

# Zur Berechnung der Verzweigungslösungen inkompressibler elastisch-plastischer Verbundzugstäbe

Herbert Balke

## 0. Einleitung

Das rotationssymmetrische Verzweigungsproblem elastisch-plastischer Zugstäbe wurde bereits in [1] bis [6] behandelt. In [1] wird durch Vergleich der Verzweigungslösung des Zugstabes, welcher schubfreie Stirnflächen besitzt, mit der FEM-Rechnung für das inhomogene Problem des eingespannten Zugstabes die Bedeutung sowohl des Verzweigungspunktes als auch der Verzweigungsmoden nachgewiesen. [2] untersucht den Einfluß zweier verschiedener Spannungsgeschwindigkeitsdefinitionen auf die Verzweigungsspannung in einer asymptotischen Entwicklung für den inkompressiblen homogenen Zugstab. Die Erörterung einer allgemeineren Spannungsgeschwindigkeitsdefinition in einem erweiterten Prandtl-Reuß-Material erfolgt in [3] ebenfalls anhand einer asymptotischen Entwicklung. [4] enthält die Lösung des rotationssymmetrischen Verzweigungsproblems für den Verbundstab. [5] berücksichtigt die dissipative Erwärmung bei der Berechnung der Verzweigungsdehnung des kompressiblen Zugstabes. Eine asymptotische Lösung für den kompressiblen Zugstab wird in [6] angegeben.

Die vorliegende Arbeit hat die Ermittlung der Verzweigungsdehnungen nichtrotationssymmetrischer Verzweigungsmoden des homogenen Stabes und des Verbundstabes sowie die Angabe der Verzweigungsmoden zum Ziel. Außerdem soll der Einfluß einer allgemeinen Spannungsgeschwindigkeitsdefinition, welche gleichbedeutend mit einer Klasse von konstitutiven Annahmen ist, auf die numerisch bestimmbaren Verzweigungsdehnungen und -moden diskutiert werden. Wie in den genannten Literaturstellen wird einschränkend eine homogene Verzerrung im Grundzustand vorausgesetzt. Trotz dieser Vereinfachung und Separation der Variablen erfordert die Lösung des verbleibenden Problems 6. Ordnung die Anwendung numerischer Methoden. Eine systematische Vorgehensweise bietet sich hierbei an durch die Formulierung des Problems als ein System von 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung in denjenigen Variablen, die unmittelbar in den Randbedingungen auftreten. Auf dieses System ist dann auch bequem das Übertragungsmatrizenverfahren anwendbar. Damit beim unterschiedlichen Fließbeginn der Komponenten des Verbundstabes keine Querschwänge auftreten, die die Homogenität des Grundverzerrungszustandes aufheben, muß die Inkompressibilität der Materialien angenommen werden.

## 1. Definitionen und Grundgleichungen

Im folgenden wird die symbolische Schreibweise mit halbfetten lateinischen Großbuchstaben für Tensoren zweiter Stufe benutzt. Die Tensoren werden auch in raumfesten krummlinigen Koordinaten und Zylinderkoordinaten dargestellt. Die Bewegung des betrachteten Körpers wird beschrieben durch die räumliche Lage  $x^k(X^K, t)$  des typischen Teilchens, welches zur (formalen) Zeit  $t = 0$  die Position  $X^K$  besaß. Die Teilchengeschwindigkeit ist  $v^k = \partial x^k(X^K, t)/\partial t = \dot{v}^k$  (materielle Zeitableitung). Außerdem werden der Geschwindigkeitsgradient

$$L^k{}_l = v^k|_l, \quad (1.1)$$

die Deformationsgeschwindigkeit

$$D = \frac{1}{2} (L + L^T) \quad (1.2)$$

und die Drehgeschwindigkeit

$$W = \frac{1}{2} (L - L^T) \quad (1.3)$$

benötigt  $(( )|_l)$  – kovariante Ableitung nach  $x^l$ ,  $L^T$  – transponierter Tensor).

Als Verzweigungsbedingung dient die Gleichung des fortgesetzten Gleichgewichtes [7], in der die Variablen als Differenz zweier möglicher Variablen auftreten,

$$(T^k|_l|_k)^* = N^k|_l|_k = 0 \quad (1.4)$$

$$N = \dot{T} - LT + T \operatorname{tr} L \quad (1.5)$$

( $N$  – Nennspannungsgeschwindigkeit im Grundzustand,  $T$  – Spannungstensor,  $\operatorname{tr} L = L^k{}_k$ ) zusammen mit den Randbedingungen

$$N^k_l n_k = 0 \quad (1.6)$$

für richtungstreue Oberflächenkraftänderungen auf einem Teil der Oberfläche und

$$v^k = 0 \quad (1.7)$$

auf dem anderen Teil.

Die Gleichungen (1.4) . . . (1.7) erfordern ein differentielles Deformationsgesetz. Ein solches ist durch eine objektive Form der Prandtl-Reußschen Gleichungen mit isotroper Verfestigung gegeben [8]. Mit der Inkompressibilitätsforderung

$$L^k_k = D^k_k = 0 \quad (1.8)$$

lautet es für elastisch-plastische Deformationsvorgänge [3] (die Bezeichnungen  $\dot{T}_G$  bzw.  $H'$  von [3] wurden hier durch  $N$  bzw.  $E_p$  ersetzt)

$$D = \frac{1}{2G} \left( \dot{S} + S\dot{W} - W\dot{S} + \dot{Z} - \frac{1}{3} \text{Itr} \dot{Z} \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\text{tr}(\dot{S}\dot{T})}{E_p \text{tr}(S^2)} \cdot S \quad (1.9)$$

$$\sigma_v = H(\epsilon_v^p), \text{tr}(\dot{S}\dot{T}) > 0$$

oder in der invertierten Form mit (1.5)

$$\left. \begin{aligned} N &= 2G \left\{ D - \frac{\text{tr}(DS) - \text{tr}(\dot{Z}S)/(2G)}{[1 + E_p/(3G)] \text{tr}(S^2)} \cdot S \right\} \\ &\quad + \text{Itr} \dot{T}/3 - TW - DT - \dot{Z} + \text{Itr} \dot{Z}/3 \\ \sigma_v &= H(\epsilon_v^p), \text{tr}(SD) - \text{tr}(\dot{Z}S)/(2G) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Dabei bedeuten:

$S = T - \text{Itr}T/3$  Spannungsdeviator,  $I$  – Einheitstensor,

$$-\dot{Z} + \text{Itr} \dot{Z}/3 = -\alpha(TD + DT) - \gamma D \text{tr}T + (2/3)\alpha \text{Itr}(TD)$$

$$\text{tr}(\dot{Z}S) = 2\alpha \text{tr}(DTS) + \gamma \text{tr}T \text{tr}(DS)$$

$G = E/3$  – elastischer Schubmodul,

$$E_p = dH/d\epsilon_v^p > 0, \quad \sigma_v^2 = 3 \text{tr}(S^2)/2.$$

Die Verfestigungsfunktion  $H$  wird aus dem Verlauf der wahren Spannung  $\sigma_v = |\sigma| = \sigma$  über der logarithmischen plastischen Dehnung  $\epsilon_v^p$  nach Entlastung aus Zugspannungszuständen  $\sigma$  bestimmt. Die Erstbelastung und Entlastung genügen dem hypoelastischen Gesetz

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{2G} \left( \dot{S} + S\dot{W} - W\dot{S} + \dot{Z} - \frac{1}{3} \text{Itr} \dot{Z} \right) \\ \sigma_v &< H(\epsilon_v^p) \quad \text{oder} \quad \text{tr}(\dot{S}\dot{T}) \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Die Materialparameter  $\alpha, \gamma$  charakterisieren verschiedene Materialien bzw. entsprechen verschiedenen möglichen Spannungsgeschwindigkeitsdefinitionen [9]. Ihre Größenordnung soll 1 nicht überschreiten.

## 2. Verbundstab mit Kreisquerschnitt unter einachsigen Zug

Für die Tensoren  $D$  in (1.2) und  $W$  in (1.3) gilt in Zylinderkoordinaten des Grundzustandes  $(x^1, x^2, x^3) = (r, \varphi, z)$  mit  $\partial(\ )/\partial x^k = ( \ )_{,k}$  [10]

$$D^k_l = \begin{bmatrix} v_{1,1} & (v_{1,2} + v_{2,1} - 2v_2/x^1)/2 & (v_{1,3} + v_{3,1})/2 \\ D^1_2/(x^1)^2 & (v_{2,2} + x^1 v_{1,1})/(x^1)^2 & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2})/(x^1)^2 \\ D^1_3 & (x^1)^2 D^2_3 & v_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$W^k_l = \begin{bmatrix} 0 & (v_{1,2} - v_{2,1})/2 & (v_{1,3} - v_{3,1})/2 \\ -W^1_2/(x^1)^2 & 0 & (1/2)(v_{2,3} - v_{3,2})/(x^1)^2 \\ -W^1_3 & -(x^1)^2 W^2_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Die einachsige Zugspannung  $\sigma > 0$  in Stabachsrichtung  $x^3 = z$  liefert

$$T^k_l = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma \end{bmatrix}, \quad S^k_l = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\sigma}{3}, \quad \text{tr } T = \sigma. \quad (2.3)$$

Das fortgesetzte Gleichgewicht (1.4) ist in Zylinderkoordinaten mit den Metrikkoeffizienten  $g_{kl}$

$$g_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & (x^1)^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{kl} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/(x^1)^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

und den Christoffel-Symbolen 2. Art [10]

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{x^1}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -x^1, \quad \left\{ \begin{matrix} m \\ k \ l \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{sonst}$$

$$N^1_{1,2} + N^2_{1,2} + N^3_{1,3} + (N^1_1 - N^2_2)/x^1 = 0 \quad (2.4)$$

$$N^1_{2,1} + N^2_{2,2} + N^3_{2,3} + x^1 N^2_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$N^1_{3,1} + N^2_{3,2} + N^3_{3,3} + N^1_3/x^1 = 0. \quad (2.6)$$

Einsetzen von (2.3) in (1.10) und Berücksichtigung von

$$\left. \begin{aligned} T^k_n S^n_l &= \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2\sigma^2/3 \end{bmatrix}, \quad \text{tr}(DS) = \sigma D^3_3, \quad \text{tr}(S^2) = 2\sigma^2/3 \\ -\text{tr } \dot{T}/3 &= \dot{p}, \quad \text{tr}(\dot{Z}S) = (4\alpha/3 + \gamma)\sigma^2 D^3_3, \quad \Phi = 1 + E_p/(3G) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

ergibt die 9 Tensorkoordinaten

$$N^1_1 = 2G \left\{ D^1_1 + \frac{D^3_3}{2\Phi} \left[ 1 - \frac{\sigma}{2G} \left( \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right) \right] \right\} - \dot{p} - \gamma \sigma D^1_1 + \frac{2}{3} \alpha \sigma D^3_3 \quad (2.8)$$

$$N^1_2 = (2G - \gamma \sigma) D^1_2, \quad N^1_3 = [2G - \sigma(1 + \alpha + \gamma)] D^1_3 \quad (2.9), (2.10)$$

$$N^2_1 = (2G - \gamma \sigma) D^2_1 \quad (2.11)$$

$$N^2_2 = 2G \left\{ D^2_2 + \frac{D^3_3}{2\Phi} \left[ 1 - \frac{\sigma}{2G} \left( \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right) \right] \right\} - \dot{p} + \frac{2}{3} \alpha \sigma D^3_3 - \gamma \sigma D^3_3 \quad (2.12)$$

$$N^2_3 = [2G - \sigma(1 + \alpha + \gamma)] D^2_3 \quad (2.13)$$

$$N^3_1 = [2G - \sigma(\alpha + \gamma)] D^3_1 - \sigma W^3_1 \quad (2.14)$$

$$N^3_2 = [2G - \sigma(\alpha + \gamma)] D^3_2 - \sigma W^3_2 \quad (2.15)$$

$$N^3_3 = \left\langle 2G \left\{ 1 - \frac{1}{\Phi} \left[ 1 - \frac{\sigma}{2G} \left( \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right) \right] \right\} - \sigma \left( 1 + \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right) \right\rangle D^3_3 - \dot{p}. \quad (2.16)$$

Für die Belastungsbedingung von (1.10) gilt mit (2.7)

$$\left[ 1 - \frac{\sigma}{2G} \left( \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right) \right] \sigma D^3_3 > 0.$$

In der eckigen Klammer wird die Voraussetzung  $\sigma/2G \ll 1$  benutzt, welche die Äquivalenz von Hypo- und Hyperelastizität bedingt [11]. Während der Grunddeformation haben  $\sigma$  und  $D^3_3$  gleiches Vorzeichen. Für hinreichend kleine Amplitude der Verzweigungslösung bleibt das Vorzeichen von  $D^3_3$  in der fortgesetzten Deformation erhalten und damit die Belastungsbedingung erfüllt.

Die Randbedingungen am Rand  $x^1 = r$  sind wegen fortgesetzter Spannungsfreiheit (1.6) und  $n_k = (1, 0, 0)$

$$N^1_k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

Zur Vermeidung von Singularitäten an der Stelle  $r = 0$  beim Vollzylinder wird dieser bei der numerischen Rechnung durch einen Hohlzylinder mit sehr kleinem Innenradius  $r_i$  ersetzt und an der Stelle  $r = r_i$  ebenfalls (2.17) gefordert. Eine solche Vorgehensweise ist berechtigt, da Verzweigungspunkte nicht von der Art der Randbedingungen auf Oberflächen teilen mit verschwindendem Inhalt abhängen. Weiterhin sollen die Stabstirnflächen eben bleiben, d. h., bei  $x^3 = z = 0$ ,  $l$  (l – aktuelle Stablänge) ist mit  $n_k = (0, 0, \mp 1)$

$$v^3 = 0 \quad \text{und} \quad N^3_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.18)$$

Ein Ansatz für die physikalischen Geschwindigkeitskoordinaten  $u = v_1$ ,  $v = v_2/r$ ,  $w = v_3$ , der (2.18) mit (2.14), (2.15), (2.1), (2.2) erfüllt, lautet

$$\left. \begin{aligned} u &= f(r) \cos \mu \varphi \cos \nu z \\ v &= d(r) \sin \mu \varphi \cos \nu z & \nu &= \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ w &= g(r) \cos \mu \varphi \sin \nu z \\ \dot{p} &= 2G_1 h(r) \cos \mu \varphi \cos \nu z & \mu &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$G_1$  – Bezugsmodul. (2.19) mit den Abkürzungen  $\partial(\quad)/\partial r = (\quad)'$  und

$$\sin \nu z = s_\nu, \quad \cos \nu z = c_\nu, \quad \sin \mu \varphi = s_\mu, \quad \cos \mu \varphi = c_\mu \quad (2.20)$$

ergibt in (2.1), (2.2)

$$D^k_1 = \begin{bmatrix} f' c_\nu c_\mu & (1/2) (-\mu f - d + rd') c_\nu s_\mu & (1/2) (-\nu f + g') s_\nu c_\mu \\ \frac{1}{r^2} (\mu rd + rf) c_\nu c_\mu & & \frac{1}{2r^2} (-\nu rd - \mu g) s_\nu s_\mu \\ & & \nu g c_\nu c_\mu \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$W^k_1 = \begin{bmatrix} 0 & (1/2) [-\mu f - (rd)'] c_\nu s_\mu & -(1/2) (\nu f + g') s_\nu c_\mu \\ & 0 & \frac{1}{2r^2} (-\nu rd + \mu g) s_\nu s_\mu \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Beim Einsetzen von (2.21), (2.22) in (2.8) . . . (2.16) werden winkelfunktionsfreie dimensionslose Tensorkoordinaten  $M^k_1$  benutzt, z. B. in (2.8)

$$N^1_1 = 2G_1 M^1_1 c_\nu c_\mu \quad (2.23)$$

und entsprechend für die anderen Koordinaten. Alle diese Koordinaten lauten damit und mit den Abkürzungen

$$\beta(r) = \frac{G(r)}{G_1}, \quad \frac{\sigma(r)}{2G(r)} = \kappa(r) \quad (2.24)$$

$$M^1_1 = \beta \left\{ f' + \frac{\nu}{2\Phi} [1 - \kappa \left( \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right)] g - \frac{h}{\beta} + \frac{2}{3} \alpha \kappa \nu g - \gamma \kappa f' \right\} \quad (2.25)$$

$$M^1_2 = \frac{\beta}{2} (1 - \gamma \kappa) (-\mu f - d + rd') \quad (2.26)$$

$$M^1_3 = \frac{\beta}{2} (-\nu f + g') [1 - \kappa (1 + \alpha + \gamma)] \quad (2.27)$$

$$M^2_1 = \frac{\beta}{2r^2} (1 - \gamma \kappa) (-\mu f - d + rd') = \frac{1}{r^2} M^1_2 \quad (2.28)$$

$$M^2_2 = \beta \left\langle \frac{1}{r} (1 - \gamma \kappa) (\mu d + f) + \left\{ \frac{1}{2\Phi} [1 - \kappa \left( \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right)] + \frac{2}{3} \alpha \kappa \right\} \nu g - \frac{h}{\beta} \right\rangle \quad (2.29)$$

$$M^2_3 = -\frac{\beta}{2r^2} (\nu rd + \mu g) [1 - \kappa (1 + \alpha + \gamma)] \quad (2.30)$$

$$M^3_1 = \frac{\beta}{2} \left\{ (-\nu f + g') [1 - \kappa (\alpha + \gamma)] - \kappa (\nu f + g') \right\} \quad (2.31)$$

$$M^3_2 = \frac{\beta}{2} \left\{ -(\nu rd + \mu g) [1 - \kappa (\alpha + \gamma)] + \kappa (-\nu rd + \mu g) \right\} \quad (2.32)$$

$$M^3_3 = \beta \left\langle \left\{ 1 - \frac{1}{\Phi} [1 - \kappa \left( \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right)] - \kappa \left( 1 + \frac{4}{3} \alpha + \gamma \right) \right\} \nu g - \frac{h}{\beta} \right\rangle. \quad (2.33)$$

Hinzu kommt noch die separierte Inkompressibilitätsbedingung (1.8)  $f' + \frac{f}{r} + \frac{\mu d}{r} + \nu g = 0.$  (2.34)

Zwischen den mathematischen Tensorkoordinaten  $M^k_l$  und den physikalischen Tensorkoordinaten  $M^{(k)}_{(l)}$  gelten die Beziehungen [10]

$$M^k_l = M^{(k)}_{(l)} \sqrt{\frac{g_{ll}}{g_{kk}}}, \quad (2.35)$$

wo die unterstrichenen Indizes nicht abzusummieren sind. Dies wird zusammen mit (2.19), (2.23) beim Einsetzen von (2.28), (2.29), (2.31) in (2.4), von (2.28), (2.29), (2.32) in (2.5) und von (2.30), (2.33) in (2.6) beachtet. Außerdem erfolgt in den drei entstehenden Gleichungen die Elimination von  $h/\beta$  mittels (2.25) und (2.34). Die drei Beziehungen des fortgesetzten Gleichgewichtes lauten dann:

$$(rM^{(1)}_{(1)})_{,1} + \mu M^{(1)}_{(2)} + \nu rM^{(1)}_{(3)} - M^{(1)}_{(1)} - \beta \left\{ [\kappa \nu^2 r + \frac{2}{r} (1 - \gamma \kappa)] f - 2 \frac{\mu}{r} (1 - \gamma \kappa) d - \nu g (1 - \gamma \kappa) \right\} = 0 \quad (2.36)$$

$$(rM^{(1)}_{(2)})_{,1} + M^{(1)}_{(2)} - \mu M^{(1)}_{(1)} + \beta \left\langle - 2 \frac{\mu}{r} (1 - \gamma \kappa) f - \left\{ 2 \frac{\mu^2}{r} (1 - \gamma \kappa) + \frac{\nu^2 r}{2} [1 + \kappa (1 - \alpha - \gamma)] \right\} d - \frac{\nu \mu}{2} [3 - \kappa (1 + \alpha + 3\gamma)] g \right\rangle = 0 \quad (2.37)$$

$$(rM^{(1)}_{(3)})_{,1} - \nu rM^{(1)}_{(1)} + \beta \left\langle - \nu f (1 - \gamma \kappa) - \frac{\mu \nu}{2} [3 - \kappa (1 + \alpha + 3\gamma)] d - \left\{ \frac{\mu^2}{2r} [1 - \kappa (1 + \alpha + \gamma)] + \nu^2 r [2 - \kappa (1 + 2\alpha + 2\gamma)] - \frac{3\nu^2 r}{2\Phi} [1 - \kappa (\frac{4}{3} \alpha + \gamma)] \right\} g \right\rangle = 0. \quad (2.38)$$

Diese Gleichungen sind noch durch die Inkompressibilitätsbedingung (2.34) sowie durch (2.26)

$$rM^{(1)}_{(2)} = \frac{\beta}{2} (1 - \gamma \kappa) (-\mu f - d + rd') \quad \text{und (2.27)} \quad \text{zu ergänzen. Es seien noch die Abkürzungen} \quad (2.39)$$

$$M^{(1)}_{(3)} = \frac{\beta}{2} (-\nu f + g') [1 - \kappa (1 + \alpha + \gamma)] \quad (2.40)$$

$$M^{(1)}_{(1)} = M_r, \quad M^{(1)}_{(2)} = M_{r\varphi}, \quad M^{(1)}_{(3)} = M_{rz} \quad (2.41)$$

$$(\ )_{,r} = (\ )_{,\xi} \cdot \frac{1}{a} = (\ )^+ \cdot \frac{1}{a}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad \nu a = \omega \quad (2.42)$$

(a Bezugslänge) eingeführt. Das resultierende System von 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung nimmt damit die endgültige Form an:

$M_r$	+	0	$-\frac{\mu}{\xi}$	$-\omega$	$\frac{\omega}{\xi} (1 - \gamma \kappa) \beta$	$(\kappa \omega^2 + 2 \frac{1 - \gamma \kappa}{\xi^2}) \beta$	$2 \frac{\mu}{\xi^2} (1 - \gamma \kappa) \beta$	$M_r$
$M_{r\varphi}$		$\frac{\mu}{\xi}$	$-\frac{2}{\xi}$	0	$\beta \frac{\omega \mu}{2 \xi} [3 - \kappa (1 + \alpha + 3\gamma)]$	$2 \frac{\mu}{\xi^2} (1 - \gamma \kappa) \beta$	$\beta \left\{ 2 \frac{\mu^2}{\xi^2} (1 - \gamma \kappa) + \frac{\omega^2}{2} [1 + \kappa (1 - \alpha - \gamma)] \right\}$	$M_{r\varphi}$
$M_{rz}$	=	$\omega$	0	$-\frac{1}{\xi}$	$\beta \left\{ \frac{\mu^2}{2 \xi^2} [1 - \kappa (1 + \alpha + \gamma)] + \omega^2 [2 - \kappa (1 + 2\alpha + 2\gamma)] - \frac{3\omega^2}{2\Phi} [1 - \kappa (\frac{4}{3} \alpha + \gamma)] \right\}$	$\frac{\omega}{\xi} (1 - \gamma \kappa) \beta$	$\beta \frac{\mu \omega}{2 \xi} [3 - \kappa (1 + \alpha + 3\gamma)]$	$M_{rz}$
$g$		0	0	$2 / \left\{ [1 - \kappa (1 + \alpha + \gamma)] \beta \right\}$	0	$\omega$	0	$g$
$f$		0	0	0	$-\omega$	$-\frac{1}{\xi}$	$-\frac{\mu}{\xi}$	$f$
$d$		0	$\frac{2}{(1 - \gamma \kappa) \beta}$	0	0	$\frac{\mu}{\xi}$	$\frac{1}{\xi}$	$d$

(2.43)

Für den Verbundstab existieren ein Innenbereich  $r_i \leq r \leq a$  mit  $\kappa_1 = \sigma_1/(2G_1)$ ,  $\beta = 1$  und ein Außenbereich  $a < r \leq b$  mit  $\kappa_2 = \sigma_2/(2G_2)$ ,  $\beta = G_2/G_1$ .

Als Randbedingungen verbleiben mit (2.17), (2.23), (2.35), (2.41) bei  $\xi = r_i/a$ ,  $\xi = b/a$

$$M_r = M_{r\varphi} = M_{rz} = 0, \quad (2.44)$$

d. h. Gleichungen mit genau den Unbekannten, die auch in (2.43) auftreten.

### 3. Anwendung des Übertragungsmatrizenverfahrens

Das von der logarithmischen axialen Gleichmaßstreckung  $\epsilon$  abhängende homogene Differentialgleichungssystem (2.43) mit den homogenen Randbedingungen (2.44) bestimmt ein Eigenwertproblem mit  $\epsilon$  als Eigenwert. Die Koeffizienten des Systems (2.43) hängen auch bei konstanten Spannungs- und Materialkennwerten vom Radius ab. Eine katalogisierte Lösung des Systems 6. Ordnung (2.43) wie beim rotationssymmetrischen Problem 4. Ordnung in [4] ist nicht zu erwarten. Es erfolgt deshalb eine numerische Lösung mittels Übertragungsmatrizen, die aus der Systemmatrix von (2.43) über die Runge-Kutta-Formeln 4. Ordnung [12] aufgebaut werden [13]. Für vorgegebenes  $\epsilon$  beginnt die Integration bei  $\xi = r_i/a$  mit den dazugehörigen Randbedingungen aus (2.44) und unbekanntem separierten Geschwindigkeiten  $f_0$ ,  $g_0$ ,  $d_0$  und endet am Außenrand  $\xi = b/a$ , wo die restlichen Randbedingungen aus (2.44) erfüllt werden müssen. Dies liefert ein homogenes  $3 \times 3$ -Gleichungssystem zur Bestimmung der  $f_0$ ,  $g_0$ ,  $d_0$ , dessen Koeffizientendeterminante verschwinden muß. Die Determinantennullstelle wird durch schrittweise Vorgabe von  $\epsilon$  systematisch bestimmt. Die Integrationsprozedur wurde in einem FORTRAN-Unterprogramm realisiert [13], das Ergebnis in das bestehende Rahmenprogramm zur Nullstellensuche [14] eingebaut [13]. Die Untersuchung der Fälle  $\mu = 0$  (Rotationssymmetrie) oder  $\nu = 0$  erfolgte dabei gesondert.

Das Runge-Kutta-Verfahren gestattet es, nach Ermittlung des Eigenwertes auch die Eigenfunktionen zu bestimmen. Dies geschieht in der sogenannten Rückrechnung, die nur für die Radialgeschwindigkeit  $f$  programmiert wurde [15]. Die hier geschilderte Vorgehensweise läßt sich auf einige andere Belastungsfälle und kompressibles Material übertragen. Es wäre dann die Systemmatrix von (2.43) neu aufzustellen. Zur Berücksichtigung hydrostatischen Druckes an den Mantelflächen eines Voll- bzw. Hohlzylinders müßten die Randbedingungen (2.44) neu formuliert werden. Der dickwandige Hohlzylinder unter richtungstreuem [16], [17] oder hydrostatischem Manteldruck und der kompressible Verbundstab erforderten außerdem die Integration des radialen Gleichgewichtes für den Grundspannungszustand. Gleiches gilt für die Einbeziehung von Eigenspannungen [18], [19].

### 4. Ergebnisse

Wie in [4] lagen der numerischen Rechnung zwei Materialkennlinien  $i = 1, 2$  für die logarithmische Dehnung  $\epsilon$  und die wahren Spannungen  $\sigma_i$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{yi}}, \quad \sigma_{yi} = E_i \epsilon_{yi}, \quad 0 \leq \frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} \leq 1 \quad (4.1)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{yi}} + m_i \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{yi}} \right)^{n_i} - m_i, \quad 1 \leq \frac{\epsilon}{\epsilon_{yi}} \quad (4.2)$$

mit den Materialkennwerten nach Tabelle 1 zugrunde.

Im Verbundstab bestehen der innere Zylinder aus dem Material 1 (Maragingstahl) und der äußere Zylinder aus dem Material 2 (Kupfer). Die Fließspannungsverläufe der Komponenten für Dehnungen oberhalb der Gleichmaßdehnung wurden dabei aus Zugversuchen an Proben mit verschiedenen Kaltumformgraden [20] bestimmt.

**Tabelle 1**

Materialkennwerte für (4.1), (4.2)

Material	$E_i/\text{Nmm}^{-2}$	$\epsilon_{yi}$	$m_i$	$n_i$
1	163 000	0,004652	7,539	12,29
2	120 000	0,000708	6,483	3,145

#### 4.1. Rotationssymmetrische Einschnürformen

Unter der Voraussetzung rotationssymmetrischer Eigenmoden wurden wie in [4] für 4 verschiedene Volumenanteile  $\nu$  des Materials 1 die Verzweigungsdehnungen  $\epsilon_c$  und -spannungen  $\sigma_{1c}$ ,  $\sigma_{2c}$  eines Verbundstabes mit den Ausgangsabmessungen Außenradius  $B$  und Länge  $L$ ,  $B/L = 0,02$ , berechnet. Tabelle 2 enthält für verschiedene Halbwellenzahlen  $k$  das Ergebnis, welches auf 4 Ziffern genau mit der Lösung der in [4] benutzten Methode übereinstimmt.

**Tabelle 2**

Verzweigungsdehnungen und -spannungen

v	k	$\epsilon_c / \%$	$\sigma_{1c} / \text{Nmm}^{-2}$	$\sigma_{2c} / \text{Nmm}^{-2}$
0	1	0,3153	326,6	326,6
	2	0,3155	326,7	326,7
	4	0,3163	327,0	327,0
	10	0,3260	330,2	330,2
	20	0,3965	351,2	351,2
0,2	1	0,2078	886,0	286,6
	2	0,2079	886,0	286,6
	4	0,2081	886,1	286,6
	10	0,2144	887,9	289,4
	20	0,2857	906,6	316,6
0,4	1	0,1419	862,9	254,3
	2	0,1419	862,9	254,3
	4	0,1420	862,9	254,4
	10	0,1468	864,9	257,0
	20	0,2165	888,6	290,2
1,0	1	0,05091	811,7	811,7
	2	0,05101	811,8	811,8
	4	0,05151	812,2	812,2
	10	0,05811	817,4	817,4
	20	0,1387	861,5	861,5

Eine typische Schar von Eigenfunktionen  $v = 0,4$  aus diesem Beispiel gibt Bild 1 wieder, wo noch die Halbwellenzahl  $k = 40$  entsprechend  $\epsilon_c = 0,5300$  mit aufgenommen wurde [15]. Dort bedeuten  $\tilde{f}$  die auf ihren Maximalwert normierte Amplitude der Radialgeschwindigkeit (vgl. (2.19)) und  $a$  den aktuellen Radius des Innenzylinders (Material 1). Die Eigenfunktionen weisen keine Besonderheiten am Übergang  $r = a$  vom Material 1 zum Material 2 auf. Der Fall  $k = 1$  ist vom geraden Verlauf der Radialgeschwindigkeit für homogene radiale Deformationsgeschwindigkeit im Bild 1 nicht zu unterscheiden. Dies entspricht der Tatsache, daß die halbe Wellenlänge in Stabrichtung sehr viel größer ist als der Stabradius.

Für eine mögliche Kontrolle der Eigenfunktionsberechnung wurde der Variationsausdruck [7]

$$\int_V \text{tr}(\mathbf{NL}) dV = \text{Min.} \quad (4.3)$$

in allen kinematisch zulässigen Geschwindigkeiten.

$V$  – Volumen im Grundzustand, herangezogen. Bei rotationssymmetrischen Eigenmoden liefert (4.3) mit (1.10), (2.1) ... (2.3),  $\alpha = \gamma = 0$

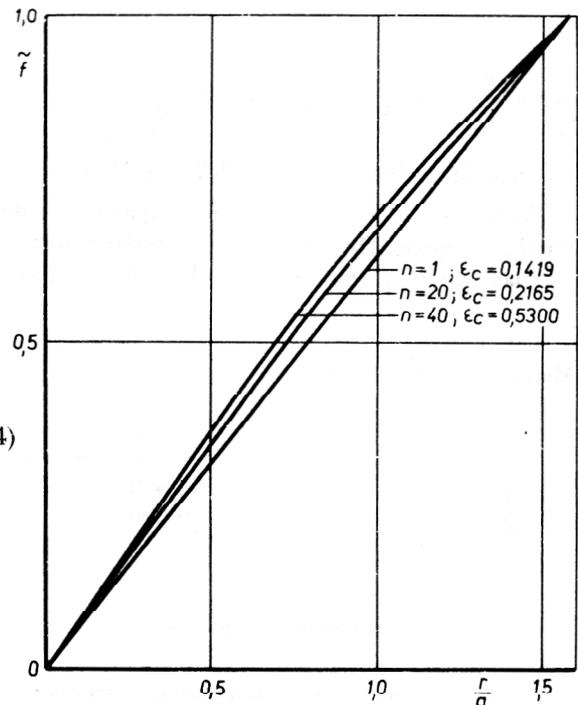
$$\int_0^1 \int_0^a I r dr dz = \text{Min.}$$

$$I = 2G \left[ u_{,r}^2 + \frac{u^2}{r^2} + w_{,z}^2 + \frac{1}{2} (u_{,z} + w_{,r})^2 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{E_t}{3G}\right) w_{,z}^2 \right] - \frac{\sigma}{2} (w_{,r}^2 - u_{,z}^2) - \frac{\sigma}{4} [(u_{,z} + w_{,r})^2 + 4w_{,z}^2] + \frac{\sigma}{4} (u_{,z} - w_{,r})^2 \quad (4.4)$$

und mit (2.19), (2.34) sowie dem Näherungsansatz

$$\tilde{f}(\xi) = C_1 \xi + C_2 \xi^3$$

für einen homogenen Zylinder vom aktuellen Radius  $a$  ( $C_1, C_2$  – Freiwerte) 2 notwendige Gleichungen, von denen eine lautet



**Bild 1**  
Eigenfunktionen für Rotationssymmetrie und  $\nu = 0,4$

$$C_1 [6\nu^2 a^2 + 48 \frac{E_t}{G} + \frac{\sigma}{G} (3\nu^2 a^2 - 48)] + C_2 [4\nu^2 a^2 + 48 + 48 \frac{E_t}{G} + \frac{\sigma}{G} (2\nu^2 a^2 - 72)] = 0. \quad (4.5)$$

Der Tangentenmodul  $E_t = d\sigma/de$  ist dabei nach (4.2)

$$E_t(\sigma) = 3G [1 + mn (\frac{\sigma}{2G} \cdot \frac{2}{3\epsilon_y})^{n-1}]^{-1}. \quad (4.6)$$

In (4.5) wurden die Kennwerte des Materials 1 (Tabelle 1) benutzt und der mittels der halbanalytischen Methode [4] berechnete Eigenwert  $\sigma/2G = 0,007522$  für das aktuelle Abmessungsverhältnis  $a/l = 0,1833$  bei einer Halbwelle in Stabrichtung, d. h.  $\nu a = 0,57585$  eingesetzt [15]. Dies ergibt

$$C_2/C_1 = -0,039769.$$

Die ebenfalls auf ihren Maximalwert normierte genäherte Eigenfunktion stimmt mit der numerisch berechneten Eigenfunktion für 8 diskrete Radiuswerte  $\xi$ ,  $0,01725 \leq \xi \leq 1$ , in den ersten 3 Ziffern überein.

Der Einfluß der Materialparameter  $\alpha$ ,  $\gamma$  auf die Verzweigungspunkte wurde auf zwei verschiedene Arten getestet. Der aus (1.9) mit (2.3) folgende und damit zur Systemmatrix von (2.43) gehörende Tangentenmodul  $\bar{E}_t = d\sigma/de$  genügt der Beziehung

$$\bar{E}_t(\sigma_v, \sigma; \alpha, \gamma) = \frac{E_p(\sigma_v)}{1 + E_p(\sigma_v)/E} \cdot [1 - (2\alpha + \frac{3}{2}\gamma) \frac{\sigma}{E}]. \quad (4.7)$$

Im ersten Fall wurden die Verzweigungspunkte für wachsende Halbwellenzahlen längs der Kennlinie (4.2) aber mit dem jeweiligen Tangentenmodul gemäß (4.7) und

$$\frac{E_p(\sigma_v)}{1 + E_p(\sigma_v)/E} = E_t(\sigma_v) \quad (4.8)$$

bestimmt, d. h., jeder Verzweigungspunkt gehört zu einem anderen Material mit geringfügig verschiedenem Tangentenmodul  $\bar{E}_t$ , aber gleichem plastischen Modul  $E_p$ . Als Beispiel diene ein homogener Zylinder aus dem Material 1 mit den Ausgangsabmessungen Radius/Länge = 0,02. Für  $\alpha$ ,  $\gamma$  wurden alle Kombinationen von 0, 1, -1 zugelassen. Die Halbwellenzahlen  $k$  waren  $k = 1, 10, 20$ . Die maximalen Abweichungen traten zwischen den Kombinationen  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$  und  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$  für  $k = 1$  beim Material 1 auf. Die Verzweigungsspannung für  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$  war um 0,15 % kleiner als die für  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$ , die Verzweigungsdehnung um 2,8 %. Der Verzweigungspunkt lag geringfügig vor dem Kraftmaximumpunkt. Für das Material 2 waren die Abweichungen geringer.

Im zweiten Fall wurde der Tangentenmodul  $\bar{E}_t$  der Systemmatrix von (2.43) gleich dem Tangentenmodul  $E_t$  der Kennlinie (4.2) gesetzt.

$$\bar{E}_t(\sigma_v) = \frac{\bar{E}_p(\sigma_v; \alpha, \gamma)}{1 + \bar{E}_p(\sigma_v; \alpha, \gamma)/E} [1 - (2\alpha + \frac{3}{2}\gamma) \frac{\sigma_v}{E}] = E_t(\sigma_v). \quad (4.9)$$

Die Verzweigungspunkte lagen wieder auf der Kennlinie (4.2), d. h., für jedes Wertepaar  $\alpha$ ,  $\gamma$  besaß das dazugehörige Material geringfügig verschiedene plastische Moduln  $\bar{E}_p$  bei gleicher Kennlinie im elastisch-plastischen Bereich. Die Halbwellenzahlen waren  $k = 1, 10, 40$ . Die maximalen Abweichungen für das Material 1 traten bei  $k = 40$  zwischen  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$  und  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$  auf. Sie betragen für die Spannung weniger als die Genauigkeit der Ergebnisausgabe und 0,24 % für die Dehnung. Beim Material 2 waren sie wieder geringer.

Man kann zeigen, daß der  $\alpha, \gamma$ -Einfluß in (4.7) bei  $E_p$  nach (4.6), (4.8) auf die Grunddehnung von der Größenordnung  $10^{-2}$  und deshalb vernachlässigbar ist, vorausgesetzt, die elastisch-plastischen Kennlinien besitzen einen gemeinsamen Punkt<sup>1)</sup>.

Es ist noch zu bemerken, daß in beiden Fällen die großen Halbwellenzahlen mit unrealistisch großen Verzweigungsdehnungen der homogenen Stäbe einhergehen, wegen der Kleinheit der Abweichungen andererseits über die  $\alpha, \gamma$ -Einflüsse auf die Verzweigungspunkte des Verbundstabes sowie auf Verzweigungsmoden nicht diskutiert wurden. Des weiteren ist zu ergänzen, daß (4.7), (4.9) im Zugbereich gelten und der plastische Modul bei Zug und Druck gleich sein soll. Demnach unterscheidet sich in beiden Fällen der Anstieg  $d\sigma/de$  für Zug und Druck gemäß (1.9) und  $\sigma \ll E$  um den Faktor

$$[1 + (2\alpha + \frac{3}{2}\gamma) \frac{\sigma}{E}] / [1 - (2\alpha + \frac{3}{2}\gamma) \frac{\sigma}{E}] \approx 1 + 2(2\alpha + \frac{3}{2}\gamma) \frac{\sigma}{E}.$$

1) Die asymptotische Abschätzung der  $\alpha, \gamma$ -Einflüsse auf die Verzweigungsdehnungen in [3] enthält im letzten Abschnitt des Punktes 4 einen Trugschluß hinsichtlich der Übertragbarkeit der Modulabweichungen auf die genäherte Verzweigungsspannung, welcher dort zu große Dehnungsunterschiede verursacht.

#### 4.2. Nichtrotationssymmetrische Verzweigungsmoden

Für den Verbundstab mit den Abmessungen  $B/L = 0,02$ ,  $(a/b)^2 = 0; 0,2; 0,4; 1$  und der Anordnung des Materials 1 innen sowie des Materials 2 außen wurden Verzweigungsdehnungen im Intervall  $0,05 \dots 0,6$  gesucht (vgl. a. Bild 5 in [4]). Die Halbwellenzahlen  $k$  in Stabachsenrichtung waren  $k = 1, 2, 4, 10, 20, 40$ , die Vollwellenzahlen  $\mu$  in Umfangsrichtung  $\mu = 1, 2, 3, 4$ . Für  $\mu = 1, 2, 3$  traten keine Eigenwerte auf, bei  $\mu = 4$  und allen obigen  $k$  wurde der Zahlenbereich des Rechners überschritten. Dies deutete sich durch das Anwachsen der Restwertdeterminante an der Intervallgrenze  $\epsilon = 0,6$  für ansteigende  $\mu$ -Werte bereits an. Die mit wachsender Dehnung monotone Zunahme der Ordnung der Eigenwerte für die rotationssymmetrischen Eigenmoden des Verbundstabes nach [4] kann also durch Hinzunahme der hier geforderten nichtrotationssymmetrischen Eigenmoden unter sonst gleichen Voraussetzungen nicht widerlegt werden. Eine Erörterung des  $\alpha, \gamma$ -Einflusses erübrigte sich.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Needleman, A.: A numerical study of necking in circular cylindrical bars. *J. Mech. Phys. Solids* 20 (1972), S. 111 – 127.
- [ 2 ] Hutchinson, J. W.; Miles, J. P.: Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic-plastic cylinder under uniaxial tension. *J. Mech. Phys. Solids* 22 (1974), S. 61 – 71.
- [ 3 ] Balke, H.: Zur Stabilität großer elastisch-plastischer Verformungen. *Techn. Mech.* 6 (1984), S. 16 – 20.
- [ 4 ] Balke, H.: Zum Verzweigungsproblem elastisch-plastischer Verbundstäbe. *Techn. Mech.* 2 (1981), S. 47 – 53.
- [ 5 ] Bruhns, O.; Mielniczuk, J.: Zur Theorie der Verzweigungen nicht-isothermer elastoplastischer Deformationen. *Ing.-Arch.* 46 (1977), S. 65 – 74.
- [ 6 ] Balke, H.: Zum Einfluß der Querkontraktionszahl auf die Einschnürspannungen elastisch-plastischer Zugstäbe. Eingereicht in der *ZAMM*.
- [ 7 ] Hill, R.: Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. *J. Mech. Phys. Solids* 7 (1959), S. 209 – 225.
- [ 8 ] Balke, H.: Zum Deformationsgesetz bei elastisch-plastischen Verzweigungsproblemen. In: Michel, B., Hennig, K.: *FMC-Series No. 2, 124 – 129*, Berlin 1982.
- [ 9 ] Spencer, A. J. M.; Ferrier, J. E.: Some solutions for a class of plastic-elastic solids, enthalten in: Sawczuk, A.: *Foundations of plasticity*, Leyden 1973.
- [10] Eringen, A. C.: *Nonlinear theory of continuous media*, New York 1962.
- [11] Balke, H.: Zum Spannungsverzerrungsgesetz bei hyper- und hypoelastischen Verzweigungsproblemen. *ZAMM* 62 (1982), S. 241 – 247.
- [12] Zurmühl, R.: *Praktische Mathematik*. Berlin 1965.
- [13] Liebing, L.: Berechnung von Verzweigungslösungen elastisch-plastischer Zugstäbe. Praktikumsarbeit, ZFW Dresden 1984.
- [14] Balke, H.: FORTRAN-Programm BIFU3, ZFW Dresden 1983.
- [15] Gutzeit, T.: Berechnung der Eigenfunktionen für nichtrotationssymmetrische Verzweigungslösungen beim elastisch-plastischen Verbundstab. Praktikumsarbeit ZFW Dresden 1985.
- [16] Bruhns, O.: Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten elastoplastisch deformierbarer Kontinua. *Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen*, Bochum 1974.
- [17] Celep, Z.: Beitrag zur Theorie dicker Kreisylinder- und Kugelschalen unter innerem Druck. Diss. TU Hannover 1971.
- [18] Krause, G.: Berechnung des elastisch-plastischen Verformungs- und Spannungszustandes eines rotationssymmetrisch ummantelten Zugstabes bei großen Verformungen. Praktikumsarbeit ZFW Dresden 1980.
- [19] Krause, G.: Berechnung des Spannungs- und Verzerrungszustandes eines rotationssymmetrischen elastisch-plastischen Verbundstabes. Abschlußbericht zum SRKB-Auftrag MBS 008, TH Karl-Marx-Stadt 1981.
- [20] Krumphold, R.: ZFW interne Mitteilung. Dresden 1979.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Herbert Balke  
Zentralinstitut für Festkörperphysik und Werkstofforschung  
der Akademie der Wissenschaften der DDR  
8027 Dresden  
Helmholtzstr. 20