreien Schalentheorie von Vlasov [8] mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen.

$ \begin{aligned} - \underline{E} \underline{A} \underline{U}'' + \underline{G} \underline{B} \underline{U} + \underline{G} \underline{C} \underline{V}' - \omega_0^2 \underline{\bar{A}} \underline{U} &= \underline{0} \\ - \underline{G} \underline{C}^T \underline{U}' - \underline{G} \underline{R} \underline{V}'' + \underline{\bar{E}} \underline{S} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{\bar{R}} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{\bar{N}} \underline{V} &= \underline{0} \end{aligned} $	(11)

$ \begin{aligned} \delta \underline{V}^T (\underline{G} \underline{C}^T \underline{U} + \underline{G} \underline{R} \underline{V}') &= \underline{0} \\ \delta \underline{U}^T (\underline{E} \underline{A} \underline{U}') &= \underline{0} \end{aligned} $	(12)

Dieses von Altenbach, Kissing [2] und de Boer [3] angewandte Modell eignet sich besonders für geschlossene Querschnitte.

3.3.2. Vernachlässigung der Schubverzerrungen der Schalenmittelfläche

Verzichtet man auf die Berücksichtigung der Schubverzerrungen

$$\gamma_{zsi} = \dot{u}_i + v_i' = 0 \quad (13)$$

dann erhält man mit

$$\dot{\varphi}_k = \psi_k \quad (14)$$

$$U_k = -V_k'$$

das folgende Differentialgleichungssystem

$E \underline{A} \underline{V}'''' + \underline{E} \underline{S} \underline{V} + \omega_0^2 \underline{A} \underline{V}'' - \omega_0^2 \underline{R} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{N} \underline{V}$	$= \underline{0}$	(15)
$\delta \underline{V}^T (-E \underline{A} \underline{V}'' - \omega_0^2 \underline{A} \underline{V}')$	$= 0$	(16)
$\delta \underline{V}^T (E \underline{A} \underline{V}'')$	$= 0$	

Diese Gleichungen werden leichter handhabbar, wenn auch die Längsträgheiten \underline{A} vernachlässigt werden (vgl. Abschn. 4.3.).

Ein ähnliches Modell, aber ohne Längsträgheiten und mit im Gesamtgleichgewicht näherungsweise berücksichtigten Schubverzerrungen und Verdrillungen, nutzt Saal [5] für unverzweigte offene sowie für einfach geschlossene Querschnitte.

4. Modelle mit starrer Querschnittskontur

4.1. Verhinderung der Querkrümmungen der Schalenmittelfläche

In allen klassischen Stabmodellen wird von der Annahme Gebrauch gemacht, daß auch im verformten Stab die Gestalt des Querschnittes erhalten bleibt. In der hier gewählten Betrachtungsweise bedeutet dies, daß nur solche verallgemeinerten Koordinaten zugelassen werden, bei denen keine Querkrümmungen \ddot{w}_i auftreten. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich nach der Elimination der Querdehnungen und der Vernachlässigung der Längskrümmungen das Schwingungsdifferentialgleichungssystem.

$-E \underline{A} \underline{U}'' + G \underline{B} \underline{U} + G \underline{C} \underline{V}' - \omega_0^2 \underline{A} \underline{U}$	$= \underline{0}$	(17)
$-G \underline{C}^T \underline{U}' - G \underline{R} \underline{V}'' - 4G \underline{T} \underline{V}' - \omega_0^2 \underline{R} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{N} \underline{V}$	$= \underline{0}$	
$\delta \underline{V}^T (G \underline{C}^T \underline{U} + G \underline{R} \underline{V}' + 4G \underline{T} \underline{V}')$	$= 0$	(18)
$\delta \underline{U}^T (E \underline{A} \underline{U}')$	$= 0$	

In diesen Gleichungen ist als Spezialfall auch das von Timoshenko [6] für Vollquerschnitte angegebene Balkenschwingungsmodell mit Schubverzerrungen und Rotationsträgheiten enthalten. Da mit den Gln. (17), (18) auch nichtlineare Verwölbungen betrachtet werden können, läßt sich ebenfalls der Effekt der mittragenden Breite näherungsweise berücksichtigen.

4.2. Vlasov-Stabmodell

Insbesondere für offene Querschnitte ist ein Modell ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen (Gln. 13, 14) sinnvoll.

$E \underline{A} \underline{V}'''' - 4G \underline{T} \underline{V}'' + \omega_0^2 \underline{A} \underline{V}'' - \omega_0^2 \underline{R} \underline{V} - \omega_0^2 \underline{N} \underline{V}$	$= \underline{0}$	(19)
$\delta \underline{V}^T (-E \underline{A} \underline{V}'' + 4G \underline{T} \underline{V}' - \omega_0^2 \underline{A} \underline{V}')$	$= 0$	(20)
$\delta \underline{V}^T (E \underline{A} \underline{V}'')$	$= 0$	

Für 4 verallgemeinerte Verschiebungen (Verschiebungen des Querschnittes in die 3 Raumrichtungen x, y und z sowie die Verdrehung in der x-y-Ebene mit dazugehöriger linearer Einheitsverwölbung) sind die Gln. (19), (20) mit denen von Vlasov [7] identisch.

4.3. Vernachlässigung der Längs-, Rotations- und Wölbträgheiten

Die bisher vorgenommenen Vereinfachungen betrafen ausschließlich die Widerspiegelung der realen elastischen Eigenschaften durch das gewählte Modell. Es ist natürlich ebenso möglich, das Trägheitsverhalten zu vereinfachen. Insbesondere kann es für Modelle ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen zweckmäßig sein, die in Längsrichtung wirkenden Trägheiten (Matrix \underline{A}) zu vernachlässigen. Aus den Gln. (19), (20) folgen dann z. B. die Gln. (21), (22).

$$E A V'''' - 4 G T V'' - \omega_0^2 \bar{R} V - \omega_0^2 \bar{N} V = 0 \quad (21)$$

$$\delta V^T (-E A V'''' + 4 G T V'') = 0$$

$$\delta V^T (E A V'') = 0 \quad (22)$$

Dieser Schritt entspricht der Vernachlässigung der Rotations- und Wölbrigkeiten in den klassischen Stabmodellen. Allerdings werden gleichzeitig die Längsschwingungen (auch Longitudinalschwingungen genannt) nicht mehr im Modell erfasst. Die dazugehörigen Eigenfrequenzen können aber leicht in einer gesonderten Rechnung ermittelt werden. Diese Vereinfachung ist jedoch nicht zu empfehlen, wenn auf Grund der Rand- oder Übergangsbedingungen die Längs- und Biegeschwingungen nicht entkoppelt sind.

5. Beispiele

Durch zwei einfache Beispiele soll die Bewertung der unterschiedlichen Modelle erleichtert werden. Mit dem Finite-Elemente-Programmsystem COSAR [9] wurden deshalb Eigenschwingungsanalysen auf der Grundlage verschiedener mechanischer Modelle durchgeführt.

5.1. Offener Querschnitt

Als erstes Beispiel dient der im Bild 2 dargestellte Plattenbalken. Für die Ermittlung einer „quasiexakten“ Vergleichslösung erfolgte die Diskretisierung unter Ausnutzung der Symmetrie mit 56 rechteckigen Semiloofschalenelementen [9]. (Der Freiheitsgrad einer Hälfte des Systems beträgt 760.)

Die Lösungen für 4 quasi-eindimensionale Modelle wurden mit jeweils 8 eindimensionalen quadratischen isoparametrischen Elementen errechnet.

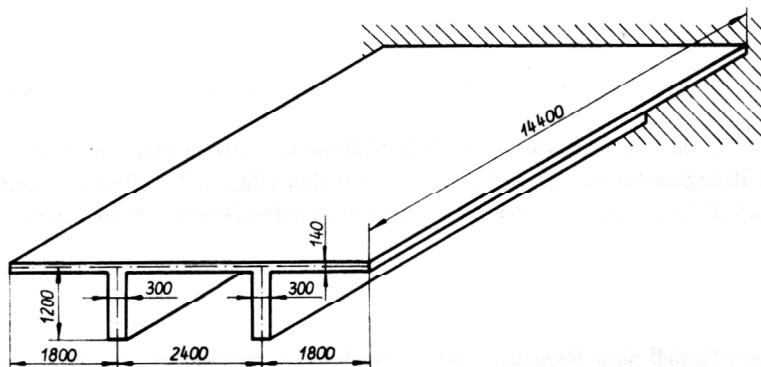


Bild 2
Plattenbalken:
 $E = 21\,000 \text{ Nmm}^{-2}$
 $\nu = 0$
 $\rho = 2,8 \text{ gcm}^{-3}$

Tabelle 1
Vergleich der mit unterschiedlichen Stabmodellen berechneten Eigenkreisfrequenzen des Plattenbalkens (in s^{-1})

Lfd. Nr.	Modell	Diff. gln.	Anzahl der verallgem. Verschieb.	Eigenkreisfrequenzen der Eigenformen									
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	„quasiexakte“ Vergleichslösung	(5)	—	17,4	24,0	63,1	63,8	87,2	89,1	121	134	139	144
2	Stabschalenmodell	(9)	40	17,4	23,7	63,1	63,1	85,6	88,1	117	134	132	139
3	Modell mit starrer Querschnittskontur	(17)	10	17,5	25,6	64,2	—	101	103	—	—	—	—
4	VLASOV-Stab	(19)	4	17,7	26,1	71,6	—	110	112	—	—	—	—
5	VLASOV-Stab ohne Rot./Wölbr.	(21)	4	17,7	26,2	73,6	—	110	113	—	—	—	—

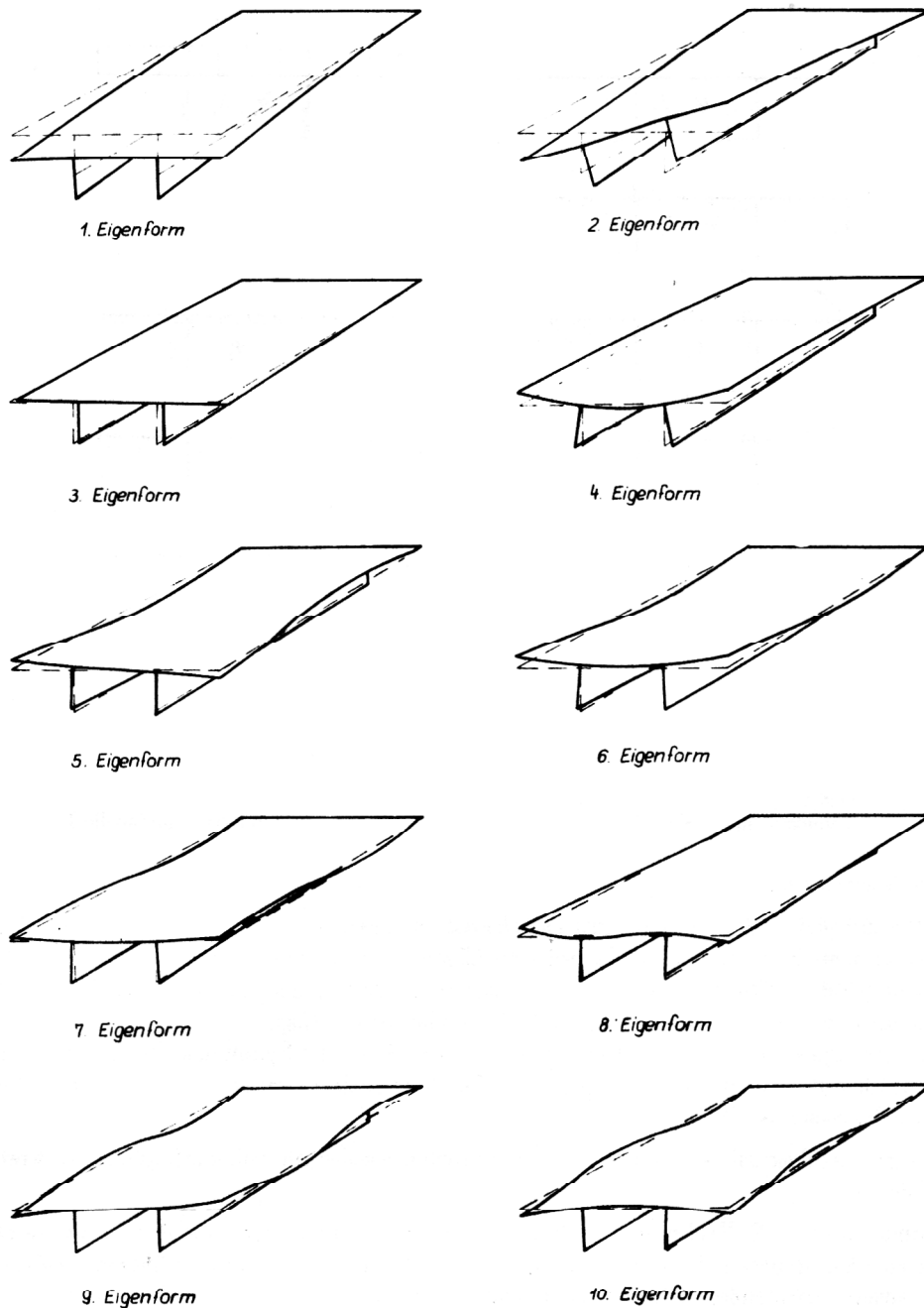


Bild 3
Die ersten Eigenformen des Plattenbalkens.

Gegenüber der Vergleichslösung sind im Stabschalenmodell nach den Gln. (9) und (10) nur die Längskrümmungen vernachlässigt. Da diese Vereinfachung ein zu weiches Modell liefert, ist es verständlich, daß die damit erzielten Eigenfrequenzen unterhalb der Vergleichslösung liegen (vgl. Tabelle 1).

Betrachtet man die Eigenformen (Bild 3), so ist die für höhere Eigenfrequenzen zunehmende Bedeutung der Querschnittskonturdeformationen sichtbar. Dementsprechend kann ein Modell mit starrer Querschnittskontur nur wenige Eigenformen bzw. -frequenzen zufriedenstellend erfassen. Ein solches Modell, in das die Schubverzerrungen, zusätzliche Verwölbungszustände und die in Längsrichtung wirkenden Trägheiten einbezogen sind, liegt der Rechnung Nr. 3 (Tabelle 1) zugrunde. Die dazugehörigen verallgemeinerten Koordinaten sind im Bild 4 dargestellt.

In der Rechnung Nr. 4 (Tabelle 1) wurde das Stabmodell von Vlasov [7] angewandt, und somit die Schubverzerrungen nicht berücksichtigt. Unter Beachtung der Gln. (13), (14) sind nur die verallgemeinerten Koordinaten φ_1 bis φ_4 (Bild 4) in die Rechnung einbezogen. Es zeigt sich, daß die Vernachlässigung der Schubverzerrungen einen deutlichen Genauigkeitsverlust zur Folge hat.

Die zusätzliche Vernachlässigung der in Längsrichtung wirkenden Trägheiten in der Rechnung Nr. 5 (Tabelle 1) hat demgegenüber einen vergleichsweise geringen Einfluß.

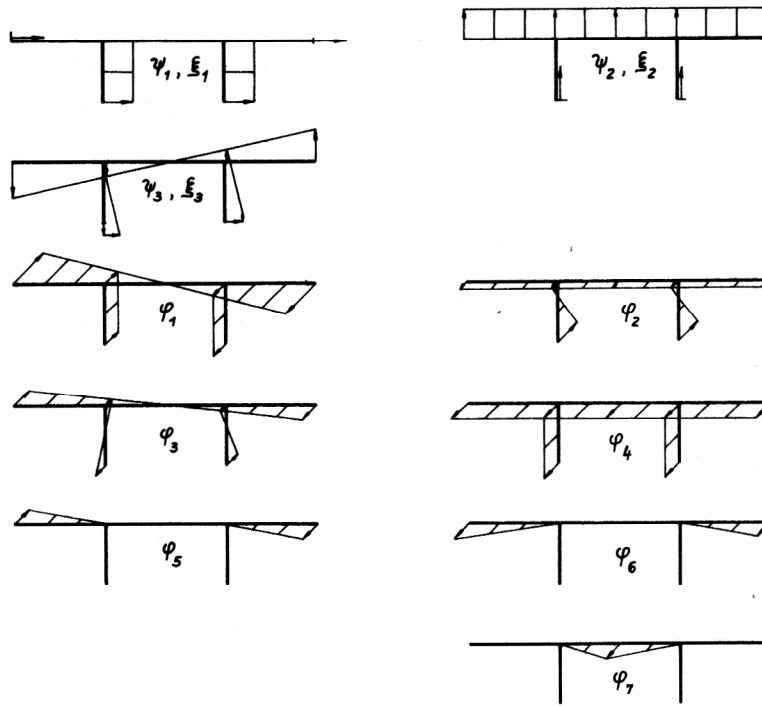


Bild 4
Verallgemeinerte Koordinaten des Plattenbalkens für die Rechnung Nr. 3 in Tabelle 1

5.2. Geschlossener Querschnitt

Mit Hilfe des zweiten Beispiels sollen auch für einen geschlossenen Querschnitt der Vergleich und die Bewertung unterschiedlicher Modelle ermöglicht werden. Dafür wurden die Eigenschwingungen eines trapezförmigen Kastenträgers aus Stahlblech untersucht (Bild 5). Die Randbedingungen wurden für die Testrechnungen idealisiert, so daß der Träger gabelgelagert ist und über zwei dehnstarre, aber biegeschlaffe Endschotte verfügt.

Bei der Errechnung der „quasiexakten“ Vergleichslösung wurde wieder die Symmetrie des Querschnittes ausgenutzt. Der halbe Umfang wurde mit 6 und die Trägerlänge mit 16 Semiloofschalenelementen vernetzt. (Somit beträgt der Freiheitsgrad einer Hälfte des Systems 1247.)

Für die Eigenschwingungsanalyse mit verschiedenen quasiaeindimensionalen Modellen erfolgte die Diskretisierung durch 8 eindimensionale Elemente.

Da das Stabschalenmodell (Tab. 2, Rechnung Nr. 2) außer den Längskrümmungen alle Anteile der linearen Scheiben- und Plattentheorie enthält, stimmen die Eigenfrequenzen gut mit der Vergleichslösung überein (Tab. 2). Die bei den höheren Eigenfrequenzen auftretenden Abweichungen sind vor allem auf die unterschiedliche Diskretisierung in Stab-längsrichtung zurückzuführen.

In der Rechnung Nr. 3 (Tab. 2) wurde ein Modell benutzt, welches auf der halbmomentenfreien Schalentheorie von Vlasov mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen basiert. Die Ergebnisse zeigen, daß dieses Modell für den geschlossenen Querschnitt gut geeignet ist.

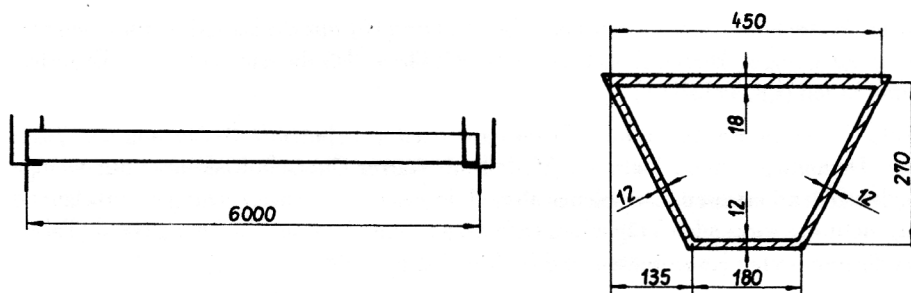


Bild 5
Gabelgelagerter Trapezträger mit dehnstarrten und biegeschlaffen Endschotten:
 $E = 210\,000\text{ Nmm}^{-2}$
 $\nu = 0,3$
 $\rho = 7,85\text{ gem}^{-3}$

Tabelle 2
Eigenkreisfrequenzen des Trapezträgers (in s^{-1})

Lfd. Nr.	Modell	Diff.- gln.	Anzahl d. verallgem. Verschieb.	Eigenkreisfrequenzen der Eigenformen									
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	„quasiexakte“ Vergleichs- lösung	(5)	—	147	193	552	726	1060	1290	1330	1440	1550	1570
2	Stabschalenmodell	(9)	32	147	193	552	729	1080	1290	1340	1510	1560	1580
3	Halbmomentenfreie Vlasov-Schale mit Schubverzerrungen	(11)	12	148	194	560	736	1100	1290	1360	1510	1570	1580
4	Modell mit starrer Querschnittskontur	(17)	7	148	194	572	751	1220	1310	1610	2040	—	—
5	Modell mit starrer Querschnittskontur ohne Schubver- zerrungen	(19)	4	151	197	611	797	1410	—	1830	2590	—	—
6	Modell mit starrer Querschnittskontur ohne Schubver- zerrungen und ohne Rotations- und Wölb- trägeiten	(21)	4	151	198	615	806	1430	—	1870	2650	—	—

Ebenso wie beim Plattenbalken liefert ein Modell mit starrer Querschnittskontur auch bei diesem Beispiel nur für wenige Eigenfrequenzen realistische Werte (vgl. Bild 6). Dies verdeutlicht Rechnung Nr. 4 (Tab. 2), in der die 6 Starrkörperbewegungen des Querschnittes und ein linearer Verwölbungszustand als verallgemeinerte Koordinaten benutzt wurden.

Die Vernachlässigung der Schubverzerrungen in der Rechnung Nr. 5 (Tab. 2) bringt bereits in der ersten Eigenfrequenz einen Genauigkeitsverlust von etwa 2 %. Außerdem sind die Torsionsschwingungen, z. B. die 6. Eigenform, nicht mehr erfassbar.

Durch den Verzicht auf die Rotations- und Wölbträgeiten des Querschnittes führt die Rechnung Nr. 6 (Tab. 2) zu einer weiteren Ergebnisverschlechterung.

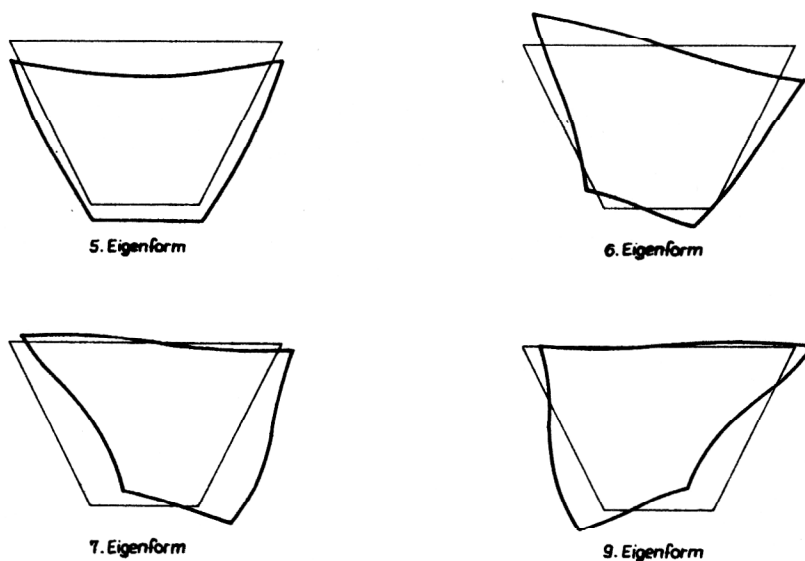


Bild 6
Darstellung der Deformation des Trapezquerschnittes in Feldmitte für 4 ausgewählte Eigenformen

6. Zusammenfassung

Die bisher durchgeführten Testrechnungen lassen erkennen, daß die in [1] vorgestellten quasi-eindimensionalen Modelle bei Berücksichtigung der Trägheiten auch für Eigenschwingungsanalysen einsetzbar sind.

Wie die Beispiele zeigen, kann im Vergleich zu den klassischen Stabmodellen insbesondere durch die Einbeziehung von Querschnittskonturdeformationen eine neue Ergebnisqualität erreicht werden.

Natürlich ist für die Eigenschwingungsanalyse von kurzen (z. B. $l : d_i \approx 3 : 1$) oder sehr dünnwandigen ($d_i : t_i \approx 100 : 1$) prismatischen Konstruktionen auch weiterhin die Anwendung einer vollständigen zweidimensionalen Scheiben-/Plattentheorie zu empfehlen. Denn die in diesen Konstruktionen auftretende starke Beteiligung von Plattenverformungen läßt sich mit den verallgemeinerten Stabmodellen nur unzureichend erfassen.

Es kann weiterhin eingeschätzt werden, daß es mit der Entwicklung des finiten Stabschalenelementes auf der Grundlage der Modellgleichungen (9) und (10) gelungen ist, die praktische Anwendung der verallgemeinerten Stabmodelle zu erleichtern. Da die Definition der verallgemeinerten Koordinaten, die Ermittlung der Querschnittskennwerte und die numerische Lösung des Differentialgleichungssystems automatisch erfolgt, hat sich der Arbeitsaufwand für den Nutzer wesentlich verringert.

LITERATUR

- [1] Altenbach, J.; Zwicke, M.: Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die statische Strukturanalyse dünnwandiger komplexer Konstruktionen. Technische Mechanik 7 (1986) 3, S. 52
- [2] Altenbach, J.; Kissing, W.: Statische und dynamische Analyse für prismatische und nichtprismatische Kastenträger. Technische Mechanik 7 (1986) 1, S. 37.
- [3] de Boer, R.: Der gerade Stab mit geschlossenem dünnwandigen Profil unter näherungsweise Berücksichtigung der Schub- und Querschnittsdeformation. Ingenieur-Archiv 39 (1970) 1, S. 53.
- [4] Möller, R.: Zur Berechnung prismatischer Strukturen mit beliebigem nichtformtreuen Querschnitt. TH Darmstadt, Diss. 1982.
- [5] Saal, G.: Ein Beitrag zur Schwingungsberechnung von dünnwandigen, prismatischen Schalenträgwerken mit unverzweigtem Querschnitt. TH Darmstadt, Diss. 1974.
- [6] Timoshenko, S.: Schwingungsprobleme der Technik. Berlin, Verlag von Julius Springer 1932.
- [7] Vlasov, V. S.: Dünnwandige elastische Stäbe (Band 2). VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1964.
- [8] Vlasov, V. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag Berlin 1958.
- [9] Nutzerhandbuch des Programmsystems COSAR. Teil I: Grundlagen. Teil II: Eingabevorschrift, TH Magdeburg, Methodisch-Diagnostisches Zentrum „Finite Elemente“ 1985.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach
Dipl.-Ing. Michael Zwicke
Technische Hochschule „Otto von Guericke“
Sektion Maschinenbau
PSF 124
Magdeburg
3010