TECHNISCHE MECHANIK 7 (1986) Heft 4
Manuskripteingang: 19. 06. 1986

Konstitutive Gleichungen für viskoelastische ebene Flächentragwerke

Holm Altenbach

0. Einleitung

Im konstruktiven Ingenieurbau und anderen Bereichen der Technik ist mit dem zunehmenden Einsatz von Polymerwerkstoffen zu rechnen, da diese über eine Reihe von günstigen Eigenschaften gegenüber anderen Konstruktionswerkstoffen verfügen. Damit tritt jedoch auch die Frage nach verbesserten Beschreibungsmethoden für das reale Materialverhalten auf. Für dreidimensionale Kontinua ist dieses Problem von vielen Autoren untersucht worden, und man kann heute oft von einem gesicherten Erkenntnisstand ausgehen.

Für zweidimensionale Kontinua (Schalen, Platten, Scheiben) kann dies nicht ohne Einschränkungen festgestellt werden. Dies hat u. a. seine Ursache darin, daß es völlig unterschiedliche Formulierungsmöglichkeiten für Platten- und Schalentheorien gibt. Wenn man Flächentragwerke mit Hilfe von zweidimensionalen Feldgleichungen beschreiben will, so lassen sich diese wie folgt erhalten [1]:

- mit der Annahme von bestimmten Hypothesen für den Deformations- und Spannungszustand,
- mit Hilfe von analytischen Methoden (z. B. Reihenentwicklungen für die Dickenkoordinate bestimmter Charakteristika des Deformations- und Spannungszustandes),
- durch direkte Formulierung für ein zweidimensionales Modellkontinuum.

In der vorliegenden Arbeit wird von einer direkt formulierten Theorie für ebene Flächentragwerke (gekoppeltes Platten/Scheibenproblem) ausgegangen, wobei die Frage nach den Vor- und Nachteilen einer solchen Vorgehensweise gegenüber der ersten bzw. zweiten Formulierungsmöglichkeit an dieser Stelle nicht ausdiskutiert werden soll.

Im Rahmen der direkten Formulierung von Theorien für zweidimensionale Kontinua sind folgende Probleme zu lösen [2]:

1. Einbettung der das zweidimensionale Modellkontinuum repräsentierenden Fläche in den dreidimensionalen Raum,
2. Wahl eines geeigneten verallgemeinerten thermodynamischen Systems
   - Einführung kinematischer und dynamischer Größen,
   - Erhaltung von Masse, Impuls, Drehimpuls, Energie,
   - Entropieprinzip,
3. Herleitung konstitutiver Beziehungen,
4. Interpretation der zweidimensionalen Feldgrößen.

An dieser Stelle soll nur das dritte Problem behandelt werden, wobei ein möglichst allgemeiner Zugang zur Klasse der viskoelastischen Materialien angestrebt wird. Während die ersten beiden Probleme bereits in früheren Arbeiten diskutiert sind [3], [4], ist die Behandlung des 4. Problems für einen nachfolgenden Beitrag vorgesehen. Es sei hier nur betont, daß die Lösung des 4. Problems entscheidenden Einfluß auf den Erfolg von direkt formulierten zweidimensionalen Theorien hat.

Für die Arbeit wurden folgende Annahmen getroffen:

1. die Flächentragwerksklasse betreffend – Betrachtung ebener Flächentragwerke, wobei das Platten/Scheibenproblem gekoppelt auftreten kann,
2. den Analysebereich betreffend – Betrachtung isothermer Prozesse,
3. die kinematische Modellklasse betreffend – Voraussetzung geometrischer Linearität, wobei das kinematische Modell den Freiheitsgrad 5 (3 Translationen, 2 Rotationen) haben soll,
4. die Materialklasse betreffend – Betrachtung nichtpolaren, anisotropen, linear-viskoelastischen, alterungsfreien Materials,
5. die Materialinhomogenitäten betreffend – Zulassung von veränderlichen Materialeigenschaften über den Flächentragwerksquerschnitt (z. B. geschichtete Konstruktionen).

Offensichtlich kann man diese Annahmen ganz bzw. teilweise weglassen. Damit würde sich der Aufwand der Ableitungen wesentlich steigern. Außerdem ginge die Übersichtlichkeit an einigen Stellen verloren. Im Rahmen der getroffenen Annahmen läßt sich eine in sich mathematisch und physikalisch widerspruchsfreie Theorie formulieren, was nachfolgend gezeigt werden soll.

1. Grundgleichungen des gekoppelten Platten/Scheibenproblems

Unter Beachtung der eingangs getroffenen Einschränkungen für die Arbeit lassen sich die Gesetze der Mechanik und Thermodynamik für das ebene zweidimensionale Kontinuum wie folgt angeben [3], [4]:

– Bewegungsgleichungen

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} + \underline{q} = \rho(\underline{\ddot{u}} + \underline{\underline{J}}_1^T \cdot \underline{\ddot{\varphi}}), \tag{1.1}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{T}}_x + \underline{m} = \rho(\underline{\underline{J}}_1 \cdot \underline{\ddot{u}} + \underline{\underline{J}}_2 \cdot \underline{\ddot{\varphi}}), \tag{1.2}$$

– Energieerhaltungssatz

$$\dot{U} = \hat{\underline{\underline{T}}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{T}_n \cdot \dot{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{M}}^T \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}} + b \tag{1.3}$$

– Entropieprinzip

$$\dot{S} \geqslant b / T. \tag{1.4}$$

Hier sind $\underline{\underline{T}}$, $\underline{\underline{M}}$ der Kräfte- und der Momententensor, $\underline{q}$, $\underline{m}$ der Flächenkräfte- und der Flächenmomentevektor, $\underline{u}$, $\underline{\varphi}$ der Verschiebungs- und der Verdrehungsvektor, ρ, $\rho\,\underline{\underline{J}}_\alpha$ die spezifische Dichte und die spezifischen Trägheitstensoren, $\underline{\nabla}$ der zweidimensionale Hamiltonoperator, U, S die spezifische innere Energie und die spezifische Entropie, $\underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\gamma}$, $\underline{\underline{\kappa}}$ der Tensor der Dehnungen und Gleitungen in der Ebenen, der Querschubdeformationsvektor sowie der Tensor der Biege- und Drilldeformationen, b eine skalare Wärmequelle, T die absolute Temperatur. Mit $(\quad)^T$ werden transponierte Größen gekennzeichnet, $(\quad)^{\cdot}$ bedeutet Ableitung nach der Zeitkoordinaten t. Außerdem gilt

$$\underline{\underline{T}}_x = T_{\alpha k}\, \underline{e}_\alpha \times \underline{e}_k, \quad \hat{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{a}}, \quad \underline{T}_n = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{e}_3,$$

wobei $\underline{e}_k$ die orthonormierte Basis auf der Ebenen ist und mit $\underline{\underline{a}}$ der erste metrische Tensor bezeichnet wird. Beim Aufstellen der Gln. (1.1) – (1.4) wurden weitestgehendst die Symmetriebeziehungen ausgenutzt, so z. B.

$$\hat{\underline{\underline{T}}} = \hat{\underline{\underline{T}}}^T$$

(Symmetrie des ebenen Anteils des Kräftetensors) und die Symmetrie des Spannungstensors (das Flächentragwerk besteht aus nichtpolarem Material). Griechische Indizes können, wenn nicht anders vereinbart, die Werte 1, 2 annehmen, lateinische die Werte 1, 2, 3.
Mit der Einführung der spezifischen freien (Helmholtzschen) Energie

$$H = U - ST \tag{1.5}$$

folgt aus (1.3) und (1.4) die dissipative Ungleichung

$$\phi = \hat{\underline{\underline{T}}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{T}_n \cdot \dot{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{M}}^T \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}} - \dot{H} \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Wenn $\phi = 0$ ist, so tritt keine Energiedissipation auf und der entsprechende Prozeß ist reversibel.

2. Rheologie ebener zweidimensionaler Kontinua – thermodynamische Prozesse und konstitutive Gleichungen

Die bisher formulierten Gesetze gelten für alle ebenen zweidimensionalen Kontinua. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Materialien treten in den konstitutiven Gleichungen (Stoffgesetze) auf. An dieser Stelle sollen Erfahrungen bei der Formulierung der konstitutiven Gleichungen aus der dreidimensionalen Theorie (s. beispielsweise [5]) übertragen werden, wobei sich auf eine allgemeine Formulierung von viskoelastischen konstitutiven Gleichungen beschränkt wird. Für dreidimensionale Kontinua ist eine solche Vorgehensweise u. a. in [6] beschrieben.
Folgende, aus der Rationalen Mechanik [7] bekannten Prinzipien sollen als erfüllt angesehen werden: Determinismusprinzip, Lokalitätsprinzip, Prinzip der materiellen Objektivität und Prinzip des „schwindenden Gedächtnisses". Das bedeutet u. a., daß der aktuelle „Spannungszustand" nur von der Bewegungsgeschichte und von den Deformationsgradienten aller Ordnungen in unmittelbarer Nähe des betrachteten Punktes abhängt. Die Erfüllung des Lokalitätsprinzips soll weiter verschärft werden: Der aktuelle „Spannungszustand" ist nur durch die Geschichte der Deformationsgradienten erster Ordnung gekennzeichnet („einfaches Material"). Die konsequente Anwendung der aufgezählten Prinzipe führt auf Ausdrücke, die eine einfache Interpretation und die Ermittlung aller Koeffizienten in den konstitutiven Gleichungen zulassen.
Im Falle des zweidimensionalen Kontinuums erhält man für isotherme Prozesse, daß der thermodynamische Zustand im Punkt $\underline{r}$ des Kontinuums durch die Deformationstensoren $\underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\gamma}$, $\underline{\underline{\kappa}}$ definiert ist. Diese hängen ausschließlich von den das Kontinuum beschreibenden Koordinaten x_α (bzw. von $\underline{r}$) und der Zeitkoordinaten t ab. Als thermodynamischen Prozeß wird somit die gesamte Änderungsgeschichte der konstitutiven Variablen $\underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\gamma}$, $\underline{\underline{\kappa}}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}^\tau &= \underline{\underline{\epsilon}}^\tau(\underline{r}, \tau), \\ \underline{\gamma}^\tau &= \underline{\gamma}^\tau(\underline{r}, \tau), \qquad \tau \leqslant t \\ \underline{\underline{\kappa}}^\tau &= \underline{\underline{\kappa}}^\tau(\underline{r}, \tau), \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei der aktuelle Zeitpunkt mit t und ein beliebiger Zeitpunkt mit τ bezeichnet wird.
Das thermodynamische Verhalten des zweidimensionalen Kontinuums im Punkt $\underline{r}$ ist für die hier betrachtete Problemklasse dann vollständig definiert, wenn die Kraftgrößentensoren $\underline{\underline{T}}$, $\underline{\underline{M}}$, die spezifische freie Energie H und die spezifische innere Entropie S als Operatoren (Funktionale) des thermodynamischen Prozesses in diesem Punkt gegeben sind

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}(\underline{r}, t) &= \underline{\underline{T}} \left\{ \underline{\underline{\epsilon}}^T, \underline{\gamma}^T, \underline{\underline{\kappa}}^T \right\} , \\ \underline{\underline{M}}(\underline{r}, t) &= \underline{\underline{M}} \left\{ \underline{\underline{\epsilon}}^T, \underline{\gamma}^T, \underline{\underline{\kappa}}^T \right\} , \\ H(\underline{r}, t) &= H \left\{ \underline{\underline{\epsilon}}^T, \underline{\gamma}^T, \underline{\underline{\kappa}}^T \right\} , \\ S(\underline{r}, t) &= S \left\{ \underline{\underline{\epsilon}}^T, \underline{\gamma}^T, \underline{\underline{\kappa}}^T \right\} . \end{aligned} \tag{2.2}$$

In (2.2) wurde bereits berücksichtigt, daß das Kontinuum homogen bezüglich der Koordinaten x_α ist. Wenn dies nicht gegeben ist, geht $\underline{r}$ in die Operatoren (2.2) explizit ein. Weitere Vereinfachungen der Operatoren (2.2) sind nur bei Einbeziehung von Symmetrieeigenschaften des Kontinuums bzw. des Prinzips des „schwindenden Gedächtnisses" möglich.

Die Kenntnis der Operatoren (2.2) ist ausreichend für die Definition des Materialverhaltens konkreter Materialien. Die Ausdrücke (2.2) tragen daher auch die Bezeichnung konstitutive Gleichungen. Unterschiedliche Materialien sind durch unterschiedliche konstitutive Gleichungen gekennzeichnet. Während die Gln. (1.1) – (1.4) „Naturgesetze" darstellen, kann man konstitutive Gleichungen nicht in allgemeiner Form angegeben.
Die Operatoren (2.2) sind nicht frei wählbar. Sie unterliegen bestimmten Restriktionen, die sich aus der Thermodynamik ergeben. Während der Energieerhaltungssatz (erster Hauptsatz der Thermodynamik) keine Restriktionen liefert, da er aufgrund der frei wählbaren äußeren Belastungen ($\underline{q}$, $\underline{m}$) bzw. der skalaren Wärmequelle b immer erfüllt werden kann, enthält die dissipative Ungleichung (1.5) (spezielle Form des zweiten Hauptsatzes) Einschränkungen, da sie nur Operatoren und keine frei wählbaren Variablen enthält. Folglich müssen die Operatoren (2.2) die dissipative Ungleichung immer erfüllen, d. h. für beliebige thermodynamische Prozesse.

3. Zweidimensionale Kontinua mit linear-viskoelastischen Eigenschaften

Während in [4] zweidimensionale Kontinua mit grundlegenden rheologischen Eigenschaften (elastisch, viskos) analysiert worden sind, sollen an dieser Stelle die konstitutiven Gleichungen in allgemeinerer Form erhalten werden. Dazu ist zunächst ein Ausdruck für die spezifische freie Energie zu ermitteln und anschließend zu analysieren.

3.1. Die spezifische freie Energie

Das Prinzip des „schwindenden Gedächtnisses" gestattet die Klasse der möglichen Operatoren (2.2) weiter einzuschränken. Unter dem Begriff „Material mit schwindendem Gedächtnis" versteht man allgemein, daß weiter zurückliegende Ereignisse (Belastungen, Deformationen) einen geringeren Einfluß auf die Operatoren (2.2) haben als solche, die kürzer zurückliegen (Coleman [8]). Diese Definition wird hier auf zweidimensionale ebene Kontinua bei isothermen Prozessen angewendet, wobei von kontinuierlich verlaufenden Deformationsgeschichten ausgegangen wird.
Für den Punkt $\underline{r}$ repräsentieren (2.1) solche kontinuierlichen Deformationsgeschichten bis zum aktuellen Betrachtungszeitpunkt t. Damit ist nach Coleman [8] für viskoelastisches Material die Kenntnis des „Nachwirkungsfunktionals" für die spezifische freie Energie ausreichend, um die übrigen Größen zu ermitteln, d. h. es genügt die Angabe von

$$H(\underline{r}, t) = H \left\{ \underline{\underline{\epsilon}}^T, \underline{\gamma}^T, \underline{\underline{\kappa}}^T \right\} . \tag{3.1}$$

Unter Verwendung des Approximationstheorems von Stone-Weierstraß, wonach ein tensorwertiges Funktional für $-\infty < \tau \leqslant t$ durch ein Polynom aus der Menge der linearen Funktionale angenähert werden kann, und des Rieszschen Darstellungssatzes, der die Möglichkeit der Darstellung jedes linearen Funktionals durch ein Stieltjes'sches Integral begründet, läßt sich bei Beachtung der eingangs getroffenen Annahmen die spezifische Energie für das viskoelastische Modellkontinuum durch lineare und quadratische Funktionale darstellen. Bei Übergang von der Stieltjes'schen zur Riemannschen Schreibweise erhält man:

$$\begin{aligned} H = H_o &+ \int_{-\infty}^{t} \Big[\underline{\underline{T}}_o^*(t, \tau_1) \cdot\cdot \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}(\tau_1)}{\partial \tau_1} + \underline{T}_{no}^*(t, \tau_1) \cdot \frac{\partial \underline{\gamma}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \\ &+ \underline{\underline{M}}_o^{*T}(t, \tau_1) \cdot\cdot \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \Big] d\tau_1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \Big[\frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{A}}^*(t, \tau_1, \tau_2) \cdot\cdot \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}(\tau_2)}{\partial \tau_2} \\ &+ 2 \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*(t, \tau_1, \tau_2) \cdot\cdot \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}(\tau_2)}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}(\tau_2)}{\partial \tau_1} \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{C}}^*(t, \tau_1, \tau_2) \cdot\cdot \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}(\tau_2)}{\partial \tau_2} \\ &+ \frac{\partial \underline{\gamma}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^*(t, \tau_1, \tau_2) \cdot \frac{\partial \underline{\gamma}(\tau_2)}{\partial \tau_2} + 2 \frac{\partial \underline{\gamma}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \cdot \Big\{ {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_1^*(t, \tau_1, \tau_2) \cdot\cdot \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}(\tau_2)}{\partial \tau_2} \end{aligned}$$

$$+ {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_2^* (t, \tau_1, \tau_2) \cdot\cdot \frac{\partial \underline{\underline{\kappa}}(\tau_2)}{\partial \tau_2} \Big\} \Big] \, d\tau_1 \, d\tau_2 \,. \tag{3.2}$$

Die Eigenschaften der Materialien, für die der Ausdruck (3.2) gültig ist, sind nicht invariant gegenüber der Zeitkoordinaten t. Ein solches Verhalten ist z. B. für Materialien typisch, die altern können [9]. Diese Klasse sollte jedoch hier ausgeschlossen werden. Damit können in (3.2) nur Kerne vom Differenzen-Typ vorkommen [10]. Unter Beachtung der Abkürzungen für die Ableitungen nach der Zeitkoordinaten

$$\frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}(\tau_1)}{\partial \tau_1} \equiv \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) \,, \quad \frac{\partial \underline{\underline{\epsilon}}(\tau_2)}{\partial \tau_2} \equiv \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_2)$$

usw. erhält man

$$\begin{aligned}
H = {} & H_o + \int_{-\infty}^{t} \Big[\underline{\underline{T}}_o^* (t-\tau_1) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) + \underline{T}_{no} (t-\tau_1) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) \\
& + \underline{\underline{M}}_o^{*T} (t-\tau_1) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_1) \Big] d\tau_1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \Big[\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{A}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_2) \\
& + 2\, \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_2) + \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_1) \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{C}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_2) \\
& + \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(\tau_2) + 2\, \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) \cdot \Big\{ {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_1^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_2) \\
& + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_2 (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_2) \Big\} \Big] \, d\tau_1 \, d\tau_2 \,.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

In (3.2) bzw. (3.3) ist H_o die spezifische freie Energie im Ausgangszustand. Die spezifische freie Energie ist im Intervall $-\infty < \tau \leqslant t$ nicht negativ ($H \geqslant 0$). Dies folgt unmittelbar aus Definition der spezifischen freien Energie. Damit müssen die Kernfunktionen bei negativen Argumenten verschwinden. Die Kerne $\underline{\underline{T}}_o^*$, $\underline{T}_{no}^*$, $\underline{\underline{M}}_o^*$, ${}^{(4)}\underline{\underline{A}}^*$, ${}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*$, ${}^{(4)}\underline{\underline{C}}^*$, ${}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_1^*$, ${}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_2^*$, $\underline{\underline{\Gamma}}^*$ enthalten neben der Querschnittsgeometrie auch Werkstoffeigenschaften. Diese sind folglich nur für nichtnegative Argumente der Kerne zu bestimmen. Der Ausdruck (3.3) ist nicht frei wählbar, sondern unterliegt den aus der dissipativen Ungleichung (1.6) stammenden Restriktionen.

3.2. *Konstitutive Gleichungen*

Zunächst wird der Ausdruck für die spezifische Energie (3.3) in die dissipative Ungleichung (1.6) eingesetzt. Dabei erhält man

$$\begin{aligned}
& \Big\{ \hat{\underline{\underline{T}}} - \underline{\underline{T}}_o^* (0) - \int_{-\infty}^{t} \Big[{}^{(4)}\underline{\underline{A}}^* (t-\tau_1, 0) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) + {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^* (t-\tau_1, 0) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_1) + \\
& \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) \cdot {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_1^* (t-\tau_1, 0) \Big] d\tau_1 \Big\} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t) + \Big\{ \underline{T}_n - \underline{T}_{no}^* (0) - \int_{-\infty}^{t} \Big[\underline{\underline{\Gamma}}^* (t-\tau_1, 0) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) \\
& + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_1^* (t-\tau_1, 0) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_2^* (t-\tau_1, 0) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_1) \Big] d\tau_1 \Big\} \cdot \dot{\underline{\gamma}}(t) + \Big\{ \underline{\underline{M}}^T - \underline{\underline{M}}_o^{*T} (0) \\
& - \int_{-\infty}^{t} \Big[\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^* (t-\tau_1, 0) + {}^{(4)}\underline{\underline{C}}^* (t-\tau_1, 0) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_1) \cdot {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_2^* (t-\tau_1, 0) \Big] d\tau_1 \Big\} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(t) \\
& + \Gamma + \Lambda \geqslant 0 \,,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei Γ und Λ folgende Bedeutung haben

$$\begin{aligned}
\Gamma = {} & - \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \Big[\underline{\underline{T}}_o^* (t-\tau_1) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) + \underline{T}_{no}^* (t-\tau_1) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) + \underline{\underline{M}}_o^{*T} (t-\tau_1) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_1) \Big] d\tau_1 \\
\Lambda = {} & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \Big\{ \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) \,..\, {}^{(4)}\underline{\underline{A}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \,..\, \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_2) \\
& + 2\, \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_1) \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_2) + \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_1) \cdot\cdot {}^{(4)}\underline{\underline{C}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_2) \\
& + \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(\tau_2) + 2\, \dot{\underline{\gamma}}(\tau_1) \cdot \Big[{}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_1^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau_2) \\
& + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}_2^* (t-\tau_1, t-\tau_2) \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\kappa}}}(\tau_2) \Big] \Big\} \, d\tau_1 \, d\tau_2 \,.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Beim Aufstellen der Gl. (3.4) wurden die Symmetrieeigenschaften der Kerne und der Deformationstensoren berücksichtigt.

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Ungleichung (3.4) ist

$$\hat{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{T}}^*_o(0) + \int_{-\infty}^{t} [{}^{(4)}\underline{\underline{A}}^*(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) + {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\kappa}}}(\tau_1) + \underline{\dot{\gamma}}(\tau_1) \cdot {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_1(t-\tau_1,0)]\, d\tau_1,$$

$$\underline{T}_n = \underline{T}^*_{no}(0) + \int_{-\infty}^{t} [\underline{\underline{\Gamma}}^*(t-\tau_1,0) \cdot \underline{\dot{\gamma}}(\tau_1) + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_1(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_2(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\kappa}}}(\tau_1)]\, d\tau_1, \tag{3.6}$$

$$\underline{\underline{M}}^T = \underline{\underline{M}}^{*T}_o(0) + \int_{-\infty}^{t} [\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) \cdot\cdot\, {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*(t-\tau_1,0) + {}^{(4)}\underline{\underline{C}}^*(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\kappa}}}(\tau_1) + \underline{\dot{\gamma}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^*_2(t-\tau_1,0)]\, d\tau_1,$$

$$\Gamma + \Lambda \geqslant 0. \tag{3.7}$$

In (3.7) hat Γ die Größenordnung der ersten Potenz der Deformationstensoren, Λ die der zweiten Potenz. Entsprechend der Forderung einer gleichmäßigen Approximation gilt dann

$$\Gamma \geqslant 0, \quad \Lambda \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Da die kinematischen Größen willkürlich wählbar sind, folgt aus der ersten Ungleichung (3.8)

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \underline{\underline{T}}^*_o(t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\, \underline{T}^*_{no}(t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\, \underline{\underline{M}}^*_o(t) = 0. \tag{3.9}$$

Λ stellt offensichtlich die während der Verformungsgeschichte dissipierte Energie dar [6].
Der Beitrag, den die Koeffizienten (Kerne) bei den linearen Gliedern ($\underline{\underline{T}}^*_o$, $\underline{T}^*_{no}$, $\underline{\underline{M}}^*_o$) in die Gl. (3.3) einbringen, hat die Größenordnung $0(1)$, der Beitrag der Koeffizienten bei den quadratischen Gliedern (${}^{(4)}\underline{\underline{A}}^*$, ${}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*$, ${}^{(4)}\underline{\underline{C}}^*$, ${}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_1$, ${}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_2$, $\underline{\underline{\Gamma}}^*$) die Größenordnung $0(h^{-1})$. Dabei ist h die Dicke des Flächentragwerks. Aus dieser Abschätzung folgt, daß für die Analyse dünner Flächentragwerke der Einfluß der linearen Glieder vernachlässigt werden kann. Folglich vereinfachen sich für diesen Fall auch die konstitutiven Gln. (3.6)

$$\hat{\underline{\underline{T}}} = \int_{-\infty}^{t} [{}^{(4)}\underline{\underline{A}}^*(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) + {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\kappa}}}(\tau_1) + \underline{\dot{\gamma}}(\tau_1) \cdot {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_1(t-\tau_1,0)]\, d\tau_1$$

$$\underline{T}_{no} = \int_{-\infty}^{t} [\underline{\underline{\Gamma}}^*(t-\tau_1,0) \cdot \underline{\dot{\gamma}}(\tau_1) + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_1(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) + {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_2(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\kappa}}}(\tau_1)]\, d\tau_1, \tag{3.10}$$

$$\underline{\underline{M}}^{*T}_o = \int_{-\infty}^{t} [\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) \cdot\cdot\, {}^{(4)}\underline{\underline{B}}^*(t-\tau_1,0) + {}^{(4)}\underline{\underline{C}}^*(t-\tau_1,0) \cdot\cdot\, \underline{\underline{\dot{\kappa}}}(\tau_1) + \underline{\dot{\gamma}}(\tau_1) \cdot {}^{(3)}\underline{\underline{\Gamma}}^*_2(t-\tau_1,0)]\, d\tau_1.$$

Eine weitere Vereinfachung ist nur bei Ausnutzung entsprechender Symmetrieeigenschaften des viskoelastischen Materials möglich.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Mit den Gln. (1.1) – (1.4), (1.6), (3.3), (3.10) und entsprechenden geometrischen Beziehungen sowie Randbedingungen (die hier nicht angeführt sind) existiert ein Gleichungssystem zur formalen Beschreibung des Verhaltens linear-viskoelastischer, alterungsfreier zweidimensionaler Kontinua bei isothermen Prozessen. Dieses Gleichungssystem ist physikalisch und mathematisch im Rahmen der getroffenen Annahmen widerspruchsfrei. Gleichzeitig ist aufgrund der großen Anzahl von Materialfunktionen (für das anisotrope Materialgesetz sind 36 Funktionen zu ermitteln) mit einem erheblichen Aufwand bei einer erfolgreichen Anwendung der Theorie zu rechnen. Andererseits besitzt die Theorie ein breiteres Anwendungsfeld als andere Theorien für viskoelastische Flächentragwerke (z. B. [11], [12]). Die hier angeführten Gleichungen eignen sich zur Beschreibung des Verhaltens einschichtiger und mehrschichtiger Flächentragwerke.
mehrschichtiger Flächentragwerke.
Für die Ermittlung der Materialfunktion stehen zwei Wege zur Verfügung. Während die experimentelle Ermittlung mit bekannten Schwierigkeiten verbunden ist, kann man verhältnismäßig genaue Ergebnisse mit Hilfe der Lösung geeigneter Testaufgaben erhalten. Diese Testaufgaben sind nach der hier angeführten Theorie und nach der klassischen Viskoelastizitätstheorie zu lösen. Eine anschließende Gegenüberstellung der Ergebnisse gestattet die Ermittlung der entsprechenden Materialfunktionen. Über erste Erfahrungen wurde in [13] berichtet. Zu einem späteren Zeitpunkt sollen dazu weitere Ergebnisse veröffentlicht werden.

LITERATUR

[1] Altenbach, H.: ZAMM 64 (1984) 10, S. 430 – 431.

[2] Rothert, H.: ZAMM 55 (1975), S. 647 – 656.

[3] Altenbach, H.: Technische Mechanik 5 (1984) 2, S. 51 – 58.

[4] Altenbach, H.: ZAMM 65 (1985) 12, S. 638 – 641.

[5] Palmow, W. A.: Technische Mechanik 5 (1984) 4, S. 20 – 31.

[6] Christensen, R. M.: Theory of Viscoelasticity, New York, Academic. 1971, Moskau, Mir, 1974 (in Russ.).

[7] Müller, I.: Thermodynamik – Die Grundlagen der Materialtheorie. Bertelsmann-Universitätsverlag, 1973.

[8] Coleman, B. D.: Arch. Rat. Mech. Anal. 17, S. 1 – 46 (1964).

[9] Огибалов, П. М., Ломакин, В. А., Кишкин, Б. П.: Механика полимеров. Москва, Изд. МГУ, 1975.

[10] Работнов, Ю. Н.: Ползучесть элементов конструкций, Москва, Наука, 1966.

[11] Olszak, W., Sawczuk, A.: Inelastic Response of Thin Shells. In: Thin Shell Theories – New Trends and Applications/ ed. W. Olszak, Wien –New York, Springer-Verlag, 1980, S. 211 – 241.

[12] Brilla, J.: Linear viscoelastic bending analysis of anisotropic plates. In: Proc. of XI. Int. Congress. Appl. Mech. 1964, Sprin Verlag, 1966.

[13] Altenbach, H.: Technische Mechanik, 7 (1986) 3, S. 38.