TECHNISCHE MECHANIK 6 (1984) Heft 1
Manuskripteingang: 31. 1. 1984

Zur Stabilität großer elastisch-plastischer Verformungen[1)]

Herbert Balke

0. Einleitung

Spezielle statisch beanspruchte Konstruktionselemente können in die Situation kommen, einer zusätzlichen mechanischen Belastung auszuweichen, und damit im technischen Sinne instabil werden. Oft ist es möglich, den Instabilitätspunkt durch die Lösung eines Verzweigungsproblems zu bestimmen. Für die inkrementell benachbarte Gleichgewichtslage wird dann ein inkrementelles Spannungsverzerrungsgesetz benötigt. Dieses muß in einer objektiven Form vorliegen. Im isotropen elastisch-plastischen Fall läuft das auf eine Erweiterung der Prandtl-Reußschen Gleichungen hinaus. Die genaue Herleitung einer solchen Erweiterung wird gegenwärtig noch diskutiert (z. B. [1], [2], [3]). Jedoch ist zu erwarten, daß sich die verschiedenen Ergebnisse, wenn sie wie bei elastischen Verzweigungsproblemen auf kleine elastische Verzerrungen beschränkt bleiben, nur um Terme einer höheren Ordnung unterscheiden sollten. Es entsteht die Frage, ob diese Terme den Verzweigungspunkt wesentlich beeinflussen. In [4] wird einer Antwort darauf durch Verwendung verschiedener Spannungsgeschwindigkeitsdefinitionen in einem inkrementellen konstitutiven Ansatz ohne Angabe der dazugehörigen Fließspannungsbedingungen nachgegangen. Das Ergebnis ist deshalb bezüglich des Grundzustandes schwierig zu interpretieren; die Benutzung des angegebenen Ansatzes für mehrachsige Grundspannungszustände bleibt unklar. Die vorliegende Arbeit versucht, diese Schwierigkeiten zu umgehen. Hierzu wird eine Materialklassendefinition nach [5] übernommen und wie in [4] die Diskussion der verschiedenen konstitutiven Annahmen am Beispiel des schlanken inkompressiblen Kreiszylinderzugstabes durchgeführt.

Nachfolgend bedeuten halbfette, große lateinische Buchstaben Tensoren zweiter Stufe, halbfette, kleine lateinische Buchstaben Vektoren.

1. Konstitutive Gleichungen

Die Prandtl-Reußschen Gleichungen für inkompressibles Material mit isotroper Verfestigung lauten:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \tag{1.1}$$

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2G}\,\dot{\mathrm{S}} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{D}^p = \frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{S}\,\dot{\mathbf{T}})}{H'\,\mathrm{tr}(\mathrm{S}^2)}\cdot \mathrm{S}, \quad \sigma_v = (\sigma_v)_{max} \text{ und } \dot{\sigma}_v > 0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{D}^p = 0\cdot\mathbf{I} \quad , \quad \sigma_v < (\sigma_v)_{max} \text{ oder } \dot{\sigma}_v \leqslant 0\,.$$

Dabei bedeuten:

D – Deformationsgeschwindigkeit, symmetrischer Teil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten **L**,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)\,, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{D} = 0\,, \tag{1.4}$$

$\mathbf{L}^T$ – Transponierte zu **L**, $\mathrm{tr}\,\mathbf{D}$ – Spur von **D**,

T – Spannungstensor,

S – Spannungsdeviator, $\mathrm{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}\,\mathbf{I}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}$,

I – Einheitstensor,

σ_v – Vergleichsspannung, $\sigma_v^2 = \frac{3}{2}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{S}^2)$,

H′ – plastischer Modul, Anstieg der Spannung über der plastischen Dehnung, $H' > 0$,

G – elastischer Schubmodul,

$(\ )^{\cdot}$ – Zeitableitung,

$\mathrm{S}\dot{\mathbf{T}}$ – $S^k_n\, T^n_l$ in raumfesten Koordinaten x^k.

Die Mises'sche Fließbedingung hängt gemäß

$$\sigma_v = H(\epsilon_v^p)\ , \quad H' = \frac{dH}{d\epsilon_v^p}\,. \tag{1.5}$$

$$(\dot{\epsilon}_v^p)^2 = \frac{2}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{D}^{p2}) \tag{1.6}$$

von der plastischen Vergleichsdehnung ϵ_v^p ab. In einer möglichen formalen Verallgemeinerung von (1.1), ..., (1.6) auf große Verformungen (eine exakte finite Kinematik (s. z. B. [1], [2]) bleibt hier unberücksichtigt) ist die wahre Spannung zu benutzen, der plastische Modul als Anstieg der wahren Spannung über der logarithmischen plastischen Dehnung zu nehmen und die Zeitableitung der Spannung durch die objektive Jaumann-Ableitung

$$\overset{*}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T} \tag{1.7}$$

zu ersetzen, wo der Punkt die materielle Zeitableitung und **W** die antimetrische Drehgeschwindigkeit

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \tag{1.8}$$

bedeuten. Wegen

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{S}\overset{*}{\mathbf{T}}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{S}\dot{\mathbf{T}}) \tag{1.9}$$

(S und **T** haben gleiche Hauptachsen) betrifft die Einführung der Jaumann-Ableitung nur den elastischen Deformationsgeschwindigkeitsanteil. Statt dieser können auch andere objektive Zeitableitungen $\tilde{\mathbf{T}}$ der Spannung gebildet werden [5]. Der allgemeinste in **T** und **D** bilineare Ausdruck lautet

$$\tilde{\mathbf{T}} = \overset{*}{\mathbf{T}} + \overset{o}{\mathbf{Z}} \tag{1.10}$$

$$\overset{o}{\mathbf{Z}} = \alpha(\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}) + \gamma\,\mathbf{D}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T} + \delta\,\mathbf{I}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}\mathbf{T})\,. \tag{1.11}$$

1) Erweiterte Fassung des auf dem 1. Mechanik-Kongreß der DDR, 31. 10. – 4. 11. 83 in Karl-Marx-Stadt, gehaltenen Vortrages.

Die konstanten Parameter α, γ, δ sollen die Größenordnung von eins haben. Einsetzen von (1.7), (1.10), (1.11) in (1.2) liefert mit Invertierung von (1.1), ..., (1.3)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf T} &= 2G\left\{\mathbf D - \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{DS}) - (1/2G)\cdot\operatorname{tr}(\overset{\circ}{\mathbf Z}\mathbf S)}{(1+\frac{H'}{3G})\operatorname{tr}(\mathbf S^2)}\,\mathbf S\right\}\\ &\quad + \frac13\mathbf I\operatorname{tr}\dot{\mathbf T} - \mathbf{TW} + \mathbf{WT} - \overset{\circ}{\mathbf Z} + \frac13\mathbf I\operatorname{tr}\overset{\circ}{\mathbf Z}\\ &\operatorname{tr}(\mathbf{SD}) - \frac{1}{2G}\operatorname{tr}(\overset{\circ}{\mathbf Z}\mathbf S) > 0\,.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Hier tritt δ nicht mehr auf.

2. Verzweigungsbedingung

Für das Innere eines Körpers im deformierten Grundzustand lautet die lokale inkrementelle Gleichgewichtsbedingung in räumlichen Koordinaten x^k

$$\dot T_{G\ l}^{\ k}\Big|_k = 0\,, \tag{2.1}$$

$\dot{\mathbf T}_G = \dot{\mathbf T} - \mathbf{LT}$ — Nennspannungsgeschwindigkeit im Grundzustand, $(\quad)|_k$ — kovariante Ableitung. Auf der Oberfläche des Körpers seien entweder Komponenten der richtungstreuen Oberflächenkraftgeschwindigkeit $\dot{\mathbf f}_o$.

$$\dot{\mathbf T}_G^T\,\mathbf n = \dot{\mathbf f}_o \tag{2.2}$$

($\mathbf n$ — zeitlich konstante Flächeneinheitsnormale im Grundzustand) oder der Geschwindigkeit $\mathbf v_o$

$$\mathbf v = \mathbf v_o \tag{2.3}$$

vorgegeben. Eine von der eindeutigen Grundlösung abzweigende Lösung erfüllt dann die Gleichungen (2.1), in der $\dot{\mathbf T}_G$ mit (1.11), (1.12) die Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf T}_G &= 2G\left\{\mathbf D - \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{DS}) - \frac{1}{2G}\operatorname{tr}(\overset{\circ}{\mathbf Z}\mathbf S)}{(1+\frac{H'}{3G})\operatorname{tr}(\mathbf S^2)}\,\mathbf S\right\}\\ &\quad + \frac13\mathbf I\operatorname{tr}\dot{\mathbf T} - \mathbf{DT} - \mathbf{TW} - \overset{\circ}{\mathbf Z} + \frac13\mathbf I\operatorname{tr}\overset{\circ}{\mathbf Z}\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf Z} = \alpha(\mathbf{TD} + \mathbf{DT}) + \gamma\,\mathbf D\operatorname{tr}\mathbf T$$

annimmt, und die homogenen Randbedingungen

$$\dot{\mathbf T}_G^T\,\mathbf n = \mathbf 0 \tag{2.5}$$

$$\mathbf v = \mathbf 0 \tag{2.6}$$

($\mathbf 0$ — Nullvektor).

3. Kreiszylinderstab unter einachsigem Zug

Für den durch die axiale Zugspannung σ belasteten kreiszylindrischen Zugstab gilt in den orthogonalen Zylinderkoordinaten $x^1, x^2, x^3 = r, \varphi, z$

$$T^k_l = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \sigma\end{pmatrix}, \quad S^k_l = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\frac{\sigma}{3}, \quad \operatorname{tr}\mathbf T = \sigma. \tag{3.1}$$

Es werden nur rotationssymmetrische, d. h. von der Umfangskoordinate φ unabhängige, Verzweigungsmoden zugelassen. Dann folgt

$$D^k_l = \begin{pmatrix} v_{1,1} & 0 & \frac12(v_{1,3}+v_{3,1})\\ 0 & \frac{v_1}{x^1} & 0\\ \frac12(v_{3,1}+v_{1,3}) & 0 & v_{3,3}\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$W^k_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac12(v_{1,3}-v_{3,1})\\ 0 & 0 & 0\\ \frac12(v_{3,1}-v_{1,3}) & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$(\quad)_{,i}$ mit $i = 1,3$ bezeichnet die partielle Abteilung nach x^1, x^3. (3.1), ..., (3.3) in (2.4), (2.1) liefert mit den Definitionen

$$\begin{gathered} v_1 = u,\quad v_3 = w,\quad (\quad)_{,1} = (\quad)',\quad (\quad)_{,3} = (\quad)^+\\ q = \frac{\sigma}{2G},\quad -\frac{\operatorname{tr}\dot{\mathbf T}}{6G} = \dot p,\quad \frac{H'}{3G} = \eta\end{gathered}\tag{3.4}$$

zwei homogene partielle Differentialgleichungen

$$\begin{gathered}(1-\gamma q)\left(u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2}\right) + [1 + q(1-\alpha-\gamma)]u^{++}\\ + \left\{\frac{1}{1+\eta}\left[1 - q\left(\frac43\alpha+\gamma\right)\right] - \left(1 - \frac13\alpha\right)q\right\}w^{+\prime} - 2\dot p' = 0\\ [1 - q(1+\alpha+\gamma)]w''\\ + \left\{1 - \left(1+\gamma+\frac53\alpha\right)q - \frac{2}{1+\eta}\left[1 - q\left(\frac43\alpha+\gamma\right)\right]\right\}w^{++}\\ + [1 - (1+\alpha+\gamma)q]\frac{w'}{r} - 2\dot p^+ = 0\end{gathered}\tag{3.5}$$

(der hier verwendete Ableitungsstrich sollte nicht mit dem Strich bei H' verwechselt werden). Für den unbekannten Druckzuwachs $\dot p$ existiert noch die Inkompressibilitätsbedingung

$$D^k_k = u' + \frac{u}{r} + w^+ = 0. \tag{3.6}$$

Die Flächeneinheitsnormale n_k hat bei $z = 0$ und $z = l$ (l — aktuelle Länge des Stabes) die Komponenten $(0, 0, -1)$ bzw. $(0, 0, 1)$ und an der Mantelfläche $r = a$ (a — aktueller Stabradius) die Komponenten $(1, 0, 0)$. Die Stabenden sollen verwölbungsfrei und der Stabmantel kräftefrei bleiben. Dann lauten die Randbedingungen (2.5), (2.6) unter Berücksichtigung von (2.4), (3.1), ..., (3.3) bei $z = 0, l$

$$v_3 = w = 0 \tag{3.7}$$

$$\dot T^k_{G\,s}\,n_k = \dot T^3_{G\,1} = 0$$

bzw. $[1 + (1-\alpha-\gamma)q]u^+ + [1 - (1+\alpha+\gamma)q]w' = 0$

und bei $r = a$

$$\dot T^k_{G\,s}\,n_k = \dot T^1_{G\,s} = 0\,,\quad s = 1,3$$

bzw.

$$\begin{gathered}(1-\gamma q)u' + \left\{\frac{1}{2(1+\eta)}\left[1 - \left(\frac43\alpha+\gamma\right)q\right] + \frac23\alpha q\right\}w^+ - \dot p = 0\\ u^+ + w' = 0.\end{gathered}\tag{3.8}$$

Ein Ansatz, der (3.5), (3.6) und (3.7) erfüllt, ist

$$u = f(r)\cos\nu z,\quad w = g(r)\sin\nu z,\quad \dot p = h(r)\cos\nu z$$
$$\nu = \frac{n\pi}{l},\quad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.9}$$

Er reduziert (3.5), (3.6) auf

$$\begin{aligned}&(1-\gamma p)(f''+\frac{f'}{r}-\frac{f}{r^2})-\nu^2[1+q(1-\alpha-\gamma)]f\\&+\nu\left\{\frac{1}{1+\eta}[1-(\tfrac{4}{3}\alpha+\gamma)q]-(1-\frac{\alpha}{3})q\right\}g'-2h'=0\\&[1-(1+\alpha+\gamma)q]g''\\&-\nu^2\left\{1-(1+\tfrac{5}{3}\alpha+\gamma)q-\frac{2}{1+\eta}[1-(\tfrac{4}{3}\alpha+\gamma)q]\right\}g+\\&+[1-(1+\alpha+\gamma)q]\frac{g'}{r}+2\nu h=0\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$f'+\frac{f}{r}+\nu g = 0 \tag{3.11}$$

und (3.8) auf

$$\begin{aligned}&r=a:\qquad -\nu f+g'=0\\&(1-\gamma q)f'+\left\{\frac{1}{2(1+\eta)}[1-(\tfrac{4}{3}\alpha+\gamma)q]+\frac{2}{3}\alpha q\right\}\nu g-h=0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Auflösung nach f liefert mit den Abkürzungen

$$\zeta=\frac{r}{a},\quad (\ )'=(\ )_{,\zeta}\cdot\frac{1}{a},\quad Lf=\left(\frac{f}{\zeta}\right)_{,\zeta}+f_{,\zeta\zeta},$$

$$a\nu=\omega=\frac{n\pi a}{l},\quad n=1,2,3,\ldots \tag{3.13}$$

die Dgl.

$$L^2f+\frac{\frac{3}{1+\eta}[1-(\frac{4}{3}\alpha+\gamma)q]-2[1-(\alpha+\gamma)q]}{1-(1+\alpha+\gamma)q}\,\omega^2Lf+\frac{1+(1-\alpha-\gamma)q}{1-(1+\alpha+\gamma)q}\,\omega^4 f=0 \tag{3.14}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}\zeta=1:\ &f_{,\zeta\zeta}+f_{,\zeta}+(\omega^2-1)f=0\\&[1-(1+\alpha+\gamma)q][-f_{,\zeta\zeta\zeta}-2f_{,\zeta\zeta}+f_{,\zeta}-f]\\&+\omega^2\left\{1-(1+3\alpha+\gamma)q-\frac{3}{1+\eta}[1-(\tfrac{4}{3}\alpha+\gamma)q]\right\}(f_{,\zeta}+f)\\&+2\omega^2(1-\gamma q)f_{,\zeta}=0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Die allgemeine Lösung von (3.14) ist [4], [6]

$$f=CJ_1(\omega\rho\zeta)+\bar CJ_1(\omega\bar\rho\zeta) \tag{3.16}$$

mit

$$\rho^2+\bar\rho^2=\frac{\frac{3}{1+\eta}[1-(\frac{4}{3}\alpha+\gamma)q]-2[1-(\alpha+\gamma)q]}{1-(1+\alpha+\gamma)q},$$

$$\rho^2\bar\rho^2=\frac{1+(1-\alpha-\gamma)q}{1-(1+\alpha+\gamma)q},$$

J_1 – komplexe Besselfunktion erster Ordnung, C – Integrationskonstante, $(\bar{\ })$ – zu ( ) konjugiert komplexe Größe. Sie erfüllt die Randbedingungen (3.15), wenn der Imaginärteil Im ( ) der Gleichung

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\Big\{(1-\bar\rho^2)[(m\rho^2+k)\omega\rho J_1(\omega\bar\rho)J_o(\omega\rho)\\&-2(1-\gamma q_c)J_1(\omega\rho)J_1(\omega\bar\rho)]\Big\}=0\\&m=1-(1+\alpha+\gamma)q_c,\\&k=1-(1+3\alpha+\gamma)q_c-\frac{3}{1+\eta}[1-(\tfrac{4}{3}\alpha+\gamma)q_c]+2(1-\gamma q_c)\end{aligned} \tag{3.17}$$

in der kritischen Verzweigungsspannung $\sigma_c = 2\,G\,q_c$ genügt. Für schlanke Stäbe und kleine Frequenzen der Verzweigungsmoden (deren Amplituden seien hinreichend klein angenommen, so daß die Summe von Grund- und Verzweigungslösung die Belastungsbedingung in (1.12) befriedigt), d. h.

$$\omega^2 \ll 1, \tag{3.18}$$

werden die Reihenentwicklungen [6]

$$\begin{aligned}&\omega\rho J_1(\omega\bar\rho)J_o(\omega\rho)=\omega^2\rho\bar\rho\\&[\frac{1}{2}-\frac{\omega^2}{8}(\rho^2+\frac{1}{2}\bar\rho^2)+\frac{\omega^4}{64}(\frac{\rho^4}{2}+\rho^2\bar\rho^2+\frac{\bar\rho^4}{6})\\&-\frac{\omega^6}{512}(\frac{\rho^6}{9}+\frac{\bar\rho^2\rho^4}{2}+\frac{\bar\rho^4\rho^2}{3}+\frac{\bar\rho^6}{36})+\ldots]\\&J_1(\omega\rho)J_1(\omega\bar\rho)=\omega^2\rho\bar\rho\\&\cdot[\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{32}(\rho^2+\bar\rho^2)+\frac{\omega^4}{256}(\frac{\rho^4}{3}+\rho^2\bar\rho^2+\frac{\bar\rho^4}{3})\\&-\frac{\omega^6}{6144}(\frac{\rho^6}{6}+\bar\rho^2\rho^4+\bar\rho^4\rho^2+\frac{\bar\rho^6}{6})+\ldots]\end{aligned} \tag{3.19}$$

verwendet. Nun gilt mit $\rho^2 = A+iB$ und $\bar\rho^2 = A-iB$

$$\begin{aligned}&\rho^2\bar\rho^2 = A^2+B^2,\quad \rho^2+\bar\rho^2 = 2A\\&\rho^4+\bar\rho^4 = 2(A^2-B^2),\quad \rho^6+\bar\rho^6 = 2A(A^2-3B^2).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Außerdem wird die im Sinne der Theorie notwendige Voraussetzung kleiner elastischer Verzerrungen [7] benutzt, die auch für reale Konstruktionsmetalle zutrifft, d. h.

$$q=\frac{\sigma}{2G}\ll 1. \tag{3.21}$$

Da Verzweigungspunkte erst oberhalb

$$\sigma=E_t=\frac{d\sigma}{d\epsilon} \tag{3.22}$$

(ϵ – logarithmische Dehnung in Stabachsrichtung bei einachsigem Zug σ, $\dot\epsilon = D_3^3$) erwartet werden (vgl. z. B. [8]), ist am Verzweigungspunkt auch

$$\frac{E_t}{3G}\ll 1,\quad \eta=\frac{H'}{3G}\ll 1. \tag{3.23}$$

Die Entwicklung von (3.17) in ω^2 wird deshalb nur für lineare Terme in q_c, η und unter der Zusatzvoraussetzung H' = konst. durchgeführt. Sie liefert mit (3.19), (3.20) nach längerer Rechnung

$$\frac{\sigma_c}{H'}=1+\frac{\omega^2}{8}+\frac{G}{H'}\cdot\frac{\omega^4}{192}. \tag{3.24}$$

Die Parameter α, γ treten erst in den reinen, nicht mit G/H' behafteten, ω^2-Termen höherer Ordnung auf. Sie beeinflussen also nicht die maßgeblichen Terme der Verzweigungsbedingung (3.24), ein Ergebnis, welches analog zu [4] ist, wenn in (3.24) H' durch E_t ersetzt wird.

4. Der Grundzustand

(3.1) in (1.12) eingesetzt liefert für den homogenen Grundzustand ($\mathbf{W} = 0 \cdot \mathbf{I}$) im elastisch-plastischen Bereich

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} = E_t = \frac{\eta}{1+\eta}\left(1 - \frac{2\alpha\sigma}{3G} - \frac{\gamma\sigma}{2G}\right) \cdot 3G \tag{4.1}$$

bzw.

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\epsilon}} = E_t = \left(1 - \frac{2\alpha\sigma}{3G} - \frac{\gamma\sigma}{2G}\right) \cdot 3G \tag{4.2}$$

im elastischen Bereich. Die Bestimmungsstücke des Spannungsdehnungsdiagrammes sind der Ursprungsmodul $3G$, der konstante plastische Modul $H' = 3G\eta$, die Parameter α, γ (nach Voraussetzung $|\alpha|$, $|\gamma| \lessapprox 1$) und eine *Fließdehnung* ϵ_y oder -spannung σ_y. Für geringfügig verschiedene α- oder γ-Werte ergeben sich in jedem Fall geringfügig verschiedene Spannungsdehnungsdiagramme. Bei gleichen Werten G, H' verbleibt noch die freie Wahl des Fließpunktes. Diese Willkür kann Abweichungen in den Verzweigungsdehnungen erzeugen. Werden z. B.

$$\alpha_1 = \gamma_1 = 0 \ , \quad \alpha_2 = \gamma_2 = 1$$

und gleiche Fließdehnungen $\epsilon_{y1} = \epsilon_{y2} = \epsilon_y$ vorausgesetzt, so ergibt sich mit (4.2) ein kleiner Unterschied in den Fließspannungen von

$$\sigma_{y1} - \sigma_{y2} = 3G\epsilon_y - \frac{6}{7}\left(1 - e^{-\frac{7\epsilon_y}{2}}\right) G \approx \frac{21}{4}\epsilon_y^2 G \,, \tag{4.3}$$

der im elastisch-plastischen Bereich eine Dehnungsdifferenz von wenigstens

$$\Delta\epsilon = \frac{\sigma_{y1} - \sigma_{y2}}{E_t} \approx \frac{21}{4}\epsilon_y^2 \frac{G}{E_t} \approx \frac{21}{4}\epsilon_y^2 \frac{G}{H'} \tag{4.4}$$

erzeugt. Wird z. B. nach [8] Bild 5 für das Kraftmaximum $n = 0$, $\epsilon \approx 0{,}05$ eines Maragingstahls mit der Spannungsdehnungskennlinie

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} + 7{,}539\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)^{12{,}29} - 7{,}539$$

$$\epsilon_y = 0{,}004652, \quad 3G = 163\,000\ \mathrm{Nmm}^{-2} = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y} \tag{4.5}$$

der Wertesatz

$$\sigma_{max} = E_t \approx H' \approx 800\ \mathrm{Nmm}^{-2}$$

genommen und die Spannungsdehnungskurve mit $\alpha_1, \gamma_1 = 0$ in diesem Punkt durch die Tangente ersetzt, so entsteht mittels (4.4) ein Dehnungsunterschied zum Spannungsdehnungsdiagramm für $\alpha_2 = \gamma_2 = 1$ von etwa

$$\Delta\epsilon \approx \frac{21}{4} \cdot 4{,}7^2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{160\,000}{3 \cdot 800} \approx 0{,}0077 \,,$$

bezogen auf den Dehnungswert $\epsilon \approx 0{,}05$ also ungefähr 15 %. Diese Aussage trifft auch für die unmittelbar neben dem Kraftmaximum liegenden Verzweigungspunkte zu. Die Dehnungsdifferenz verkleinert sich, wenn gleiche Fließspannungen vorausgesetzt werden. Sie vermindert sich weiter für den Fall, daß der Fließbeginn des Diagramms 2 auf der Verfestigungskurve des Diagramms 1 liegt. Ihr Verschwinden ist andererseits nur für verschiedene Fließpunkte möglich. Die nach (3.24) unabhängig von α, γ berechneten gleichen Verzweigungsspannungen gehören demnach zu mehr oder weniger verschiedenen Verzweigungsdehnungen.

(3.24), (4.1) erlauben noch eine andere Interpretation. Der Verzweigungspunkt liege wieder in der Nähe des o. g. Kraftmaximums. Jetzt werden für die beiden in α, γ verschiedenen Materialien gleiche Tangentenmodule E_{tc} im Verzweigungspunkt angenommen. Die Spannungsdehnungskurve des Materials $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ werde im elastisch-plastischen Bereich durch diesen Modul approximiert, die des Materials $\alpha_2 = \gamma_2 = 1$ durch den veränderlichen Modul E_t (4.1), so daß

$$E_{tc} = \frac{\eta_2}{1+\eta_2}\left(1 - \frac{7\sigma_c}{6G}\right) \cdot 3G \,,$$

d. h.

$$E_t = E_{tc}\,\frac{1 - \dfrac{7\sigma}{6G}}{1 - \dfrac{7\sigma_c}{6G}} \cdot 3G$$

gilt. Die plastischen Moduln sind damit

$$\alpha_2 = \gamma_2 = 1: \quad H_2' = \frac{E_{tc}}{1 - \dfrac{7\sigma_c}{6G} - \dfrac{E_{tc}}{3G}} \,.$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 = 0: \quad H_1' = \frac{E_{tc}}{1 - \dfrac{E_{tc}}{3G}} \,.$$

Für $\omega \to 0$ überträgt sich deren Unterschied, der von der Ordnung des Linearisierungsfehlers in der Spannung ist, auf die Verzweigungsspannung (3.24) und erzeugt in positiver Dehnungsrichtung eine Abweichung von etwa

$$\Delta\epsilon \lessapprox \frac{\sigma_{2c} - \sigma_{1c}}{E_{tc}} \approx \frac{H_2' - H_1'}{H_1'} \approx \frac{E_{tc}}{3G} \approx \frac{800}{160\,000} = 0{,}005,$$

bezogen auf den Dehnungswert $\epsilon_c \approx 0{,}05$ also 10 %.

Die Verzweigungsbedingung (3.24) wurde für den besonderen Fall konstanter Verfestigung und schlanker Stäbe abgeleitet. Ein geringfügiger Einfluß von α, γ auf die Verzweigungsspannungen bei veränderlicher Verfestigung und gedrungener Geometrie kann zunächst nicht ausgeschlossen werden. Da eine veränderliche Verfestigung im realen Dehnungsbereich sehr kleine Tangentenmoduln gestattet, werden deshalb auch unter diesen Bedingungen merkliche Unterschiede in den Verzweigungsdehnungen erwartet.

LITERATUR

[1] Lubarda, V. A., Lee, E. H.: A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance, J. Appl. Mech. 48, 35 – 40 (1981).

[2] Nemat-Nasser, S.: Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity. Int. J. Solids Structures, 15, 155 – 166 (1979).

[3] Palgen, L., Drucker, D. C.: The structure of stress-strain relations in finite elasto-plasticity. Int. J. Solids Structures, 19, 519 – 531 (1983).

[4] Hutchinson, J. W., Miles, J. P.: Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic-plastic cylinder under uniaxial tension. J. Mech. Phys. Solids, 22, 61 – 71 (1974).

[5] Spencer, A. J. M., Ferrier, J. E.: Some solutions for a class of plastic-elastic solids, enthalten in: Sawczuk, A., Foundations of plasticity, Leyden 1973.

[6] Ryshik, I. M., Gradstein, I. S.: Tafeln, Berlin 1957.

[7] Balke, H.: Zum Spannungsverzerrungsgèsetz bei hyper- und hypoelastischen Verzweigungsproblemen. ZAMM 62, 241 – 247 (1982).

[8] Balke, H.: Zum Verzweigungsproblem elastisch-plastischer Verbundstäbe. Technische Mechanik 2 (1981) 2, S. 47 – 53.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Herbert Balke
Zentralinstitut für Festkörperphysik und Werkstofforschung
der Akademie der Wissenschaften der DDR

8027 Dresden, Helmholtzstraße 20