

# Ein mechanisches Modell für elastisch-plastische geometrisch-nichtlineare Prozesse bei metallischen Körpern

J. Siegert

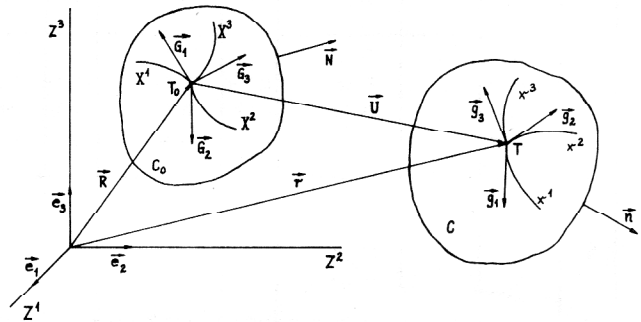
## 0. Einleitung

Bei der Untersuchung vieler Prozesse der Kontinuumsmechanik gewinnt die Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten zunehmend an Bedeutung, so z. B. im Zusammenhang mit der Materialökonomie in der metallverarbeitenden Industrie (Leichtbauweise, Ausnutzung des Traglastvermögens). Fundierte Aussagen über den günstigsten Materialeinsatz erfordern umfangreiche theoretische Untersuchungen auf den Gebieten der Mechanik und Mathematik. In diesen Rahmen ist die vorliegende Arbeit einzuordnen. Zunächst werden die bekannten grundlegenden Zusammenhänge für das 3D-Modell mit großen Verformungen dargestellt, wobei die Zustandsgleichungen dem Konzept von Budiansky entsprechen. Danach erfolgt die Herleitung und Diskussion eines eindimensionalen Sonderfalles. Abschließend wird in der Arbeit ein bezüglich der Fließbedingung und des (internen) Verfestigungsparameters allgemeineres Modell formuliert. Sowohl das 1D- als auch das verallgemeinerte 3D-Modell können als Basis für die mathematische Untersuchung des Einflusses der geometrisch-nichtlinearen Effekte benutzt werden, die beim Einbau der entsprechenden Terme in die bekannte mathematische Theorie für kleine Verformungen entstehen (beim 1D-Modell sind die Nichtlinearitäten anschaulicher erfassbar als im mehrdimensionalen Fall).

In der gesamten Arbeit wird mit einem konvektiven, d. h. körperfesten (sich bei der Verformung mitdeformierenden) Koordinatensystem gearbeitet. Die den Deformationsprozeß beschreibenden Grundgleichungen der zugrunde gelegten Lagrangeschen Betrachtungsweise sind allgemein bekannt (vgl. z. B. [1], [2], [5] bis [8]) und werden darum nur kurz dargelegt. In der Arbeit gilt (bis auf die mit dem Symbol  $\mathcal{F}_i$  gekennzeichneten Stellen) die Summenkonvention.

## 1. Grundlegende Beziehungen

In der Lagrangeschen Betrachtungsweise stellt die mit dem Zeitparameterwert  $t = t_0$  festgelegte Ausgangszugleich die Bezugskonfiguration  $C_0$  dar. Die Größen von  $C_0$  sind mit großen, die (zeitabhängigen) in der aktuellen Konfiguration  $C$  mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet (vgl. Bild 1, vgl. [5] (Bild 3.1)).  $X^i, x^i$  stellen die konvektiven Koordinaten,  $\vec{G}_i, \vec{g}_i$  die Basisvektoren (die dazu dualen Größen sind  $\vec{G}^i, \vec{g}^i$ ),  $G_{ij}, g_{ij}$  (bzw.  $G^{ij}, g^{ij}$ ) die Komponenten der Metrikensoren,  $\Omega, \omega$  das Volumen,  $A, a$  die Oberfläche,  $\vec{N} = N_i \vec{G}^i, \vec{n} = n_i \vec{g}^i$  die entsprechende Normale,  $\vec{P} = P_i \vec{G}^i, \vec{p} = p_i \vec{g}^i$  den Oberflächenkraft-



**Bild 1**  
Deformationsprozeß

vektor pro entsprechende Flächeneinheit,  $dS, ds$  das Linienelement,  $P, \rho$  die Massendichte,  $\vec{R}, \vec{r}$  den Ortsvektor zum materiellen Punkt  $T$  und  $\vec{U} = \vec{r} - \vec{R} = U_i \vec{G}^i = U^i \vec{G}_i = u_j \vec{g}^j = u^j \vec{g}_j$  ( $U^i = G^{ij} U_j, u^i = g^{ij} u_j$ ) dessen Verschiebungsvektor bezüglich des räumlichen kartesischen Koordinatensystemes  $Z^i$  mit der Basis  $\{\vec{e}_i\}$  dar.

Zu den kinematischen Grundbeziehungen für große Verformungen gehört der Zusammenhang zwischen den Vektoren  $\vec{g}_i$  und  $\vec{G}_j$  sowie die Wahl eines Verzerrungsmaßes  $\epsilon_{ij}$ :

$$\vec{g}_i = (\delta_{ij} + U^j /_{;i}) \vec{G}_j, \quad (1)$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 0,5(g_{ij} - G_{ij}) dx^i dx^j = \epsilon_{ij} dx^i dx^j. \quad (2)$$

Dabei bezeichnen  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol und  $(\cdot)_{;i}$  die kovariante Ableitung bezüglich der undeformierten Metrik. Faßt man die Größen  $\epsilon_{ij}$  als Komponenten eines Tensors bezüglich der Basissysteme  $\{\vec{G}^i\}$  bzw.  $\{\vec{g}^i\}$  auf, erhält man die Verzerrungstensoren  $\epsilon_G$  (Cauchy-Green) bzw.  $\epsilon_A$  (Almansi-Hamel):

$$\epsilon_G = 0,5(g_{ij} - G_{ij}) \vec{G}^i \vec{G}^j = G \epsilon_{ij} \vec{G}^i \vec{G}^j, \quad G \epsilon_{ij} := \epsilon_{ij}, \quad (3)$$

$$\epsilon_A = 0,5(g_{ij} - G_{ij}) \vec{g}^i \vec{g}^j = A \epsilon_{ij} \vec{g}^i \vec{g}^j, \quad A \epsilon_{ij} := \epsilon_{ij}.$$

Nur die kovarianten Komponenten der Tensoren  $\epsilon_G$  und  $\epsilon_A$  (und damit auch die entsprechenden Zeitableitungen, d. h. die Deformationsgeschwindigkeiten) sind gleich, die anderen (z. B. die gemischten Komponenten) nicht (vgl. [1]). Für die Größen  $\epsilon_{ij}$  und  $d_{ij} := \dot{\epsilon}_{ij}$  (der Punkt symbolisiert die partielle Ableitung nach der Zeit) erhält man

$$\epsilon_{ij} = 0,5(U_{i/j} + U_{j/i} + U^k /_{;i} U_{k/j}), \quad (4)$$

$$d_{ij} = 0,5(\dot{U}_{i/j} + \dot{U}_{j/i} + U^k /_{;i} \dot{U}_{k/j} + U^k /_{;j} \dot{U}_{k/i}). \quad (5)$$

Häufig benutzt man als Deformationsmaß auch die Hencky-Verzerrungen:

$$\tilde{\epsilon}^i_j = 0,5 \ln(G^{ik} g_{kj}). \quad (6)$$

Eine weitere wichtige Beziehung folgt aus dem Gesetz über die Erhaltung der Masse. Mit den Größen  $G := \det(G_{ij})$  und  $g := \det(g_{ij})$  ergibt sich für  $J := \rho/P$ :

$$J = (g/G)^{0,5}. \quad (7)$$

Zu den *statischen Grundbeziehungen* gehören die Definitionen der Spannungstensoren  $\sigma_C$  (Cauchy),  $\sigma_T$  (Trefftz, Kirchhoff) und  $\sigma_P$  ((2.) Piola-Kirchhoff):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_C = C \sigma^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j, \quad \sigma_T = T \sigma^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j = J C \sigma^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j, \\ \sigma_P = P \sigma^{ij} \vec{G}_i \vec{G}_j, \quad \vec{P} = C \sigma^{ij} n_j \vec{g}_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die kontravarianten Komponenten von  $\sigma_T$  und  $\sigma_P$  sind gleich, alle anderen nicht (vgl. [7]). Die Vektoren  $\vec{p}$  und  $\vec{P}$  ergeben sich aus der einwirkenden Kraft  $\vec{F}$ . Man erhält:

$$\vec{F} = \vec{p} da = \vec{P} dA, \quad \vec{P} = P \sigma^{kj} (\delta^i_k + U^i_{/k}) N_j \vec{G}_i. \quad (9)$$

Das inkrementelle Kräftegleichgewicht in  $\Omega$  (bei vernachlässigbaren Volumenkräften) lautet:

$$([P \sigma^{kj} (\delta^i_k + U^i_{/k})]')_{/j} = 0. \quad (10)$$

Auf entsprechenden Oberflächenteilen von  $A$  gelten die Randbedingungen (RB):

$$\left. \begin{aligned} [P \sigma^{kj} (\delta^i_k + U^i_{/k})] N_j = \vec{P}^i, \\ \vec{P} = P^i \vec{G}_i. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die zu (10), (11) gehörende Variationsgleichung kann in der folgenden Form aufgestellt werden: Gesucht wird derjenige Vektor  $\vec{U} = U^i \vec{G}_i = U_i \vec{G}^i$  aus einem Vektorfunktionsraum  $\underline{U}$  (die Elemente von  $\underline{U}$  müssen die vorhandenen [ohne Einschränkung der Allgemeinheit als homogen vorausgesetzten] geometrischen RB erfüllen), so daß für alle  $\vec{V} = V^i \vec{G}_i = V_i \vec{G}^i$  aus  $\underline{U}$  die Integralidentität

$$\int_{\Omega} [0,5 P \delta^{ij} (V_{/ij} + V_{/ji} + U^k_{/j} V_{k/j} + U^k_{/j} V_{k/i}) + P \sigma^{ij} U^k_{/j} V_{k/i}] d\Omega = \int_A \vec{P}^i V_i dA \quad (12)$$

gilt (Prinzip der virtuellen Arbeit). Der Raum  $\underline{U}$  ist so zu wählen, daß die Integrale in (12) existieren. Die Standardformulierung erfolgt in einem Banach-Raum (s. [15]); (12) kann aber auch in einem Unterraum eines Hilbert-Raumes betrachtet werden (vgl. [18]). Im weiteren wird nicht mehr zwischen den gleichen Komponenten der Verzerrungs- bzw. Spannungstensoren unterschieden, folgende Bezeichnungen finden Verwendung:

$$\epsilon_{ij} = A \epsilon_{ij} = G \epsilon_{ij}, \quad \sigma^{ij} = T \sigma^{ij} = P \sigma^{ij}.$$

Die *Materialgleichungen* bestehen aus der Zustandsgleichung (ZG), der Anfangs- und Nachfolgeflußbedingung (FB), dem Verfestigungsgesetz (VG), dem Fließgesetz (FG) sowie einer Annahme bezüglich der Aufspaltung von  $\dot{\epsilon}_{ij}$  in einen reversiblen (elastischen) Anteil  $e_1 \dot{\epsilon}_{ij}$  und einen irreversiblen (plastischen) Anteil  $p_1 \dot{\epsilon}_{ij}$ .

Für Metalle kann vorausgesetzt werden, daß

$$\dot{\epsilon}_{ij} = e_1 \dot{\epsilon}_{ij} + p_1 \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (13)$$

Für diese Werkstoffe bleibt das Volumen während des Deformationsprozesses näherungsweise konstant:

$$J = \rho/P = (g/G)^{0,5} \approx 1, \quad \dot{J} \approx 0. \quad (14)$$

Stellt man die ZG nach Budiansky (vgl. [10]) unter der Voraussetzung der Gültigkeit von (13), (14) auf, ergibt sich bei Beachtung der Symmetrie von  $\delta^{ij}$  und  $\dot{\epsilon}_{ij}$ :

$$\dot{\sigma}^{ij} = \left[ \frac{c_{e1}}{1+c_\nu} (g^{ik} g^{jl} + \frac{c_\nu}{1-2c_\nu} g^{ij} g^{kl}) - \frac{\alpha}{\eta} \delta^{ij} \delta^{kl} \right] \dot{\epsilon}_{kl} - (g^{ik} \dot{x}^j + g^{jk} \dot{\sigma}^i) \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (15)$$

Dabei bezeichnen  $c_{e1}$  (Elastizitätsmodul),  $c_\nu$  (Querkontraktionszahl, für Metalle gilt  $c_\nu = 0,3$ ) bekannte Materialkonstanten. Die Funktion  $\alpha$  besitzt den Wert 1, falls aktive Belastung (vgl. (23)) auftritt und den Wert 0, wenn ein anderer Belastungsfall vorliegt.  $\delta^{ij}$  ist der zu  $\sigma^{ij}$  gehörende Spannungstensor. Die Größe  $\eta$  stellt eine Funktion des (zeitabhängigen) Tangentialmoduls  $c_T$  des einachsigen Zugversuches (vgl. (37)) und der Vergleichsspannung  $\sigma_V$  dar:

$$\sigma_V = (2/3 g_{ik} g_{jl} \delta^{ij} \delta^{kl})^{0,5}, \quad (16)$$

$$\eta = 2c_T (\sigma_V)^2 [2(1+c_\nu)/3 + c_{e1}/c_T - 1] / (3c_{e1} - 3c_T).$$

Häufig verwendet man in (15) anstelle der Zeitableitung  $\dot{\sigma}^{ij}$  die objektive Jaumann-Ableitung  $\hat{\sigma}^{ij}$  von  $\sigma^{ij}$ :

$$\hat{\sigma}^{ij} := \dot{\sigma}^{ij} + (g^{ik} \dot{\sigma}^j + g^{jk} \dot{\sigma}^i) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (17)$$

Als Anfangs-FB findet oft die von-Mises-FB Verwendung:

$$\underline{F} = \underline{F}(\sigma^{ij}, \kappa_0; g_{ij}) = \sigma_V - \kappa_0 = 0. \quad (18)$$

$\kappa_0$  stellt den das erstmalige Fließen beschreibenden Anfangswert eines (skalaren) Parameters  $\kappa$  dar, der z. B. beim „strain-hardening“-Verhalten des Materials durch das Verfestigungsgesetz

$$\dot{\kappa} = p_1 \dot{\epsilon}_V = (2/3 g^{ij} g^{kl} p_1 \dot{\epsilon}_{il} p_1 \dot{\epsilon}_{jk})^{0,5} \quad (19)$$

bestimmt ist. Die Folge-FB und das (mit  $\underline{F}$  assoziierte) FG sind:

$$\underline{F}(\sigma^{ij}, \kappa; g_{ij}) = \sigma_V - \kappa = 0, \quad (20)$$

$$p_1 \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \partial \underline{F} / \partial \sigma^{ij} = \lambda q_{ij}, \quad q_{ij} := \partial \underline{F} / \partial \sigma^{ij}. \quad (21)$$

Die nichtlineare Sprungfunktion  $\alpha = \alpha(\sigma^{ij}, \kappa, \hat{\sigma}^{ij}; g_{ij})$  wird mit Hilfe der aus (20) abgeleiteten Konsistenzbedingung (22) konstruiert:

$$\underline{\dot{F}} = q_{ij} \hat{\sigma}^{ij} + q_\kappa \dot{\kappa} = 0, \quad q_\kappa := \partial \underline{F} / \partial \kappa, \quad (22)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{falls } \underline{F}(\sigma^{ij}, \kappa; g_{ij}) = 0 \text{ und } q_{ij} \hat{\sigma}^{ij} > 0 \\ & \text{(aktive Belastung),} \\ 0, & \text{wenn } \underline{F} < 0 \text{ und } q_{ij} \hat{\sigma}^{ij} \leq 0 \text{ (passive Belastung) bzw. } \underline{F} < 0 \text{ (Entlastung).} \end{cases} \quad (23)$$

Damit sind die wichtigsten grundlegenden Beziehungen des 3D-Modelles bereitgestellt. Diese Theorie wurde bereits für viele praktische Berechnungen mit der Finite-Elemente-Methode als Basis benutzt, obwohl zu den mechanischen Annahmen eine Reihe kritischer Bemerkungen angebracht sind. Zum Beispiel wird die Zerlegung der Deformationsgeschwindigkeit (vgl. (13)) in der Literatur stark diskutiert (vgl. [12], [16], [17]). Weiter ist in der ZG (15) bei  $\alpha = 1$  der elastische und plastische Anteil nicht erkennbar, da die Metrik das Resultat der gesamten Deformation ausdrückt. Der Zusammenhang (15) zwischen  $\dot{\sigma}^{ij}$  und  $\dot{\epsilon}_{ij}$  stellt eine willkürliche Verallgemeinerung der linearen Theorie dar, die Wahl von FB und VG ist sehr speziell. Trotz dieser Probleme widerspiegeln die numerischen Resultate gut die realen Prozesse (vgl. [9] bis [11]).

## 2. Herleitung eines eindimensionalen Modelles

Es wird ein Zugstab als Quader im einachsigen Spannungszustand betrachtet. Das Material sei (wie beim 3D-Modell) homogen und isotrop. Die konvektiven Koordinaten sollen in der Bezugskonfiguration  $C_0$  kartesisch sein.  $A$ ,  $a$  bezeichnen jetzt den Querschnitt parallel zur  $X^2$ - $X^3$ -Ebene,  $L$  und  $l$  die in Richtung der  $X^1$ -Koordinatenlinie gemessene Länge. Der Einfachheit halber gelte  $\Omega = A = L = 1$ , d. h., diese Größen seien in  $C_0$  normiert. Die gleichmäßig verteilte Oberflächenkraft  $\vec{F}$  wirkt in  $X^1$ -Richtung. Für die Verschiebung  $\vec{U} = U^k \vec{G}_k$  gilt bei diesem Modell  $U^k = U^k(X^k) = U_k$ . Mit der Bezeichnung  $U_i' := \partial U_i / \partial X^1$  ( $\dot{X}_i$ ) erhält man:

$$\vec{g}_i = (1 + U_i') \vec{G}_i, \quad (\dot{X}_i). \quad (24)$$

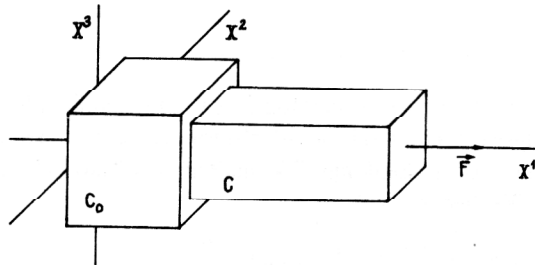


Bild 2  
Zugstab als Quader

Die kinematischen Beziehungen besitzen die folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } i = j, (\dot{X}_i): g_{ii} &= (1 + U_i')^2, g^{ii} = (1 + U_i')^{-2}, \\ \epsilon_{ii} &= U_i' (1 + U_i'/2), \dot{\epsilon}_{ii} = \dot{U}_i' (1 + U_i'). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\text{Für } i \neq j: g_{ij} = g^{ij} = \epsilon_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} = 0.$$

$$J = g^{0,5} = |(1 + U_1') (1 + U_2') (1 + U_3')|. \quad (26)$$

Bei der Deformation sollen folgende Bedingungen gelten:

$$J \approx 1, \dot{J} \approx 0, U_i' > -1 \text{ für } i=1, 2 \text{ und } 3. \quad (27)$$

Betrachten wir nun die statischen Grundgleichungen. Für den einachsigen Spannungszustand gilt (vgl. (8)):

$$\sigma^{11} \neq 0, \sigma^{ij} = 0 \text{ (sonstige Komponenten)}. \quad (28)$$

Damit erhält man für den Deviator  $\hat{\sigma}^{ij}$ , die Vergleichsspannung  $\sigma_V$  und die Jaumann-Ableitung  $\dot{\hat{\sigma}}^{ij}$ :

$$\hat{\sigma}^{11} = 2/3 \sigma^{11}, \hat{\sigma}^{ii} = -1/3 \sigma^{11} g_{11} g^{ii}, i=2,3, (\dot{X}_i), \quad (29)$$

$$\sigma_V = g_{11} \sigma^{11} = \sigma^1_1, \dot{\sigma}_V = \dot{\hat{\sigma}}^{11} g_{11}, \text{ falls } \sigma^1_1 \geq 0, \quad (30)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}^{11} = \dot{\sigma}^{11} + 2 \sigma^{11} \dot{\epsilon}_{11} g^{11}. \quad (31)$$

Die gemischte Komponente  $\sigma^1_1$  stimmt näherungsweise mit der physikalischen Spannung überein:

$$\sigma_V = J_C \sigma^1_1 \approx C \sigma^1_1 = |\vec{F}| / a, \text{ wenn } \sigma^1_1 \geq 0. \quad (32)$$

Um die eindimensionale Zustandsgleichung herzuleiten, wird (15) zweimal mit der kovarianten Metrik überschoben:

$$\left. \begin{aligned} g_{im} g_{jn} \dot{\sigma}^{ij} &= \frac{c_{e1}}{1+c_v} (\dot{\epsilon}_{mn} + \frac{c_v}{1-2c_v} \Theta g_{mn} - \frac{\alpha}{\eta} g_{im} g_{jn}) \cdot \\ \sigma^{ij} \sigma^{kl} \dot{\epsilon}_{kl} &- \sigma^{11} (g_{1n} \dot{\epsilon}_{1m} + g_{1m} \dot{\epsilon}_{1n}), \Theta := g^{kl} \dot{\epsilon}_{kl}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Daraus erhält man für  $m = n = 1$  unter Beachtung von (25):

$$(g_{11})^2 \dot{\hat{\sigma}}^{11} = \frac{c_{e1}}{1+c_v} (\dot{\epsilon}_{11} + \frac{c_v}{1-2c_v} \Theta g_{11} - \frac{\alpha}{\eta} (g_{11})^2). \quad (34)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}^{11} \hat{\sigma}^{kl} \dot{\epsilon}_{kl} - 2 \sigma^{11} g_{11} \dot{\epsilon}_{11}.$$

Durch Überschoben von (15) mit  $g_{ij}$  ergibt sich

$$\Theta = \sigma^1_1 (1 - 2c_v) / c_{e1}. \quad (35)$$

Aus (29), (33) und (35) kann unter Beachtung der Eigenschaft  $g_{ij} \hat{\sigma}^{ij} = 0$  das Materialgesetz (ZG) für das eindimensionale Modell aufgestellt werden:

$$\dot{\hat{\sigma}}^{11} = [c_{e1} (g^{11})^2 - 2 \sigma^{11} g^{11} - \alpha (c_{e1} - c_T) (g^{11})^2] \dot{\epsilon}_{11}. \quad (36)$$

Ausgehend von der Differentialgleichung (36) erkennt man, daß die Größen  $c_{e1}$  und  $c_T$  aus dem  $\sigma^1_1 - \tilde{\epsilon}^1_1$ -Diagramm zu ermitteln sind. Mit der natürlichen Verzerrung  $\tilde{\epsilon}^1_1$  (vgl. (6)) ergibt sich:

$$\dot{\sigma}^1_1 = (c_{e1} - \alpha (c_{e1} - c_T)) g^{11} \dot{\epsilon}_{11}$$

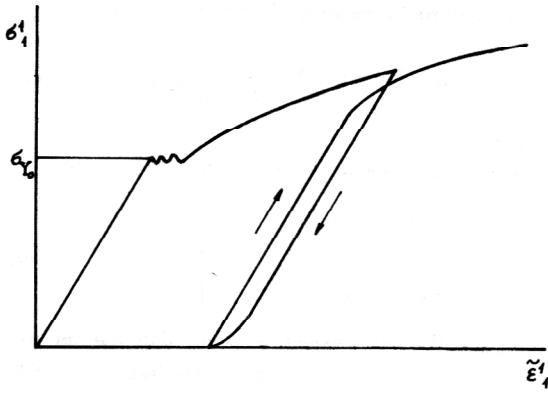
$$= (c_{e1} - \alpha (c_{e1} - c_T)) \tilde{\epsilon}^1_1,$$

$$\alpha = 0: \dot{\sigma}^1_1 = c_{e1} \tilde{\epsilon}^1_1, \alpha = 1: \dot{\sigma}^1_1 = c_T \tilde{\epsilon}^1_1. \quad (37)$$

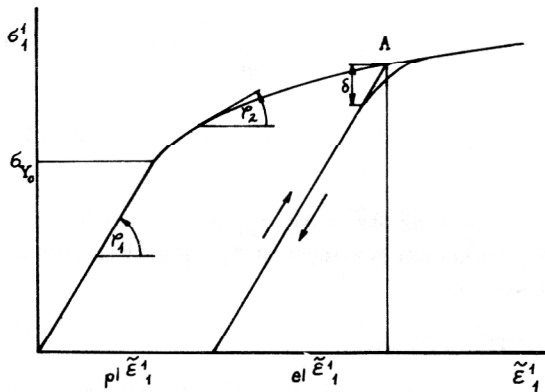
Das  $\sigma^1_1 - \tilde{\epsilon}^1_1$ -Diagramm kann aus dem  $C \sigma^1_1 - \tilde{\epsilon}^1_1$ -Diagramm (vgl. [3], [4]) unter Beachtung von  $\sigma^1_1 \approx C \sigma^1_1$  abgeleitet werden. Experimentell läßt sich dabei die Aufspaltung der logarithmischen Dehnung in den elastischen und plastischen Anteil ermitteln:

$$\tilde{\epsilon}^1_1 = e^1 \tilde{\epsilon}^1_1 + p^1 \tilde{\epsilon}^1_1,$$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}^1_1 = g^{11} (e^1 \dot{\epsilon}_{11} + p^1 \dot{\epsilon}_{11}).$$



**Bild 3.1**  
Experimentelles Spannungs-Verzerrungs-Diagramm



**Bild 3.2**  
Idealisiertes Spannungs-Verzerrungs-Diagramm

Es ist möglich, den bei Ent- und erneuter Belastung experimentell gemessenen Kurvenverlauf (vgl. Bild 3.1) durch Einführung eines Regularisierungsparameters  $\delta$  mathematisch zu modellieren (vgl. [4]). Dabei erfolgt der Übergang bei erneuter Belastung nicht als „Knick“ wie im Punkt A im Bild 3.2, sondern kontinuierlich.

Einige Autoren benutzen ein  $\sigma^1_1 - \epsilon_C$ -Diagramm, wobei  $\epsilon_C$  die konventionelle (ingenieurmäßige) Verzerrung von Cauchy darstellt:

$$\epsilon_C := (1 - L)/L = \exp(\tilde{\epsilon}^1_1) - 1. \quad (38)$$

Ausgehend vom Bild 3.2 ergibt sich dieses Diagramm durch die entsprechende Transformation des Arguments. Häufig vernachlässigt man die dabei entstehenden Effekte (z. B. verläuft die Entlastungskurve nicht mehr parallel zur elastischen Kurve).

Aus (33) kann man bei spezieller Wahl von  $m, n$  ( $m = n = 2$  bzw.  $m = n = 3$ ) die Querkontraktionsbedingungen ermitteln:

$$\left. \begin{aligned} g^{nn} \dot{\epsilon}_{nn} &= (-c_p + \alpha c_Q) g^{11} \dot{\epsilon}_{11}. (\Sigma_n) \\ \text{bzw. } \tilde{\epsilon}^n_n &= (-c_p + \alpha c_Q) \tilde{\epsilon}^1_1. \\ c_Q &:= -(1 - c_T/c_e)(1 - 2c_p)/2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Alle anderen Beziehungen von Abschnitt 1 sind formal auf den eindimensionalen Fall übertragbar. Das erfolgt in der Zusammenfassung des 1D-Modelles:

$$\text{Metrik: } g_{ii} = (1 + U'_i)^2, (\dot{X}_i), g_{ij} = 0, i \neq j,$$

$$\text{Verzerrungen: } \epsilon_{ii} = U'_i(2 + U'_i)/2, (\dot{X}_i), \epsilon_{ij} = 0, i \neq j,$$

$$\text{Deformationsgeschwindigkeiten: } \dot{\epsilon}_{ii} = \dot{U}'_i(1 + U'_i), (\dot{X}_i),$$

$$\text{Forderungen an den Deformationsprozeß: } U'_i \geq -1,$$

$$J \approx 1, \dot{J} \approx 0,$$

$$\text{Spannungen: } \sigma^{11} = J_C \sigma^{11}, \sigma^{ij} = 0, \text{ wenn } i, j \neq 1,$$

$$\text{Kräftegleichgewicht in } (0, L): -([\sigma^{11}(1 + U'_1)]')' = 0,$$

$$\text{natürliche Randbedingung in } X^1 = 1: \dot{P}^1 = (\sigma^{11}(1 + U'_1))',$$

$$\text{geometrische (homogene) Randbedingungen in } X^1 = 0:$$

$$U_1 = 0,$$

$$\text{Variationsaufgabe: Gesucht wird } U_1 \text{ aus } \underline{U} = \{U/U(0) = 0\}$$

so daß für alle  $V_1$  aus  $\underline{U}$  folgende Identität erfüllt ist:

$$\int_0^1 (\dot{\sigma}^{11}(1 + U'_1) + \sigma^{11} \dot{U}'_1) V'_1 dL = \dot{P}^1 V_1(1).$$

$$\text{Aufspaltung von } \dot{\epsilon}_{ij}: \dot{\epsilon}_{ij} = e_l \dot{\epsilon}_{ij} + p_l \dot{\epsilon}_{ij},$$

$$\text{FB: } \underline{F}(\sigma^{11}, \kappa; g_{11}) = \sigma_V - H(\kappa), H(\kappa) := \kappa,$$

$$\text{VG: } \dot{\kappa} = p_l \dot{\epsilon}_{ij} = (2/3 p_l \dot{\epsilon}_{ij} p_l \dot{\epsilon}_{ij})^{0,5},$$

$$\text{ZG: } \dot{\sigma}^{11} = (c_{e1}(g^{11})^2 - 2\sigma^{11} g^{11} - \alpha(c_{e1} - c_T)(g^{11})^2) \dot{\epsilon}_{11},$$

$$\text{FG: } p_l \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \partial F / \partial \sigma^{ij}, \lambda \geq 0.$$

### 3. Verallgemeinerung des Modelles

Die Grundgleichungen der Kinematik und Statik werden in der gleichen Form wie im Abschnitt 1 beibehalten, dagegen wollen wir uns von einigen Annahmen bezüglich der Materialgleichungen lösen. Die reguläre (und konvexe) FB sei nun durch eine beliebige Funktion gegeben, die von  $\sigma^{ij}$ , dem internen Parameter  $\tilde{\kappa}$  und  $g_{ij}$  abhängt:

$$\underline{F} = \underline{F}(\sigma^{ij}, \tilde{\kappa}; g_{ij}) = 0. \quad (40)$$

$\tilde{\kappa}$  kann eine skalare, vektorielle oder tensorielle Größe sein (vgl. [4], [13]), die in Kompaktschreibweise dargestellt ist. Der Parameter  $\tilde{\kappa}$  erfüllt das VG:

$$\dot{\tilde{\kappa}} = \lambda r(\sigma^{ij}, \tilde{\kappa}; g_{ij}), \lambda \geq 0. \quad (41)$$

Die Abhängigkeit in (40) und (41) von  $\sigma^{ij}$  und  $g_{ij}$  entsteht bei vorausgesetztem isotropen Materialverhalten mittelbar durch die Invarianten  $\sigma^I = g_{ij} \sigma^{ij}$  bzw.  $\hat{\sigma}^{\mathbf{II}} = g_{ik} g_{jl} \cdot \hat{\sigma}^{ij} \hat{\sigma}^{kl} / 2$ . Bezüglich des betrachteten Materials wird erneut angenommen, daß  $J \approx 1, j \approx 0$  und

$$\dot{\epsilon}_{ij} = e_l \dot{\epsilon}_{ij} + p_l \dot{\epsilon}_{ij} \quad (42)$$

gelten. Der plastische Anteil sei durch ein assoziiertes FG definiert, in dem die skalare Funktion  $\lambda$  auftritt:

$$p_l \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda q_{ij}, q_{ij} := \partial \underline{F} / \partial \sigma^{ij}. \quad (43)$$

Aus (40) erhält man die Konsistenzbedingung für isotropes Material:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{F}} &= q_{ij} \dot{\sigma}^{ij} + \partial \underline{F} / \partial g_{ij} \dot{g}_{ij} + \partial \underline{F} / \partial \tilde{\kappa} \cdot \dot{\tilde{\kappa}} \\ &= q_{ij} \dot{\sigma}^{ij} + q_{\tilde{\kappa}} \dot{\tilde{\kappa}}, q_{\tilde{\kappa}} := \partial \underline{F} / \partial \tilde{\kappa}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Bezüglich der ZG wird zunächst ein Zusammenhang der Form

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{ij} &= D^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}, D^{ijkl} = D^{klij} = D^{ijkl}(\sigma^{ij}, \tilde{\kappa}, \\ &\alpha(\sigma^{ij}, \tilde{\kappa}, \dot{\sigma}^{ij}); g_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

angenommen, wobei  $\alpha$  die bekannte Sprungfunktion darstellt (vgl. (23)). Ist für den elastischen Anteil  $e_l \dot{\epsilon}_{ij}$  und  $\dot{\sigma}^{ij}$  die Beziehung

$$\dot{\sigma}^{ij} = \tilde{D}^{ijkl} e_l \dot{\epsilon}_{kl}, \tilde{D}^{ijkl} = \tilde{D}^{klij} \quad (46)$$

bekannt, erhält man daraus die ZG (45). Zunächst ermittelt man für  $\alpha = 1$  unter Beachtung von (42), (43), (44) und (23):

$$\lambda = q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} / (q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} q_{kl} - q \tilde{\kappa} r). \quad (47)$$

Bei beliebiger Belastung liefert die entsprechende Substitution:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^{ij} &= (\tilde{D}^{ijkl} - \alpha \tilde{D}^{ijov} q_{ov} q_{mn} \tilde{D}^{mnlk} / (q_{ij} \tilde{D}^{ijov} q_{ov} - q \tilde{\kappa} r) \\ &- (g^{ik} \sigma^{jl} + g^{jk} \sigma^{il} + g^{il} \sigma^{jk} + g^{jl} \sigma^{ik}) / 2) \dot{\epsilon}_{kl}. \end{aligned} \quad (48)$$

Eine zentrale Rolle bei mathematischen Untersuchungen spielt die „sign-Eigenschaft“ (vgl. [4]). Sie gestattet es, in der Funktion  $\alpha$  anstelle  $q_{ij} \dot{\sigma}^{ij}$  die Größe  $q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$  zu benutzen:

$$\text{sign}(q_{ij} \dot{\sigma}^{ij}) = \text{sign}(q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}). \quad (49)$$

Dabei wird außer der Symmetrie zusätzlich die Positivität des Stofftensors vorausgesetzt, d. h., für einen beliebigen symmetrischen zweistufigen Tensor  $Q$  mit den Komponenten  $q_{ij}$  gilt die Ungleichung  $q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} q_{kl} \geq 0$ . Zum Beweis von (49) ist eine Fallunterscheidung notwendig. Für  $q_{ij} \dot{\sigma}^{ij} < 0$  (Entlastung) erhält man  $\dot{\epsilon}_{ij} = e_l \dot{\epsilon}_{ij}$  und (49) folgt aus (46). Falls  $\underline{F} = 0$  und  $q_{ij} \dot{\sigma}^{ij} = 0$  erfüllt sind (neutrale Belastung), ergibt sich (49) wie im ersten Fall ( $\tilde{\kappa} = 0$ ). Tritt aktive Belastung auf ( $q_{ij} \dot{\sigma}^{ij} > 0$ ,  $\underline{F} = 0$ ), erhält man (49) unter Ausnutzung der Positivität des Stofftensors:

$$q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = q_{ij} \dot{\sigma}^{ij} + \lambda q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} q_{kl} \geq q_{ij} \dot{\sigma}^{ij} > 0.$$

Bemerkenswert ist, daß viele der bekannten Stofftensoren noch bessere Eigenschaften als die für (49) geforderte Positivität besitzen. Zum Beispiel sind sie oft positiv definit, d. h., für einen beliebigen zweistufigen symmetrischen Tensor  $Q$  gilt:

$$q_{ij} \tilde{D}^{ijkl} q_{kl} \geq \tilde{c} q_{ij} q^{ij}, \tilde{c} = \text{konst.}, \tilde{c} > 0. \quad (50)$$

Eine Abschätzung dieser Art kann z. B. für die Elastizitätstensoren in kartesischen bzw. krummlinigen Koordinaten des Ausgangszustandes

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{ijkl} &= \frac{c_{e1}}{1+c_\nu} (0,5(\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \\ &+ \frac{c_\nu}{1-2c_\nu} \delta^{ij} \delta^{kl}), \\ \tilde{D}^{ijkl} &= \frac{c_{e1}}{1+c_\nu} (0,5(G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk}) + \frac{c_\nu}{1-2c_\nu} G^{ij} G^{kl}) \end{aligned} \quad (51)$$

gezeigt werden (überschiebt man (51) mit  $q_{ij} q_{kl}$ , ist als Konstante in (50) z. B. die Größe  $c_{e1}/(1+c_\nu)$  wählbar).

Analog läßt sich die positive Definitheit des Stofftensors der geometrisch-nichtlinearen Elastizitätstheorie

$$\tilde{D}^{ijkl} = \frac{c_{e1}}{1+c_\nu} (0,5(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \frac{c_\nu}{1-2c_\nu} g^{ij} g^{kl}) \quad (52)$$

nachweisen.

Unter Berücksichtigung von (49) erhält man aus (45):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}^{ij} &= D^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}, D^{ijkl} = D^{ijkl}(\sigma^{ij}, \tilde{\kappa}, \\ &\alpha(\sigma^{ij}, \tilde{\kappa}, \dot{\epsilon}_{ij}; g_{ij}); g_{ij}). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Zum Schluß soll noch gezeigt werden, daß die im Abschnitt 1 vorgestellte Theorie ein Spezialfall des verallgemeinerten Modelles darstellt. Zunächst erhält man für die FB (20):

$$q_{ij} = \partial \underline{F} / \partial \sigma^{ij} = 3 \sigma_{ij} / (2 \sigma_V), r = 1. \quad (54)$$

Für den Stofftensor (52) ergeben sich die Gleichungen

$$\tilde{D}^{ijov} q_{ov} q_{mn} \tilde{D}^{mnlk} = \left[ \frac{3c_{e1}}{2\sigma_V(1+c_\nu)} \right]^2 \hat{\sigma}^{ij} \hat{\sigma}^{kl}, \quad (55)$$

$$q_{mn} \tilde{D}^{mnlk} q_{kl} = \frac{3c_{e1}}{2(1+c_\nu)} = 3c_{\mu}, c_{\mu} = c_{e1} / (2(1+c_\nu)). \quad (56)$$

Die Größe  $q_{\tilde{\kappa}} = \partial \underline{F} / \partial \tilde{\kappa} = \partial \underline{F} / \partial p_l \in V$  kann aus dem vom  $\sigma_{11}^1 - e_{11}^1$ -Diagramm gewonnenen  $\sigma_V - p_l \in V$ -Diagramm ermittelt werden:

$$q_{\tilde{\kappa}} = -c_T / (1 - c_T / c_{e1}). \quad (57)$$

Die Substitution von (54) bis (57) in (53) liefert die ZG (15).

## LITERATUR

- [1] Green, A. E.; Adkins, J. E.: Large Elastic Deformations. At the Clarendon Press, Oxford 1960.
- [2] Truesdell, C.; Noll, W.: The Non-linear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik Bd. III/3:
- [3] Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1964.
- [4] Korneev, V. G.; Langer, U.: Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems. Teubner-Texte zur Mathematik Bd. 69, Leipzig 1984.
- [5] Günther, H.: Finite Deformationen. Wissenschaftliche Beiträge der Ingenieurhochschule Zwickau, 1983.
- [6] Черных К. Ф.: Введение в механику сплошных сред. изд. ЛГУ, 1984.
- [7] Lehmann, Th.: General Frame for the Definition of Constitutive Laws for Large Non-isothermic Elastic-plastic and Elastic-visco-plastic Deformations. The Constitutive Law in Thermoplasticity (ed. by Lehmann Th.). CISM Courses and Lectures No. 281, Springer Verlag, Wien - New York, 1984, pp. 379 - 464.
- [8] Thermann, K.: Foundations of Large Deformations. The Constitutive Law in Thermoplasticity (vgl. [7]), pp. 323 - 352.
- [9] Chen, W. H.: Necking of a bar. Int. J. Solids Struct. 7, 1971, pp. 685 - 717.
- [10] Hutchinson, J. W.: Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures. Numerical solution of nonlinear structural problems (ed. by Hartung R. F.), AMD vol. 6, New York 1973, pp. 17 - 29.

- [11] Günther, H.; Drey, K.; Strobel, W.: Plastizitätstheoretische Untersuchungen von Umformungsvorgängen mit der Methode der Finiten Elemente. Technische Mechanik 1 (1980), S. 63 – 68.
- [12] Lehmann, Th.: Einige Aspekte der Thermoplastizität. GAMM-Tagung 1983, Bd. 63, S. 3 – 13.
- [13] Bergander, H.: Plastische Stoffgesetze in differentieller Standardformulierung. ZAMM 60, 1980, S. 509 – 519.
- [14] Bergander, H.: Das Prinzip von Hill für den homogenen Zugstab. Vortrag im Wissenschaftsbereichsseminar der Sektion Maschinen-Bauelemente der TH Karl-Marx-Stadt (unveröffentlicht).
- [15] Ciarlet, P. G.: Lectures on Three-dimensional Elasticity. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1983.
- [16] Lee, E. H.: Elastic-plastic deformations at finite strains. J. Appl. Mech., vol. 36, 1969, pp. 1 – 6.
- [17] Nemat-Nasser, S.: Decomposition of Strain Measures and their Rates in Finite Deformation Elasto-plasticity. Int. J. Solids Struct. 15, 1979, pp. 155 – 166.
- [18] Siegert, J.: Modellierung und Lösung geometrisch-nicht-linearer Probleme mit der Methode der Finiten Elemente. Dissertation A, TH Karl-Marx-Stadt 1981.
- [19] Tamme, A.: Ein Konzept zur formalen Beschreibung der Grundaufgaben der Strukturmechanik im elastischen und elastisch-plastischen Materialbereich. Untersuchungen der funktionalanalytischen Eigenschaften und der Finite Elemente Approximation. Forschungsbericht des Lehrstuhls Numerische Mathematik II der Sektion Mathematik der TH Karl-Marx-Stadt 1985.