

Zur Stülpbeanspruchung des Verbundringes

Wolfgang Pfefferkorn

1. Einleitung

Eine ausführliche Untersuchung über das Verhalten homogener Kreisringe, die durch ein Stülpmoment oder durch radiale Kräfte beansprucht werden, erfolgte bereits durch R. Grammel [1].

Der vorliegende Beitrag bringt die Erweiterung auf Verbundringe, deren Querschnitt abschnittsweise aus verschiedenen Werkstoffen besteht, die fest aneinander haften, dreh-symmetrisch angeordnet sind und linear-elastisches Werkstoffverhalten besitzen.

Belastet werde der Ring durch ein über den Umfang gleichmäßig verteiltes Stülpmoment M [$\frac{Nm}{m}$] und eine radiale, konstante Streckenlast q [N/m], die über den Kreisring mit dem Radius R_1 wirke (Bild 1).

Die im Verbundring vereinigten Werkstoffabschnitte besitzen in der Regel unterschiedliche Wärmeausdehnungs-

koeffizienten. Die gegenseitige Behinderung in der Wärmeausdehnung führt selbst bei konstanten Temperaturdifferenzfeldern zu Spannungen und Verformungen. Die Ableitungen werden mit beliebigen Temperaturfeldern geführt, deren Kenntnis vorausgesetzt wird. Diese Wärmespannungen treten hauptsächlich als Tangentialspannungen auf. Aber auch quer zur Kreisringachse entstehen sowohl Wärmespannungen als auch Quernormalspannungen infolge der teilweise behinderten Querkontraktion, die sich an den Grenzlinien der Werkstoffzonen von den Rändern beginnend erst über Schubspannungen aufbauen. Diese Querspannungen und auch alle Deformationen des Querschnitts bleiben in Anlehnung an [1] unberücksichtigt.

Eine charakteristische Verformungsgröße ist der Stülpwinkel ψ , der die Verdrehung der Ringquerschnitte gegenüber ihrer Ausgangslage bezeichnet, ohne daß der

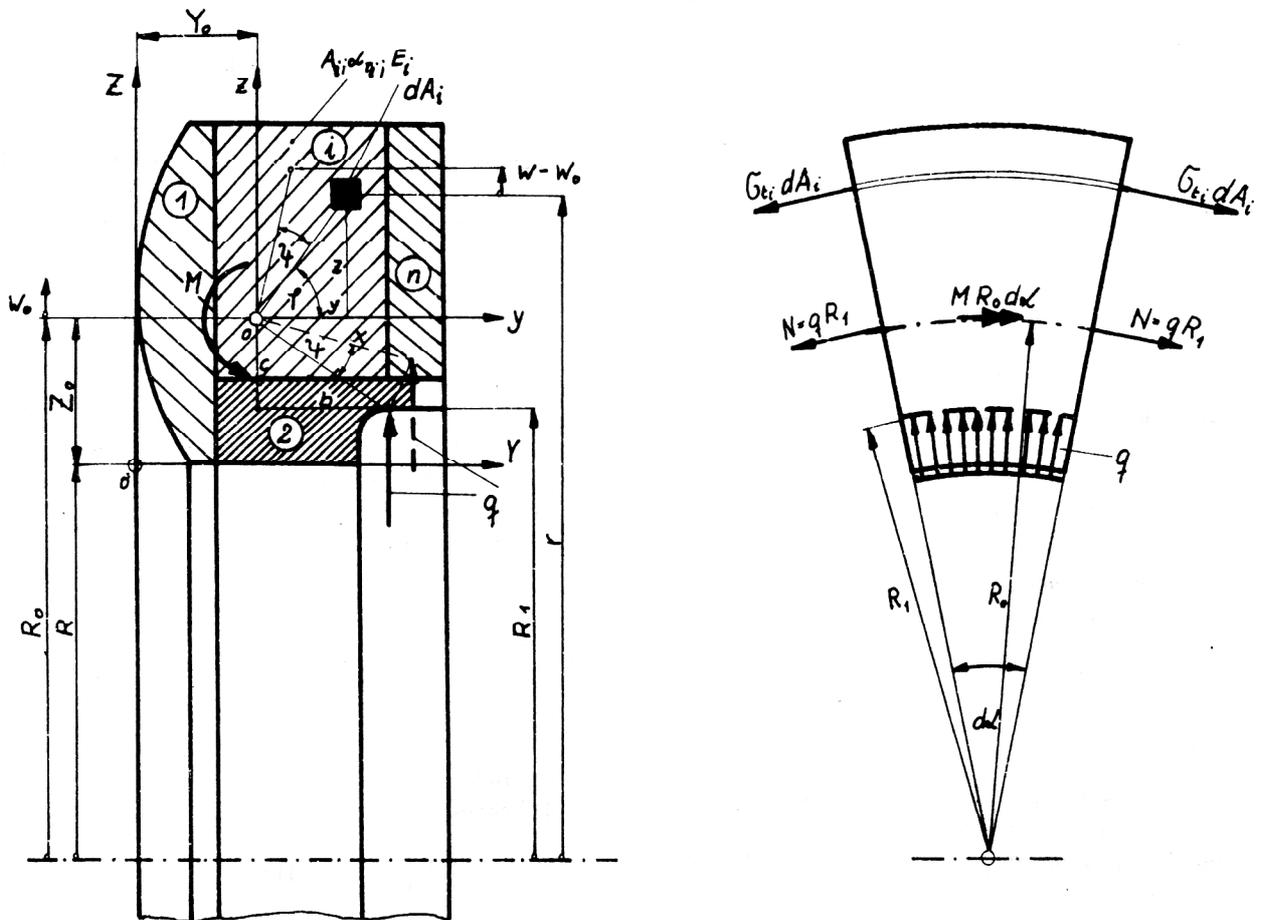


Bild 1
 Verbundring unter Belastung

3. Berechnung der Koordinaten des Stützpunktes

Gewählt wird willkürlich ein Koordinatensystem Y, Z (Bild 1), dessen Ursprung im Abstand R von der Ringachse liege. Die beiden achsparallelen Systeme y, z und Y, Z haben die Abstände Y_0 und Z_0 .

Es werden die statischen Momente

$$S_Z = \sum_{i=1}^n v_i \int_{(A_i)} \frac{y}{r} dA_i \quad (23)$$

und

$$S_Y = \sum_{i=1}^n v_i \int_{(A_i)} \frac{z}{r} dA_i \quad (24)$$

berechnet. Mit der Forderung $S_Y = 0$ und $S_Z = 0$ folgt aus den Gl. (9), (10), (23), (24) und den Beziehungen

$$y = Y - Y_0 \quad (25)$$

$$z = Z - Z_0 \quad \text{oder}$$

$$z = Z - R_0 + R$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_{(A_i)} \frac{y}{r} dA_i = S_Z - Y_0 A = 0 \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_{(A_i)} \frac{z}{r} dA_i = S_Y - Z_0 A = 0$$

Daraus folgen

$$Y_0 = S_Z / A \quad (27)$$

und

$$Z_0 = S_Y / A \quad (28)$$

Damit ist auch $R_0 = R + Z_0$ oder

$$R_0 = R + \frac{S_Y}{A} \quad (29)$$

bekannt.

Die für Gl. (21) erforderlichen Größen I_z , D_z und D_y sind noch zu berechnen:

$$I_z = \sum_{i=1}^n v_i \int_{(A_i)} \frac{y^2}{r} dA_i = \sum_{i=1}^n v_i \int_{(A_i)} \frac{1}{r} (Y - Y_0)^2 dA_i \quad (30)$$

Vorher ist noch

$$I_Z = \sum_{i=1}^n v_i \int_{(A_i)} \frac{y^2}{r} dA_i \quad (31)$$

zu ermitteln. Damit wird aus Gl. (30):

$$I_z = I_Z - 2 Y_0 S_Z + Y_0^2 A \quad (32)$$

Mit den Gln. (14), (15) und (16) berechnen sich die Ausdrücke D_y und D_z wie folgt, nachdem vorher

$$D_Y = \sum_{i=1}^n v_i \alpha_{T_i} \int_{(A_i)} Z \Delta T dA_i \quad (33)$$

und

$$D_Z = \sum_{i=1}^n v_i \alpha_{T_i} \int_{(A_i)} Y \Delta T dA_i \quad (34)$$

berechnet wurden. Es ist:

$$D_y = D_Y - Z_0 D \quad (35)$$

$$D_z = D_Z - Y_0 D \quad (36)$$

4. Berechnung eines Beispiels

Ein Verbundring mit Rechteckquerschnitt bestehe in axialer Schichtung aus zwei Werkstoffen mit $\alpha_{T_1}; E_1$ und $\alpha_{T_2}; E_2$ sowie den Breiten b_1 und b_2 (siehe Bild 2). Die Belastung erfolgt durch ein konstantes Temperaturfeld ΔT .

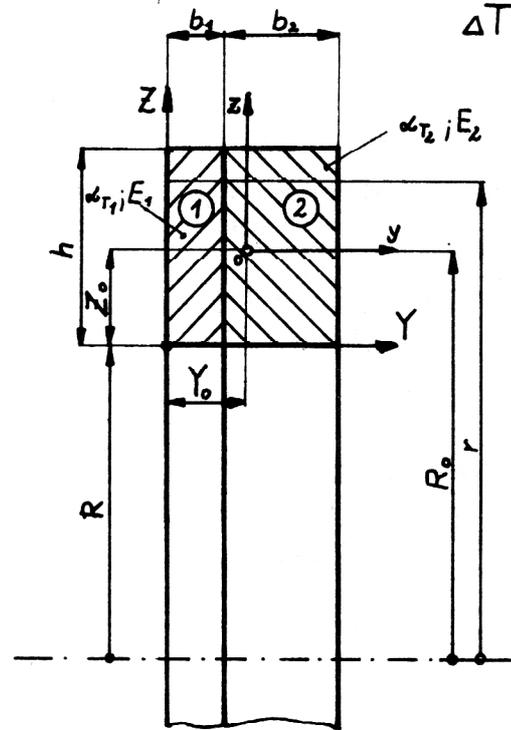


Bild 2
Verbundring mit axialer Schichtung aus zwei verschiedenen Werkstoffen

Gesucht sind der Stützpunkt ψ und der Verlauf der Tangentialspannungen über den Querschnitt.

Lösung:

Es wird für $E_0 = E_1$ gewählt. Dann sind $v_1 = 1$ und $v_2 = v = \frac{E_2}{E_1}$.

Die Berechnung der Querschnittswerte erfolgt nach den Gln. (8), (23), (32).

Der Koordinatenursprung des $Y-Z$ -Systems wurde in die untere linke Querschnittsecke gelegt.

$$A = (b_1 + vb_2) \int_R^{R+h} \frac{dr}{r} = (b_1 + vb_2) \ln \left(1 + \frac{h}{R}\right) \quad (8a)$$

$$S_Y = (b_1 + vb_2) \int_R^{R+h} \frac{Z}{r} dr;$$

mit $Z = r - R$ wird:

$$S_Y = (b_1 + vb_2) \left[\frac{h}{R} - \ln \left(1 + \frac{h}{R}\right) \right] R \quad (24a)$$

$$S_Z = \int_{Y=0}^{b_1} \int_{r=R}^{R+h} \frac{Y}{r} dY dr + v \int_{Y=b_1}^{b_1+b_2} \int_{r=R}^{R+h} \frac{Y}{r} dY dr$$

$$= \frac{1}{2} [b_1^2 + v b_2 (2b_1 + b_2)] \ln \left(1 + \frac{h}{R}\right) \quad (23 a)$$

Nachdem zur weiteren Abkürzung $x = \frac{b_2}{b_1}$ eingeführt wird, ergibt sich die Lage des Stülpzentrums 0 aus Gl. (27) und (28) wie folgt:

$$Y_o = b_1 \frac{1 + v(2+x)}{1 + vx} \quad (23 a)$$

$$Z_o = R \frac{\frac{h}{R} - \ln \left(1 + \frac{h}{R}\right)}{\ln \left(1 + \frac{h}{R}\right)} \quad (24 a)$$

Das modifizierte Trägheitsmoment I_z ergibt sich aus Gl. (32), nachdem vorher L_z zu bestimmen ist (Gl. (31)).

$$I_z = \left[\int_0^{b_1} Y^2 dY + v \int_{b_1}^{b_1+b_2} Y^2 dY \right] \int_R^{R+h} \frac{dr}{r}$$

$$= \left[\frac{b_1^3}{3} + v \left(3b_1^2 + 3b_1 b_2 + \frac{b_2^2}{3} \right) b_2 \right] \ln \left(1 + \frac{h}{R}\right) \quad (31 a)$$

Mit Gl. (37) und (32) folgt nach einer Zwischenrechnung:

$$I_z = b_1^3 \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{R}\right)}{4(1+vx)} \left\{ \frac{4}{3} [1 + v(3(1+x) + x^2)x] \cdot \right.$$

$$\left. (1+vx) - [1 + v(2+x)x]^2 \right\} \quad (32 a)$$

Für die Temperaturglieder aus Gl. (14), (15), (16) bzw. (33) ... (36) ergibt sich mit der Abkürzung

$$a = \alpha_{T_2} / \alpha_{T_1} \quad (38)$$

$$D = (\alpha_{T_1} A_1 + v \alpha_{T_2} A_2) \Delta T = \alpha_{T_1} b_1 h (1 + vax) \Delta T \quad (14 a)$$

$$D_y = \alpha_{T_1} b_1 h^2 \frac{1}{2} (1 + vax) \cdot$$

$$\left(1 - 2 \frac{\frac{h}{R} - \ln \left(1 + \frac{h}{R}\right)}{\frac{h}{R} \ln \left(1 + \frac{h}{R}\right)} \right) \Delta T \quad (35 a)$$

$$D_z = \alpha_{T_1} h b_1^2 \frac{1}{2} [1 + va(2+x)x]$$

$$- \frac{1 + vax}{1 + vx} (1 + v(2+x)x) \Delta T \quad (36 a)$$

Der Stülpwinkel errechnet sich aus Gl. (21), die sich mit $M = 0$ und $q = 0$ auf

$$\psi = \frac{D_z}{I_z + D_y} \quad (21 a)$$

reduziert, wobei das mit dem kleinen Wert $\alpha_{T_1} \Delta T$ behaftete D_y in der Regel wesentlich kleiner als I_z ist und vernachlässigt werden kann.

Für die Tangentialspannung σ_t verbleiben mit der verkürzten Gl. (21 a).

$$\sigma_{t1} = E_o \left[\frac{1}{R_o + z} \left(\frac{D}{A} + \frac{D_z}{I_z} y \right) - \alpha_{T_1} \Delta T \right] \quad (22 a)$$

$$\sigma_{t2} = E_o v \left[\frac{1}{R_o + z} \left(\frac{D}{A} + \frac{D_z}{I_z} y \right) - \alpha_{T_1} a \Delta T \right] \quad (22 b)$$

Die Auswertung erfolgte anhand eines konkreten Zahlenbeispiels:

Werkstoff 1: Stahl mit $E_1 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;
 $\alpha_{T_1} = 1,2 \cdot 10^{-5} / \text{K}$

Werkstoff 2: Alu-Legierung mit $E_2 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;
 $\alpha_{T_2} = 2,4 \cdot 10^{-5} / \text{K}$.

Mithin wird $V = 1/3$ und $a = 2$.

Für die Abmessungen wurden gesetzt: $R = 5 h$.

Bild 3 zeigt den Stülpwinkel ψ in Abhängigkeit von $x = b_2/b_1$ für einen quadratischen Ringquerschnitt $h = b_1 + b_2 = b_1 (1+x)$. ψ durchläuft ein Maximum bei $(b_2/b_1)_{\max} = 1,73$.

Für $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$ wird auch $\psi = 0$.

Die numerische Auswertung ergab, daß die Lage dieses Maximums *nicht* vom Verhältnis des thermischen Ausdehnungskoeffizienten $a = \alpha_{T_2} / \alpha_{T_1}$ abhängt, sondern lediglich vom Modulverhältnis $v = E_2 / E_1$.*) Es ist für diese Form der Schichtung allgemein:

$$(b_2/b_1)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{v}} \quad (23)$$

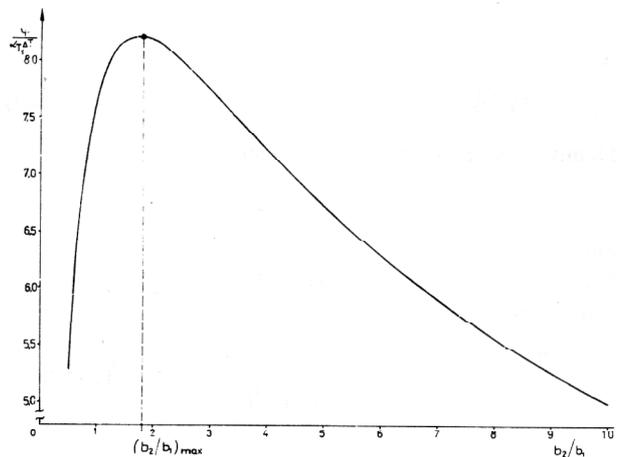


Bild 3
 Stülpwinkel ψ in Abhängigkeit vom Breitenverhältnis b_2/b_1 bei quadratischem Ringquerschnitt eines St-Al-Verbundes

LITERATUR

- [1] Grammel, R.: Das Umstülpfen und Umkippen von elastischen Ringen. ZAMM 3 (1923), S. 420.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Pfefferkorn
 Technische Hochschule „Carl Schorlemmer“
 Leuna-Merseburg
 Sektion Werkstoff- und Verarbeitungstechnik
 Otto-Nuschke-Str.
 Merseburg
 4200

*) Für die numerische Berechnung danke ich Frau Dipl.-Ing. I. Dörner.