

Vergleichende Untersuchungen zum Reanalyseverfahren mit linearisierter Taylorreihe bei Eigenfrequenzberechnungen

Uwe Schramm

1. Einleitung

Zur Eigenschwingungsberechnung mechanischer Systeme steht eine Vielzahl von Rechenprogrammen zur Verfügung. Für große Strukturen, die mit der Finite-Element-Methode (FEM) modelliert sind, wird der Zeitaufwand für die Berechnung jedoch sehr groß. Variantenrechnungen sind daher mit vertretbarem Aufwand kaum möglich. Um rechenkostengünstig Variantenuntersuchungen durchführen zu können, wurden die sogenannten Reanalyseverfahren entwickelt [1]. Ein Verfahren, das auf einer linearisierten Taylorreihenentwicklung basiert, soll hier untersucht werden. Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens sind kleine Parameteränderungen. Dieses Verfahren ist sehr gut für eine Verbindung mit FE-Programmen geeignet.

2. Das Reanalyseverfahren

2.1. Die linearisierte Taylorreihe

Das Eigenschwingungsverhalten eines Systems wird durch das Eigenwertproblem

$$(\underline{K} - \lambda_i \underline{M}) \underline{x}_i = 0 \quad (1)$$

beschrieben. λ_i , \underline{K} , \underline{M} sind abhängig von den Entwurfsparametern p_j . Die Entwicklung von λ_i in eine Taylorreihe und der Abbruch dieser Reihe nach dem linearen Glied ergibt für m Parameter

$$\lambda_i^* = \lambda_i + \sum_{j=1}^m (p_j - p_{0j}) \lambda_{i,j} \quad (2)$$

$$\lambda_{i,j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} \cdot$$

Dieses Verfahren wurde schon mehrfach in der Literatur beschrieben ([2] bis [6]).

In [6] wird unter Berufung auf [7] eine weitere Möglichkeit der linearisierten Taylorreihe vorgestellt. Die Taylorreihe wird in Abhängigkeit von den Reziproken der Entwurfsparameter entwickelt

$$\lambda_i^* = \lambda_i + \sum_{j=1}^m (p_j - p_{0j}) \lambda_{i,j} \frac{p_{0j}}{p_j} \quad (3)$$

Die Gln. (2) und (3) können analog auch auf die Berechnung der Eigenvektoren angewendet werden.

Die Ableitung $\lambda_{i,j}$ ergibt sich für \underline{M} -normierte Eigenvektoren zu

$$\lambda_{i,j} = \underline{x}_i^T (\underline{K}_{,j} - \lambda_i \underline{M}_{,j}) \underline{x}_i \quad (4)$$

Die Ableitungen $\underline{x}_{i,j}$ können mit einer Linearkombination berechnet werden:

$$\underline{x}_{i,j} = \sum_{k=1}^1 a_{ijk} \underline{x}_k \quad (5)$$

mit den Linearfaktoren

$$a_{ijk} = \frac{\underline{x}_k^T (\underline{K}_{,j} - \lambda_i \underline{M}_{,j}) \underline{x}_i}{(\lambda_i - \lambda_k)} \quad i \neq k \quad (6)$$

$$a_{ijj} = -\frac{1}{2} \underline{x}_i^T \underline{M}_{,j} \underline{x}_i \cdot$$

Eine Besonderheit dieses Verfahrens in Verbindung mit der FEM ist, daß die Ableitungen der Systemmatrizen nach Elementparametern nur wenige von Null verschiedene Elemente enthält, nämlich nur die Ableitungen der Koeffizienten der Elementmatrizen des modifizierten Elementes, da die Parameter verschiedener Elemente als unabhängig voneinander betrachtet werden können. Daraus folgt, daß nur die Elementknotenverschiebungen des betrachteten Elementes in Gl. (4) und (6) einfließen und somit der Berechnungsaufwand sehr gering wird. Der Anschluß dieses Verfahrens an ein FE-Programm ist in [5] beschrieben. Die Realisierung des Verfahrens erfolgte im Programm PASSAD des VEB Kombinat Schiffbau.

2.2. Eine Verbesserung der Eigenwertberechnung

Aus mehreren Berechnungen mit Gl. (2) ergaben sich bei größeren Parameteränderungen erhebliche Abweichungen der Näherungslösung von der vollständigen Lösung. Im folgenden soll ein Gedanke zur Verbesserung des Verfahrens dargestellt werden.

Die Reihe Gl. (2) wird geschrieben als

$$\lambda_i^* = \lambda_i + \sum_{j=1}^m \Delta \lambda_{ij} \quad (7)$$

mit

$$\Delta \lambda_{ij} = (p_j - p_{0j}) \lambda_{i,j} \quad (8)$$

Nun soll die Änderung von $\lambda_{i,j}$ in Abhängigkeit von der Parameteränderung ebenfalls berücksichtigt werden.

$$\lambda_{i,j}^* = \lambda_{i,j} + \lambda_{i,jj} \Delta p_j \quad (9)$$

$\lambda_{i,jj}$ ergibt sich durch Differentiation nach p_j aus Gl. (4):

$$\lambda_{i,jj} = [\underline{x}_i^T (\underline{K}_{,jj} - \lambda_i \underline{M}_{,jj} - 2\lambda_{i,j} \underline{M}_{,j}) + 2\underline{x}_{i,j}^T (\underline{K}_{,j} - \lambda_i \underline{M}_{,j} - \lambda_{i,j} \underline{M})] \underline{x}_i \quad (10)$$

Die Matrizen $\underline{K}_{,jj}$ und $\underline{M}_{,jj}$ sind in vielen Fällen Nullmatrizen. Die Ableitungen $\underline{x}_{i,j}$ werden aus Gl. (5) berech-

net. Der neue Eigenwert λ_i^* wird dann schrittweise ermittelt:

$$\lambda_i^{*(s+1)} = \lambda_i^{(s)} + \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j}^{(s)} \Delta p_{j0} \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (11a)$$

mit

$$\lambda_{i,j}^{(s)} = \lambda_{i,j}^{(s-1)} + \lambda_{i,jj} \Delta p_{j0} \quad (s = 1, 2, \dots)$$

$$\lambda_{i,j}^{(0)} = \lambda_{i,j} \quad \lambda_i^{(0)} = \lambda_i \quad (11b)$$

Δp_{j0} wird gewählt, z. B. $\Delta p_{j0} = \Delta p_j / 10$. Der Anschluß an ein FE-Programm kann analog dem in [5] beschriebenen Vorgehen erfolgen.

3. Numerisches Beispiel

Die vorgestellten Verfahren sollen an einem schon in [5] verwendeten Beispiel verglichen werden (Bild 1). Es wurde ein FE-Modell aus 32 Platten- und 12 Balkenelementen aufgestellt. Das Modell hat 83 Freiheitsgrade. Modifiziert wurden die Höhe der Mittelsteife und die Höhe einer der Seitensteifen. Von den Modifikationen sind jeweils nur die Querschnittskennwerte Fläche A, Flächenträgheitsmomente I_x , I_y der Balkenelemente betroffen. Die Größen der Parameteränderungen infolge der Änderung der Steifenhöhe sind in Tabelle 1 zusammengefaßt. In Tabelle 2 sind die Ergebnisse, die mit den in Abschnitt 2 vorgestellten Gleichungen erzielt wurden, mit der vollständigen FEM-Rechnung verglichen.

Die Ergebnisse zeigen, daß die Fehler, die bei der Anwendung der Reanalyseverfahren gemacht werden, abhängig sind

1. von der Größe der Parameteränderungen
2. vom Schwingungsgrad und der Schwingform
3. vom Ort der Parameteränderung
4. von der Größe der Eigenfrequenz infolge der Parameteränderung.

Die Forderung, nur kleine Parameteränderungen zu berücksichtigen, ist offensichtlich nicht sehr streng zu nehmen. Im vorliegenden Beispiel sind trotz erheblicher Parameteränderungen, insbesondere bei den Flächenträgheitsmomenten I_y , noch gute Ergebnisse erzielt worden. Eine Aussage, welches der drei vorgestellten Verfahren im Hinblick auf seine Genauigkeit besser

Tabelle 1

Eigenfrequenzvergleich (Frequenzen in Hz)

Δh_{Abs}	5 mm	10 mm	15 mm
$\Delta h \%$	12,5 %	25 %	37,5 %
ΔI_x	12,0 %	70 %	112 %
ΔI_y	6,3 %	14,5 %	25 %
ΔA	5,6 %	13,8 %	22 %

ist, läßt sich nicht treffen. Aus der Betrachtung der Gln. (2) und (3) wäre es möglich, ein kombiniertes Verfahren zu entwickeln, das in Abhängigkeit von einer Entscheidungsgröße e_j , die aus einem Vergleich der Restglieder der Taylorreihen gewonnen wird, mal die Gl. (2) oder die Gl. (3) zur Anwendung kommen läßt.

$$\lambda_i^* = \lambda_i + \sum_{j=1}^m c_j (p_j - p_{0j}) \lambda_{i,j} \quad (12)$$

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{f. } e_j < 0 \\ \frac{p_{0j}}{p_j} & \text{f. } e_j > 0 \end{cases}$$

Dieser Vorschlag wurde auch in [6] gemacht. In diesem Beitrag ist jedoch die Entscheidungsgröße e_j nicht genau genug bestimmt.

Die Anwendung von Gl. (11) bringt nur teilweise Verbesserungen der Ergebnisse. Der Aufwand zur Berechnung ist durch das iterative Vorgehen wesentlich höher als bei Gln. (2), (3). Eine weitere Möglichkeit, die Ergebnisse mit der Taylorreihenentwicklung zu verbessern, ist die vollständige Berücksichtigung der zweiten Ableitungen, also auch der gemischten

$$\lambda_i^* = \lambda_i + \sum_{j=1}^m \Delta p_j \lambda_{i,j} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Delta p_j \Delta p_k \lambda_{i,jk} \quad (13)$$

Für dieses Verfahren liegt der Aufwand sehr hoch, so daß im Sinne einer Rechenzeiteinsparung, die ja Anliegen der Reanalyse ist, nur in wenigen Ausnahmefällen eine Anwendung von Gl. (13) sinnvoll ist.

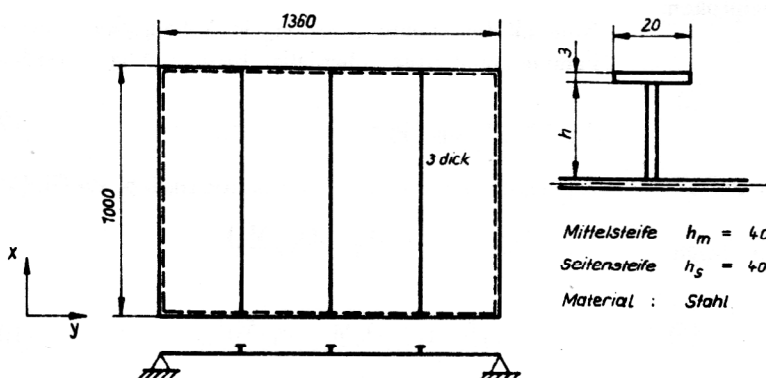


Bild 1
Versteifte Platte

Tabelle 2
Parameteränderungen der Balkenelemente

		Grund-entwurf	Änderung der Mittelsteife						Änderung der Seitensteife					
			$\Delta h_m = 5 \text{ mm}$		$\Delta h_m = 10 \text{ mm}$		$\Delta h_m = 15 \text{ mm}$		$\Delta h_s = 5 \text{ mm}$		$\Delta h_s = 10 \text{ mm}$		$\Delta h_s = 15 \text{ mm}$	
f_1	FEM	73,25	73,27		73,30		73,33		73,28		73,31		73,34	
	Gl.(2)		73,27	—	73,30	—	73,33	—	73,28	—	73,35	—	73,43	0,2%
	Gl.(3)		73,27	—	73,29	—	73,32	—	73,28	—	73,33	—	73,36	—
	Gl.(11)		73,27	—	73,31	—	73,34	—	73,28	—	73,27	—	73,19	0,2%
f_2	FEM	74,24	74,55		74,92		74,98		74,43		74,59		74,65	
	Gl.(2)		74,68	0,1%	76,83	2,5%	78,42	4,6%	74,54	0,1%	75,96	1,8%	77,03	3,2%
	Gl.(3)		74,63	0,1%	75,77	1,1%	77,04	2,7%	74,51	0,1%	75,26	0,9%	75,57	1,2%
	Gl.(11)		74,65	0,1%	74,59	0,4%	72,20	3,7%	74,49	0,1%	73,51	1,0%	70,29	6,2%
f_3	FEM	76,99	77,00		77,03		77,06		77,80		78,25		78,29	
	Gl.(2)		77,00	—	77,03	—	77,06	—	78,23	0,5%	84,18	7,6%	88,42	12,9%
	Gl.(3)		77,00	—	77,02	—	77,04	—	78,09	0,4%	81,26	3,8%	82,48	5,3%
	Gl.(11)		77,00	—	77,03	—	77,06	—	78,22	0,5%	80,38	2,7%	77,76	0,7%
f_4	FEM	79,23	80,98		87,28		90,07		80,47		87,28		90,49	
	Gl.(2)		80,95	—	89,11	2,1%	94,82	5,3%	80,03	0,5%	83,53	3,8%	86,76	4,1%
	Gl.(3)		80,76	0,3%	85,13	2,4%	86,79	3,6%	79,94	0,6%	82,00	6,0%	82,80	8,4%
	Gl.(11)		81,16	0,2%	90,74	3,9%	97,90	8,7%	80,31	0,2%	90,24	3,3%	101,70	12%

LITERATUR

- [1] Arora, J. S.; Survey of Structural Reanalysis Techniques. Journal of the Structural Division, ASCE, 102 (1976) ST4, S. 783 – 802.
- [2] Schlottmann, G.: Berechnung des Schwingungsverhaltens von Schiffskonstruktionen und die Möglichkeiten der Anwendung von Reanalyseverfahren. Wiss. Zeitschr. WPU Rostock, Naturwiss. Reihe 32(1983) H. 6, S. 45 – 54.
- [3] Fox, R. L.; Kapoor, M. P.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. AIAA-Journal 6(1968) H. 12, S. 2426 – 2429.
- [4] Dresig, H.: Methode zur Berechnung des Einflusses von Parameteränderungen auf die Eigenfrequenzen von Schwingungssystemen. Maschinenbautechnik 26(1977) H. 9 S. 427 – 430.
- [5] Schramm, U.; Schlottmann, G.: Zur Anwendung von Reanalyseverfahren bei Kontinuumsschwingungen. 6. Tagung Festkörpermechanik, Dynamik und Getriebe-technik, Sept. 1985, Band B S. XXXVII/1 – 12.
- [6] Grandhi, R. V.; Thareja, R.; Haftka, R. T.: NEWSUMT-A.: A General Purpose Program for Constrained Optimization Using Constraint Approximations. Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Transactions of the ASME, 107(März 1985), S. 94 – 99.
- [7] Noor, A. K.; Lowder, H. E.: Structural Reanalysis Via a Mixed Method. Computers and Structures, 5(1975) H. 4, S. 9 – 12.