

Berechnung viskoelastischer Flächentragwerke im nichtlinearen Bereich

Helge Bergander, Gerd Resche

1. Einleitung

Plastwerkstoffe haben bereits bei Raumtemperatur eine ausgeprägte Kriechneigung. Besonders bei Thermoplasten verstärkt sich diese bei geringen Temperaturerhöhungen (40 – 60 Grad) extrem. Berechnungsverfahren müssen diese Erscheinung berücksichtigen, das theoretische Hilfsmittel ist die Viskoelastizitätstheorie.

Der ökonomische Einsatz aller Werkstoffe, also auch der Plaste, erzwingt zunehmend auch die Nutzung ihrer begrenzten Tragfähigkeit. Gerade hier existiert eine bislang kaum beherrschbare Diskrepanz zwischen dem theoretischen Schwierigkeitsgrad und dem praktischen Nutzen. Die vorliegende Arbeit ist in erster Linie als ein Beitrag zur Überbrückung dieser Kluft aufzufassen.

Klassische Lösungsmethoden der Viskoelastizitätstheorie wie z. B. die Laplace-Transformation haben nicht zur Durchsetzung in der Praxis beigetragen, sondern mehr für eine mehr oder weniger sterile Entwicklung dieser Wissenschaftsdisziplin gesorgt. Die Begründung hierfür liegt im hohen Aufwand zur Lösung von linearen Aufgaben, während das Ergebnis eben infolge der Beschränkung auf Linearität in der Praxis kaum nutzbar ist.

Eine wesentlich bessere Praxisnähe wird nur durch die Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearität erreicht. Diese ist aber ausschließlich mit Hilfe numerischer Methoden möglich. Die dafür erforderlichen Rechenprogramme sind jedoch in der Entwicklung wie auch in der Anwendung teuer. Um hier ökonomische Ergebnisse zu erreichen, müssen die Programme möglichst flexibel hinsichtlich verschiedenartigster Materialeigenschaften, Bauteilformen, Randbedingungen und Belastungen sein. Darüber hinaus sollte stets versucht werden, allgemeingültige Ergebnisse aus durchgeführten Rechnungen abzuheben, um nicht für jedes Einzelproblem eine erneute Durchrechnung zu benötigen.

Im folgenden wird ein Programm vorgestellt, das die genannten Forderungen im weitesten Sinne erfüllt. Im Rahmen der gründlichen Erprobung wurde ein einfaches Flächentragwerk, die Kreisplatte, untersucht, um verallgemeinerungsfähige Ergebnisse über den Einfluß der Nichtlinearität, der Materialeigenschaften sowie der Effektivität unterschiedlicher Näherungsverfahren zu gewinnen. Sie sollen hier zusammengefaßt vorgestellt werden.

2. Grundlagen der numerischen Berechnung

Um verschiedenes Materialverhalten in einem Programm zu realisieren und zusätzlich die leichte Austauschbarkeit auch im Endzustand zu gewährleisten, ist eine standardisierte allgemeine Formulierung des Zusammenhan-

ges zwischen Spannungen und Verzerrungen, also des Deformationsgesetzes, erforderlich. Sie lautet

$$\underline{\sigma} = \mathbf{C} \underline{\epsilon} + \mathbf{d}_T \dot{T} + \mathbf{d} \quad (1.1)$$

$$\underline{h} = \mathbf{B} \underline{\epsilon} + \mathbf{e}_T \dot{T} + \mathbf{e} \quad (1.2)$$

Der Materialzustand wird durch die erforderlichen Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors, die in die beiden Vektoren $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ eingeordnet werden, die in \underline{h} zusammengefaßten internen Variablen und die Temperatur T bestimmt. Die Materialeigenschaften werden durch die Matrizen \mathbf{C} , \mathbf{d}_T , \mathbf{d} und \mathbf{B} , \mathbf{e}_T , \mathbf{e} beschrieben, die Funktionen von $\underline{\sigma}$, $\underline{\epsilon}$, \underline{h} und T sein können. Der Punkt bedeutet die (materielle) Ableitung nach der Zeit t .

Auf der Grundlage der Gleichungen (1) läßt sich eine einheitliche Konzeption zur Lösung von Feldproblemen angeben, die bereits mehrfach vorgestellt worden ist [1], [2], [3].

Sie wurde erstmals in einem nachnutzungsbereiten Programm mit NISCHA 82 genutzt, das die Grundlage der folgenden Beispiele bildet. Das Programm NISCHA 82 wurde aus dem Programm NISCHA entwickelt. Beide Programme haben hinsichtlich Geometrie, Belastungen und Randbedingungen einen identischen Leistungsumfang. Sie dienen zur Berechnung von Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung. Der Verlauf der Meridiankontur ist beliebig und kann punktweise eingegeben werden. Das gleiche trifft auf die Wandstärke zu. Alle Varianten von Lagerungsbedingungen sind an beliebigen Punkten des Meridians realisierbar. Lasten können als rotationssymmetrische Flächenlasten beliebiger Richtung und Verteilung in Bezug auf die Meridiankontur und als ringförmige Linienlasten eingeleitet werden. Die geometrische Nichtlinearität bei kleinen Dehnungen wird erfaßt.

Im Gegensatz zu NISCHA, wo die Materialeigenschaften nur über den Datenstrom definiert werden können, ist in NISCHA 82 das Auswechseln der Unterprogramme zum Aufbau der Materialmatrizen besonders unterstützt. Damit können alle Deformationsgesetze, die sich in die Form (1) bringen lassen, mit NISCHA 82 erfaßt werden.

Auf Grund der Rotationssymmetrie und unter Beachtung der Prinzipien, die zur Bildung von $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ vorgeschrieben sind [1], gilt für Rotationsschalen

$$\underline{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2]^T \quad (2.1)$$

$$\underline{\epsilon} = [\epsilon_1, \epsilon_2]^T \quad (2.2)$$

wobei die Richtung 1 die der Tangente an die Meridiankurve und die Richtung 2 die entsprechende an den

Breitenkreis darstellt. In den Vektor \mathbf{h} soll als erstes Element die dritte Normaldehnung ϵ_3 aufgenommen werden. Wird die Zahl der tatsächlichen internen Variablen mit N_h bezeichnet, so ist \mathbf{C} eine (2,2) Matrix und \mathbf{B} hat 2 Spalten zu je $N_h + 1$ Elementen. Entsprechend sind \mathbf{d}_T und \mathbf{d} Vektoren mit 2 Elementen und \mathbf{e}_T und \mathbf{e} solche mit $N_h + 1$ Elementen.

Der Einbau von (1) unter Beachtung von (2) in die Schalentheorie der dünnen Rotationsschalen ohne Querkraftschubverzerrung führt auf folgendes Anfangs-Randwert-Problem [4]:

$$\dot{\mathbf{y}}' = \mathbf{B}_{RWP}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{y}} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_{AWP}(\mathbf{z}) \dot{\mathbf{y}} \quad (4)$$

Hierin ist \mathbf{z} der Vektor aller Zustandsgrößen der Schale, der die Verschiebungen, Mittelflächenverzerrungen und Schnittkräften in allen diskreten Meridianpunkten enthält. Dazu kommen entsprechend der Diskretisierung über die Dicke für alle diskreten Punkte der Schale die Zustandsgrößen der Gleichung (1). Der Vektor \mathbf{y} enthält nur 7 Elemente, und zwar die raumfest orientierten Verschiebungen und die Verdrehung der Schalenmeridiankurve, die zugeordneten Schnittkräfte und das Schnittmoment sowie die Zeit t . Letztere wird nur aufgenommen, um das inhomogene Differentialgleichungssystem über den Ort (der Strich bedeutet die Ableitung nach der Bogenlänge der Meridiankurve) formal in ein homogenes zu überführen.

Zur Aufstellung von \mathbf{B}_{RWP} ist noch eine Integration der Gleichung (1.1) über die Wandstärke erforderlich, die numerisch erfolgt. Danach wird für festes \mathbf{z} die lineare Randwertaufgabe (3) für $\dot{\mathbf{y}}$ gelöst. Dazu wird das Randwertproblem (3) als Anfangswertproblem mit Rückrechnung vom Endrand gelöst. Das entspricht dem Übertragungsmatrixverfahren, wobei die Übertragungsmatrizen über das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung erstellt werden.

Die Gleichungen (1.2) dagegen gehen nur in die Aufstellung der Matrix \mathbf{C}_{AWP} ein. Ist $\dot{\mathbf{y}}$ aus dem linearen Randwertproblem bestimmt, läßt sich die Gleichung (4) als nichtlineares Anfangswertproblem integrieren. Hierfür stehen wahlweise das Euler-Cauchy-Verfahren („inkrementelle Methode“) und die Runge-Kutta-Verfahren 2. sowie 4. Ordnung zur Verfügung.

Parallel zu NISCHA 82 wurde ein Programm NIMEHS erarbeitet, das die Gleichungen (1) unter den Bedingungen des ebenen Hauptspannungszustandes (2) als nichtlineares Anfangswertproblem integriert. Die Integrationsverfahren über die Zeit entsprechen denen, die für das Anfangswertproblem (4) zur Verfügung stehen. Die Vorgabe von Spannungs- und/oder Dehnungskomponenten wird bei der Eingabe festgelegt und kann im Laufe der Zeit beliebig geändert werden.

In beiden Programmen sind die Schnittstellen zu Unterprogrammen, die das Lesen der Materialparameter, das Berechnen der Steifigkeitsmatrizen in (1) und die zugeordnete Ausgabe realisieren, identisch. Daher können neue Materialtypen mit NIMEHS getestet werden. Nach erfolgreichem Test ist ihr einwandfreier Lauf in NISCHA 82 ohne weitere Zusatztests gewährleistet.

3. Einfluß des Materialverhaltens

3.1. Deformationsgesetz

Alle weiteren Ausführungen beziehen sich auf die Untersuchung des Materialverhaltens von PVC - S 6858 H. Dieses Material ist in [5] ausführlich vorgestellt. Es handelt sich um alterungsfreies, nichtlinear-viskoelastisches isotropes Material, das durch die Haupttheorie des Kriechens beschrieben werden kann:

$$\epsilon_{ij}(t) = \Gamma_{ij}(\sigma_{kl}(t)) + \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_{ij}(\sigma_{kl}(\tau)) d\tau \quad (5)$$

Die beiden isotropen Tensorfunktionen Γ_{ij} und Φ_{ij} wurden aus jeweils einem zugeordneten Potential abgeleitet. Eine wesentliche Forderung, die für Thermoplaste erhoben werden muß, besteht darin, daß die Nichtlinearität von Φ_{ij} außer von der 2. Invarianten auch von der 1. Invarianten wesentlich beeinflusst wird.

Im ebenen Hauptspannungszustand läßt sich (5) sofort unter Beachtung von (2) in eine äquivalente Matrizenbeziehung umschreiben:

$$\underline{\tilde{\epsilon}}(t) = \underline{\tilde{\gamma}}(\underline{\sigma}(t)) + \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{\tilde{\varphi}}(\underline{\sigma}(\tau)) d\tau \quad (6)$$

Dabei wird

$$\underline{\tilde{\epsilon}} = [\underline{\epsilon}^T, \epsilon_3]^T \quad (7)$$

eingeführt, analog sind $\underline{\gamma}$, $\underline{\varphi}$ strukturiert.

Die Überführung dieser Gleichungen in die standardisierte Formulierung (1) ist möglich, wenn die Kriechfunktion durch eine Exponentialreihe approximiert wird

$$J(t) \approx \frac{A_0}{\Theta_0} t + \sum_{n=1}^{N_E} A_n (1 - e^{-\frac{t}{\Theta_n}}) \quad (8)$$

Diese Approximation wurde mit einem Programm auf der Grundlage der in [6] vorgestellten Algorithmen durchgeführt. Die entsprechenden Parameter und der Vergleich zwischen den tabellierten Werten von $J(t)$ nach [5] und den zugeordneten der Approximation sind in Tabelle 1 ausgewiesen.

Nun wurden die Hilfsgrößen

$$\underline{\tilde{\mathbf{h}}}_n = \int_{-\infty}^t A_n (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\Theta_n}}) \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{\tilde{\varphi}}(\underline{\sigma}(\tau)) d\tau \quad (9)$$

definiert. Zur Integralbeziehung (9) ist die Differentialgleichung

$$\dot{\underline{\tilde{\mathbf{h}}}}_n = \frac{1}{\Theta_n} (A_n \underline{\tilde{\varphi}}(\underline{\sigma}) - \underline{\tilde{\mathbf{h}}}_n) = \underline{\tilde{\mathbf{c}}}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tilde{\mathbf{h}}}_n) \quad (10)$$

äquivalent.

Differentiation von (6), Einsetzen der Abkürzung (9) und der Gleichung (10) ergibt

$$\dot{\underline{\tilde{\epsilon}}} = \frac{\partial \underline{\tilde{\gamma}}(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} + \frac{A_0}{\Theta_0} \underline{\tilde{\varphi}}(\underline{\sigma}) + \sum_{n=1}^{N_E} \underline{\tilde{\mathbf{c}}}_n(\underline{\sigma}, \underline{\tilde{\mathbf{h}}}_n) \quad (11)$$

Die Gleichungen (10) und (11) entsprechen

$$\dot{\underline{\tilde{\epsilon}}} = \mathbf{J} \dot{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} \quad (12.1)$$

Tabelle 1

Parameter der Exponentialreihe $J(t) = \frac{A_0}{\Theta_0} + \sum_{n=1}^{N_E} A_n (1 - e^{-\frac{t}{\Theta_n}})$

Vergleich zwischen den Werten nach [5] und der Approximation

| n | A_n | Θ_n [h] | t [h] | J(t) nach [5] | J(t) approximiert |
|---|--------|----------------|-----------|---------------|-------------------|
| 0 | 1,0000 | 376,12 | 10^{-1} | 0,068 | 0,043 |
| 1 | 0,5296 | 21,24 | 10^0 | 0,199 | 0,212 |
| 2 | 0,2093 | 0,466 | 10^1 | 0,467 | 0,435 |
| | | | 10^2 | 1,000 | 1,000 |

$$\dot{h} = A \dot{\sigma} + c \quad (12.2)$$

mit folgenden Zusammenfassungen und Abkürzungen:

$$h = [\epsilon_3, \tilde{h}_1^T, \tilde{h}_2^T, \dots, \tilde{h}_{N_E}^T]^T$$

$$J = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}, \quad b = \frac{A_0}{\Theta_0} \varphi + \sum_{n=1}^{N_E} c_n(\sigma, h_n) \quad (13)$$

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial \sigma} \right)^T \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c = \left[\frac{A_0}{\Theta_0} \varphi_3 + \sum_{n=1}^{N_E} c_{3n}(\sigma, h_3), \tilde{c}_1^T, \tilde{c}_2^T, \dots, \tilde{c}_{N_E}^T \right]^T$$

Auflösen der ersten Gleichung von (12) nach $\dot{\sigma}$ liefert schließlich den Zusammenhang zwischen (6) und (1) mit

$$C = J^{-1}, \quad d_T = 0, \quad d = -J^{-1} b \quad (14)$$

$$B = A J^{-1}, \quad e_T = 0, \quad e = c - A J^{-1} b$$

Damit ist gezeigt, daß sich das spezielle Deformationsgesetz (5) in die standardisierte Formulierung überführen läßt. Die genaue Struktur der Tensorfunktionen Γ_{ij} und Φ_{ij} ist in [5] entsprechend angegeben, desgleichen die Materialparameter für PVC - S 6858 H (Tabelle 2 in [5]).

Die Zahlenrechnungen erfolgten für 2 Varianten:

Variante A:

Elastisches Verhalten nach Standardgesetz¹⁾

Kriechverhalten mit Mittelspannungseinfluß auf die physikalische Nichtlinearität

Variante B:

Elastisches Verhalten nach Standardgesetz¹⁾

Kriechverhalten ebenfalls nach Standardgesetz¹⁾

Dabei bestand das Ziel der Vergleiche beider Varianten darin, festzustellen, ob der bei Proben ausgeprägte Einfluß der Mittelspannung auch bei Bauteilen mit inhomogenen Spannungsfeld bedeutsam bleibt.

1) Begriffsbildung nach [5]: Materialverhalten ohne Einfluß der Mittelspannung (1. Invariante) auf die physikalische Nichtlinearität.

3.2. Das Berechnungsbeispiel

Als Berechnungsbeispiel wurde eine gelenkig gelagerte Kreisplatte unter Gleichlast gewählt (Bild 1). Der zeitliche Verlauf der Belastung ist in Bild 2 dargestellt. Auf dieses Beispiel beziehen sich auch alle weiteren Ausführungen der vorliegenden Arbeit. Die numerischen Untersuchungen dazu erfolgten im Rahmen der Arbeit [7] und sind dort ausführlich beschrieben.

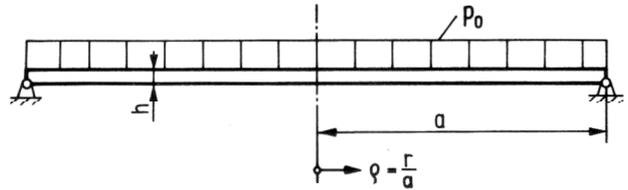


Bild 1
Viskoelastische Platte unter Gleichlast

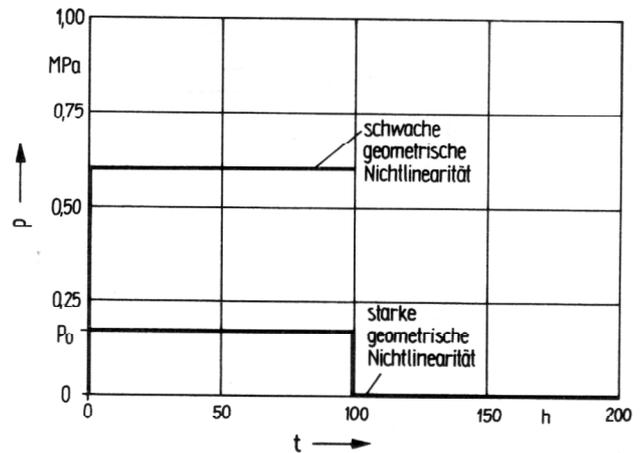


Bild 2
Lastablauf

3.3. Ergebnisse bei der numerischen Berechnung

Die elastischen Deformationen stimmen bei den Materialannahmen nach Variante A und B überein.

Im Kriechverhalten konnten erkennbare Abweichungen zwischen dem Standardgesetz und dem Gesetz mit Mittelspannungseinfluß festgestellt werden. Die Kriechneigung des Materials ist beim Standardgesetz geringer. So nimmt die maximale Durchsenkung des Plattenmittelpunktes während 100 h Kriechzeit bei Variante A um 10,8 %, bei Variante B nur um 7,5 % zu (Bild 3). Das Material relaxiert bei Variante B auch schwächer. Die Spannungen und Schnittgrößen werden in 100 h Kriechzeit i. a. nicht so stark abgebaut.

Bild 4 zeigt den zeitlichen Verlauf der Spannung σ_1 für einen diskreten Punkt der Platte mit den Koordinaten $\rho = 0,75$ und $z/h = 0,5$. Er ist einer der höchstbelastetsten Punkte der Platte und charakterisiert gut das Spannungs- und Verformungsverhalten des gesamten Flächentragwerkes. σ_1 wird bei Variante A in 100 h um 18,9 % und bei Variante B um 13,8 % abgebaut. Der σ_1 -Verlauf über der Plattendicke bei $\rho = 0,75$ ist in Bild 5 dargestellt.

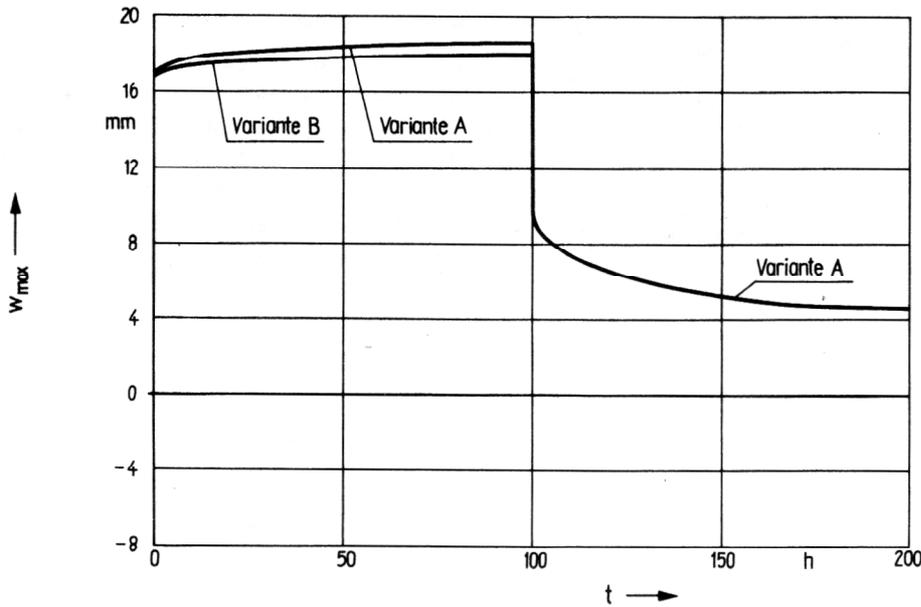


Bild 3
Zeitabhängigkeit der maximalen Durchsenkung

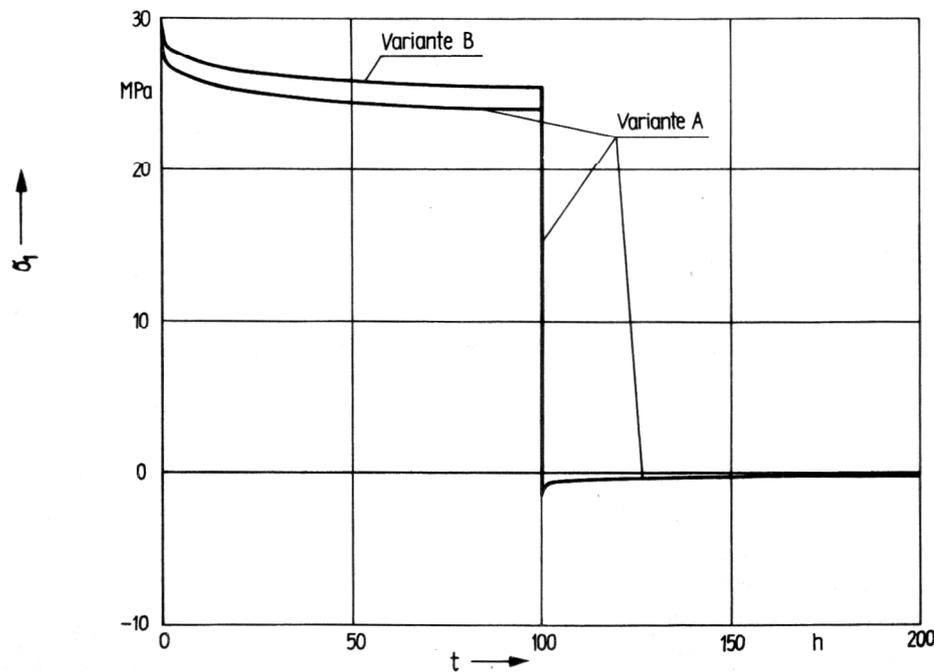


Bild 4
Zeitabhängigkeit der Spannung σ_1 des Punktes $\rho = 0,75, z/h = 0,5$

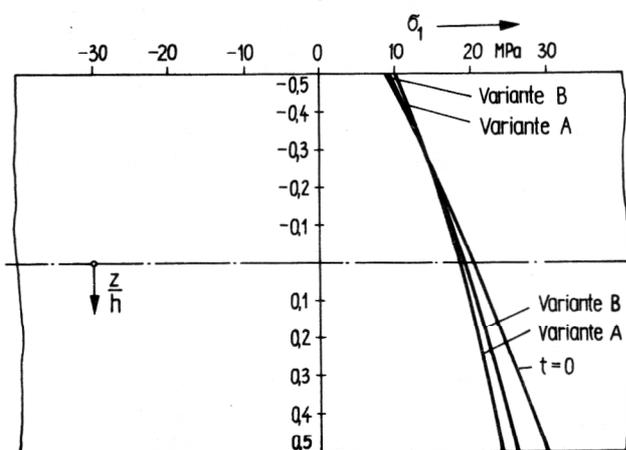


Bild 5
Spannung σ_1 im Querschnitt $\rho = 0,75$ für $t = 0^+$ und $t = 100$ h

Bild 6 zeigt das zeitliche Verhalten des Momentes m_1 in Abhängigkeit vom Radius für Variante A und B. Ein Vergleich der Bilder 5 und 6 läßt den Schluß zu, daß der Biegespannungszustand stärker relaxiert als der Membranspannungszustand. Wurde σ_1 um maximal 18,9 % bei Variante A abgebaut, so relaxiert m_1 um 35,2 % bei dieser Variante. Das ausgeprägte Relaxationsverhalten des Biegezustandes der Platte ist auf den Einfluß der durch die große Durchbiegung bewirkten starken geometrischen Nichtlinearität zurückzuführen. Dabei sind die Unterschiede zwischen Variante A und B für große zeitliche Änderungen am stärksten. Technisch bedeutsam sind diese Abweichungen jedoch nicht.

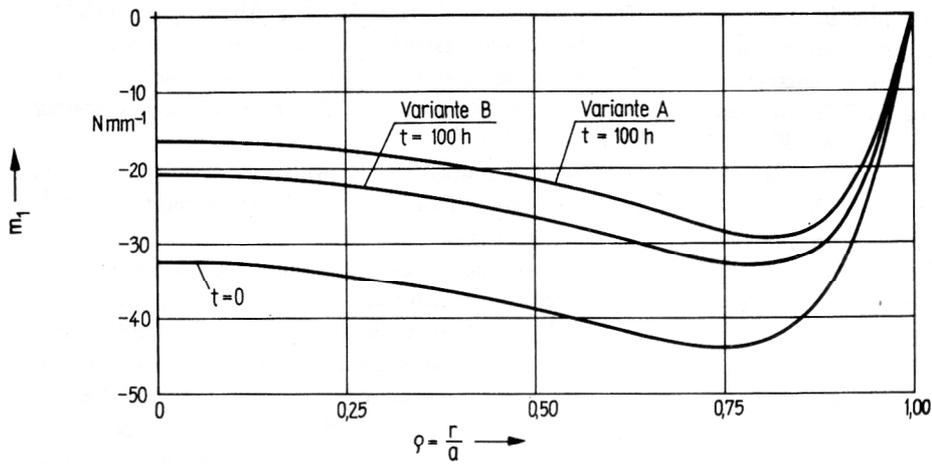


Bild 6
Biegemoment m_1 in Abhängigkeit vom Radius

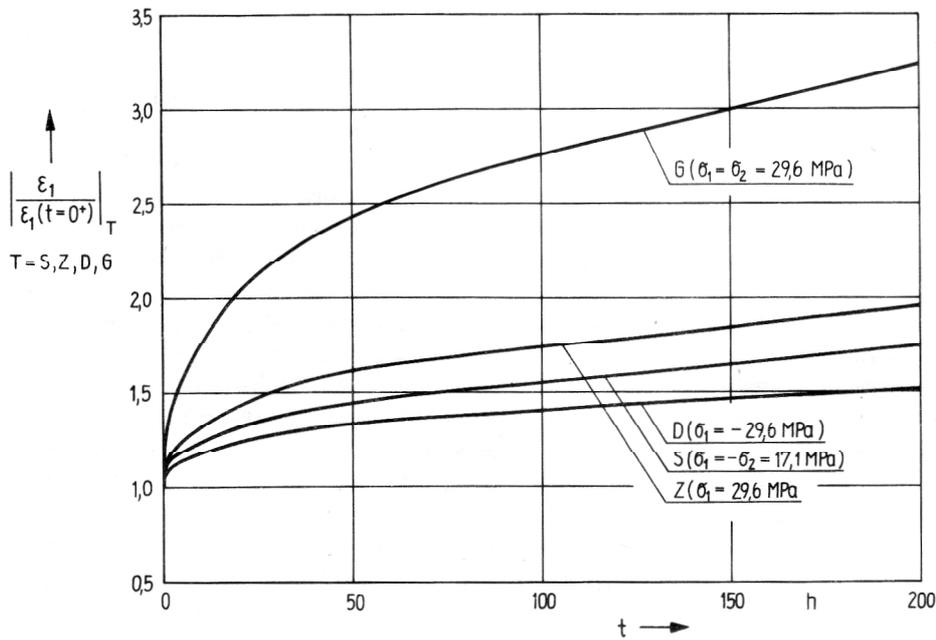


Bild 7
Kriechkurven von PVC - S 6858 H für ebenen Zug (Z), Druck (D), Schub (S) und Gleichzug (G)

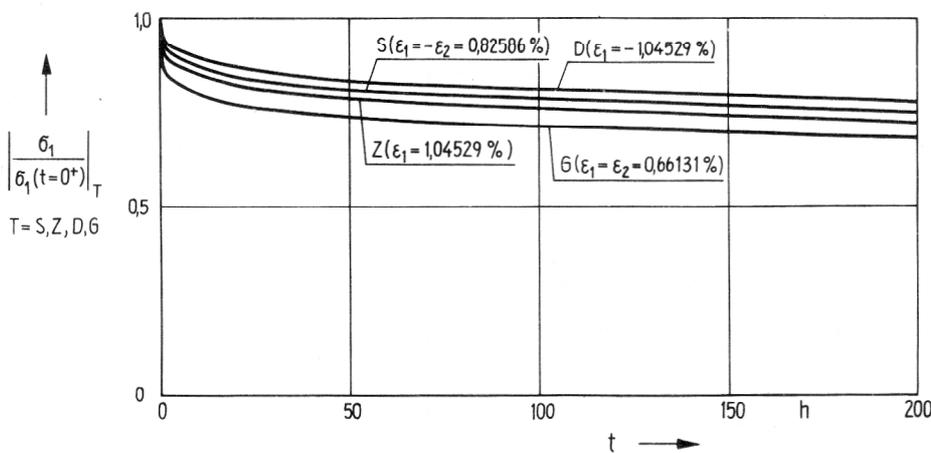


Bild 8
Relaxationskurven von PVC - S 6858 H ebenen Zug (Z), Druck (D), Schub (S) und Gleichzug (G)

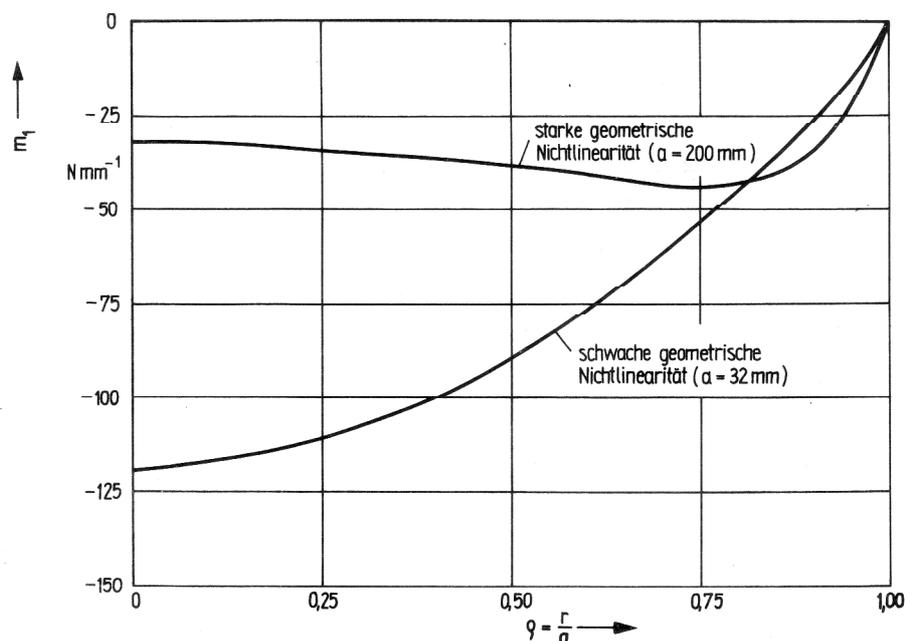
Mit dem Programm NIMEHS wurden die in den Bildern 7 und 8 aufgetragenen Kriech- bzw. Relaxationskurven berechnet. Das Materialverhalten entspricht Variante A, d. h. der Mittelspannungseinfluß wird berücksichtigt. Es ist deutlich erkennbar, daß die Kriech- bzw. Relaxationsneigung des Materials vom Typ des Spannungszustandes abhängt. So ist z. B. die Kriechneigung bei Zug größer als bei Druck. Für die praktische Anwendung ist daher die Berücksichtigung der Unsymmetrie des Einflusses der Mittelspannung von gleicher Bedeutung wie der Mittelspannungseinfluß selbst. Ausserdem erklären die Bilder 7 und 8 im Zusammenhang mit der überwiegend zweiachsigen Zugbeanspruchung der ganzen Platte, daß sich die Unterschiede beider Modelle bei diesem Beispiel eines inhomogenen Spannungszustandes am stärksten ausprägen. Bei anderen Bauteilen ist der Effekt des Mittelspannungseinflusses noch geringer.

In Verallgemeinerung der gewonnenen Ergebnisse kann gesagt werden, daß die Unterschiede zwischen den beiden Varianten des Materialverhaltens unbedeutend sind, weil sie im Rahmen des relativen Relaxationsverhaltens erst bei großen Spannungen ausgeprägt sind, ausgelastete reale Bauteile aber nur in wenigen Bereichen unter der zulässigen Höchstspannung stehen.

4. Geometrische Nichtlinearität

Zur Ermittlung des Einflusses der geometrischen Nichtlinearität wurde im Vergleich zu der stark nichtlinearen Platte (Bild 1) eine Platte mit nur schwacher geometrischer Nichtlinearität berechnet. Sie wurde so dimensioniert, daß die maximal auftretenden Spannungen im Bereich der Maximalspannung der stark nichtlinearen Platte lagen (ca. 30 MPa) und die maximale Durchsenkung kleiner als das 0,2fache der Wandstärke war (i. a. Bedingung

Bild 9
Biegemoment m_1 bei starker und schwacher geometrischer Nichtlinearität bei $t = 0^+$



für geometrische Linearität). Die Abschätzung erfolgte mit der linear-elastischen Lösung der Kirchhoffschen Plattentheorie. Das ergab für die Plattenstärke von $h = 5$ mm einen Radius $a = 32$ mm und eine Belastung $p_0 = 0,60$ N/mm².

Der Mittelspannungseinfluß wurde berücksichtigt, d. h. auch die schwach nichtlineare Platte bestand aus Material der Variante A.

Im Gegensatz zur geometrisch stark nichtlinearen Platte tritt bei der Platte mit nur schwacher Nichtlinearität eine andere Spannungsverteilung auf. Es ist ein deutlich ausgeprägter Biegespannungszustand erkennbar, der nur von schwachen Membranspannungen überlagert wird. Bei der stark nichtlinearen Platte ist dies genau umgekehrt.

Die schwach nichtlineare Platte zeigt eine deutliche stärkere Kriechneigung gegenüber der Platte mit stark geometrischer Nichtlinearität.

Die Verformungszunahme infolge Kriechen beträgt 22 % gegenüber 10,8 % bei starker Nichtlinearität.

Bild 9 zeigt den m_1 -Verlauf für die Platten mit starker bzw. schwacher geometrischer Nichtlinearität. Die Momentenverläufe unterscheiden sich hinsichtlich Form und Größe stark. Für die Platte mit schwacher geometrischer Nichtlinearität stimmt der Momentenverlauf qualitativ mit dem der linearen Theorie überein. Die Größe des Momentes ist für diesen Fall wesentlich größer als bei der Platte mit großer geometrischer Nichtlinearität, da bei letzterer ein ausgeprägter Membranspannungszustand vorliegt. Bemerkenswert ist auch der Momentenverlauf der geometrisch stark nichtlinearen Platte. Er ähnelt dem einer Schale mit Randstörung, was auf den Einfluß der großen Verformung zurückzuführen ist.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Kriechneigung des Tragwerks bei schwacher geometrischer Nichtlinearität größer ist als bei starker Nichtlinearität. Der Spannungszustand ist stark verändert. Je nachdem, ob starke oder schwache geometrische Nichtlinearität vorliegt, prägt sich überwiegend ein Biege- oder ein Membranspannungszustand aus.

5. Einfluß der Diskretisierung

Die Vernetzungsgenauigkeit hat entscheidenden Einfluß auf die Genauigkeit der Ergebnisse und die Effektivität der Rechnung, d. h., den Verbrauch an Rechenzeit und den Speicherplatzbedarf. Ziel der Untersuchungen war es, Erfahrungen zu optimalen Vernetzungen zu sammeln. Dazu wurde die Kreisplatte mit drei verschiedenen Vernetzungen entsprechend Bild 10 berechnet.

Bei Vernetzungsvariante I wurden offensichtlich falsche Ergebnisse ermittelt. So traten z. B. nach Entlastung Verformungen entgegen der ursprünglichen Verformungsrichtung auf. Andere Ergebnisse, so z. B. für m_1 , waren zwar qualitativ möglich, aber quantitativ falsch. Solche Fehler sind besonders gefährlich, denn sie treten ohne deutlichen Warnzeichen auf. Daher wurde in NISCHA 82 eine Vernetzungskontrolle eingebaut, die auf der Fehlerabschätzung von Übertragungsmatrizen nach den Formeln von Runge-Kutta aufgebaut ist.

Die zulässige Abschnittslänge berechnet sich nach [10] zu:

$$\Lambda \cdot \Delta s \leq \Lambda \Delta s_{zul} = \alpha \quad (15)$$

wobei in [10] $\alpha = 1$ vorgeschlagen wird. Λ ist der betrags-

größte Eigenwert der Systemmatrix B aus Gl. (3). α ist eine unbekannte Konstante.

Für die Diskretisierung entsprechend den drei Vernetzungsvarianten ergaben sich folgende Werte für $(\Lambda \cdot \Delta s)_{max}$:

Variante I: $(\Lambda \cdot \Delta s)_{max} = 5,70$

Variante II: $(\Lambda \cdot \Delta s)_{max} = 1,76$

Variante III: $(\Lambda \cdot \Delta s)_{max} = 0,99$

Die Rechnung mit Variante III ergab praktisch keine Abweichungen zur Rechnung mit Variante II. Eine Ausnahme bildete wiederum der m_1 -Verlauf. Bei Variante II ergaben sich geringfügige Unregelmäßigkeiten im Momentenverlauf für einige Stützstellen im Inneren der Kreisplatte, speziell an Stellen in der Mitte von Meridianabschnitten. Für Variante III verschwand dieser Effekt. Da die Ergebnisgenauigkeit in der Mitte von Meridianabschnitten geringer ist als am Anfang und am Ende der Abschnitte, sind Unregelmäßigkeiten im Momentenverlauf erste Anzeichen dafür, daß die gewählte Vernetzung ihre Grenzen erreicht hat, innerhalb deren sie genügend genaue Ergebnisse liefert. Offenbar liegt dieser Fall für

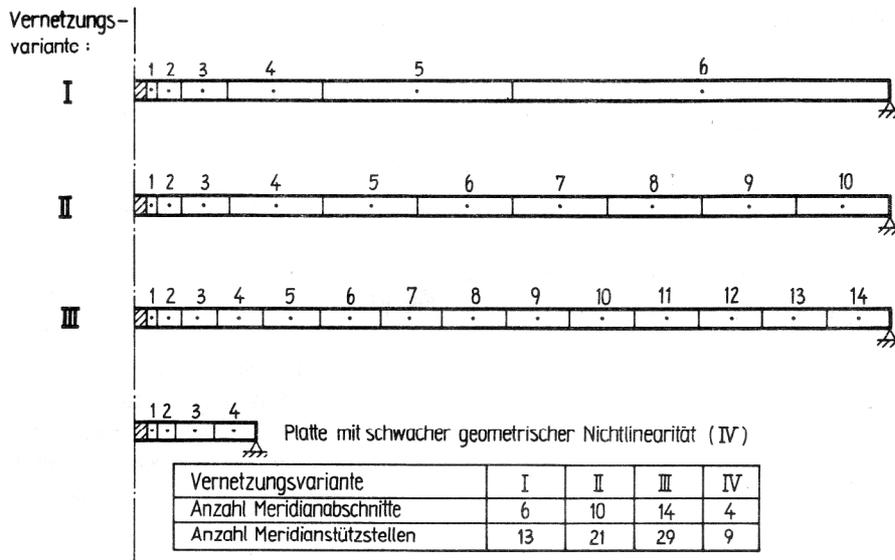


Bild 10
Vernetzungsvarianten

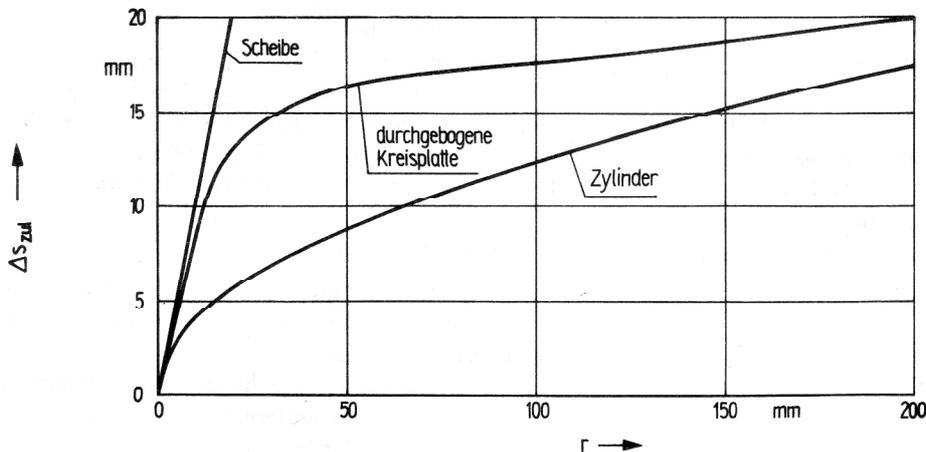


Bild 11
Zulässige Abschnittslängen
für verschiedene Bauteile

den obengenannten Wert von $\Delta s/\Delta s_{zul}$ vor. Dabei stützen sich die hier gemachten Aussagen auf den speziellen Fall der untersuchten Kreisplatte.

Die Auftragung der zulässigen Abschnittslänge Δs_{zul} über dem Radius zeigt Bild 11. Alle Darstellungen gelten für $\alpha = 1$. Für die Kurve, die den ausgelenkten Zustand der Kreisplatte repräsentiert, liegt für das Verhältnis von maximaler Durchsenkung w zu Wandstärke h ein Wert $w/h = 3,72$ vor. Der Fall der gewölbten Platte wird von den beiden Grenzfällen der Scheibe ($w/h = 0$) und des Zylinders eingeschlossen.

Bemerkenswert ist, daß der Wert für das Randelement der Kreisplatte sehr nahe bei dem des Zylinders liegt, obwohl die Neigung dort nur $10,5^\circ$ beträgt.

Aus der weitestgehenden Übereinstimmung der Ergebnisse von Variante II und III konnte die Schlußfolgerung abgeleitet werden, daß die Forderung (15) für $\alpha = 1$ etwas zu scharf gewählt ist. In [7] wurde daher vorgeschlagen, die zulässige Abschnittslänge gemäß

$$\alpha = 1,5 \dots 1,7 \quad (16)$$

gegenüber dem Vorschlag [10] zu erhöhen.

Obwohl der Parameter nach (16) weit die für allgemeine Anfangswertprobleme angegebene Schranke nach [11] übersteigt, so zeigen doch Erfahrungen beim Randwertproblem der Rotationsschale, daß diese für die Rechenökonomie wesentliche Erweiterung zulässig ist.

6. Methoden zur Rechenzeiteinsparung

6.1. Die algebraische Näherung

Die Berechnung viskoelastischer Probleme, vor allem wenn der Spannungs- und Verformungszustand nach längerer Beanspruchung interessiert, ist i. a. mit sehr großen Rechenzeiten verbunden. Es ist deshalb ökonomisch sinnvoll, den Rechenaufwand durch die Anwendung geeigneter Näherungsverfahren zu senken. Für den Fall einer verallgemeinerten proportionalen Belastung ist das möglich.

Unter einer verallgemeinerten proportionalen Belastung versteht man eine sehr schnelle proportionale Belastung

$$\underline{\sigma}_A(t) = \underline{\sigma}_0 \frac{t}{t_0}, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (17)$$

und anschließende konstante Beanspruchung

$$\underline{\sigma}_A(t) = \underline{\sigma}_0 = \text{konst.}, \quad t_0 \leq t \quad (18)$$

wobei

$$t_0 \ll \frac{\|\underline{\sigma}_0\|}{\|\underline{d}\|} \quad (19)$$

gelten muß. Es kann eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ verwendet werden. Die Bedingung (19) wird gegenstandslos, falls $\underline{d} = 0$ (skleronomes Material). Das Integral der Gl. (1) für eine verallgemeinerte proportionale Belastung hat nach Elimination der internen Parameter den Aufbau

$$\tilde{\underline{\epsilon}}_A = \tilde{\underline{f}}(\underline{\sigma}, T, 0), \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (20)$$

bzw.

$$\tilde{\underline{\epsilon}}_A = \tilde{\underline{f}}(\underline{\sigma}_0, T, t), \quad t \leq t_0 \quad (21)$$

mit $\tilde{\underline{\epsilon}}_A$ entsprechend Gl. (7).

12

Für Belastungen, die „in der Nähe“ der verallgemeinerten Belastung liegen, gilt

$$\underline{\sigma}(t) \simeq \underline{\sigma}_A(t) \quad (22.1)$$

und damit auch

$$\tilde{\underline{\epsilon}}(t) \simeq \tilde{\underline{\epsilon}}_A(t) = \underline{f}(\underline{\sigma}(t), T(t), t) \quad (22.2)$$

Diese „Zustandsfunktionen“ sind algebraische Gleichungen. Für viskoelastisches Material nach (5) sind diese Beziehungen in [8] angegeben.

Die algebraische Näherung (22) ersetzt das differentielle Gesetz (1). Der Einbau in den vorhandenen Algorithmus ist möglich, wenn (22) als elastisches Gesetz mit t als Parameter interpretiert wird. Durch formale Differentiation bei festem Parameter t entsteht dann wieder eine Struktur, die in (1) als Sonderfall eingeschlossen ist.

Durch Anwendung der algebraischen Näherung wird Rechenzeit gespart, weil

- sich die Anzahl der Differentialgleichungen erheblich reduziert, da der Vektor \underline{h} auf ein einziges Element (ϵ_3) verkleinert wird,
- der Einfluß der Belastungsgeschichte entfällt, die Berechnung eines Zeitpunktes nach längerer Belastung erfordert nur einen stark reduzierten Aufwand.

Die algebraische Näherung kann im Programm NISCHA 82 durch eine Steuergröße aktiviert werden. Für das Beispiel der Kreisplatte werden die Zeitpunkte $t = 0^+$ und $t = 100 h$ berechnet. Die numerischen Ergebnisse stimmten für beide Zeitpunkte nahezu exakt mit denen, die durch Rechnung mit dem Differentialgleichungssystem erhalten wurden, überein. Ein Vergleich der Rechenzeiten erbrachte deutliche Vorteile für die algebraische Näherung. Für die Rechnung bei $t = 0^+$ wurden durch Anwendung der algebraischen Näherung fast 30 % Rechenaufwand eingespart. Für die alleinige Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes nach 100 h waren sogar nur 18 % des Rechenzeitaufwandes notwendig, der für die Rechnung mit Berücksichtigung der Belastungsgeschichte notwendig war. Aus diesen Angaben wird ersichtlich, daß die algebraische Näherung besonders gut geeignet ist, wenn stichprobenartig das Spannungs-Verformungs-Verhalten nach längerer Belastung kontrolliert werden soll. Interessieren in einem Zeitintervall mehrere Zeitpunkt, so ist die Rechnung mit dem Differentialgleichungssystem meist günstiger, da mit der algebraischen Näherung jeder Zeitpunkt einzeln berechnet werden muß. Im untersuchten Beispiel wurden 7 Zeitpunkte ($t = 0^+, 0,1, 1, 10, 20, 50, 100 h$) berechnet. Wäre für alle diese Zeitpunkte die algebraische Näherung verwendet worden, so hätte das einen Mehraufwand von 28 % Rechenzeit gegenüber der Rechnung mit dem Differentialgleichungssystem bedeutet.

6.2. Die asymptotische Lösung

Das Prinzip der asymptotischen Lösung ist ausführlich in [9] beschrieben. Es seien hier nur die wichtigsten Beziehungen angegeben.

Für die internen Parameter, die im Vektor \underline{h} enthalten sind, gilt ein Satz von Differentialgleichungen entsprechend Gl. (10). Bei der Integration von (10) gibt es für

die Materialparameter eines realen Stoffes auch auf schnellen Anlagen Probleme hinsichtlich der Rechenzeit. Die Materialparameter Θ_n haben um mehrere Zehnerpotenzen unterschiedliche Größenordnungen. Schrittweitenbestimmend erweisen sich die Elemente von h , die mit den kleinsten Θ_n behaftet sind. Aufgrund der um mehrere Zehnerpotenzen unterschiedlichen Θ_n ergeben sich oftmals eine derartig hohe Anzahl von Integrationschritten, daß die praktische Anwendung des Verfahrens in Frage gestellt werden muß. Die Veränderung des Algorithmus in der Weise, daß die Rechengeschwindigkeit erhöht wird, ist deshalb von großer Bedeutung für die Anwendung des Verfahrens zur numerischen Integration von Anfangs-Randwertaufgaben.

Mit

$$A_n \tilde{\varphi}(\sigma) = \tilde{f}(\sigma) \quad (23)$$

geht eine einzelne Gleichung des Systems (10) in

$$\dot{\tilde{h}}_n = \frac{1}{\Theta_n} (\tilde{f}_n - \tilde{h}_n) \quad (24)$$

über.

Aus (24) ist ersichtlich, daß \tilde{h}_n auf die Verringerung der Differenz $\tilde{f}_n - \tilde{h}_n$ gerichtet ist. Wenn \tilde{f}_n sich nur langsam ändert, so nähert \tilde{h}_n sich asymptotisch an \tilde{f}_n an. Für diesen Fall ist es möglich, Gl. (24) durch

$$\tilde{h}_n \approx \tilde{f}_n \quad (25)$$

bzw.

$$\dot{\tilde{h}}_n \approx \dot{\tilde{f}}_n \quad (26)$$

zu ersetzen. Die langsame Änderung von \tilde{f}_n ist definiert durch

$$\frac{\Theta_n |\dot{\tilde{f}}_n|}{|\tilde{f}_n| + \lambda} < \epsilon_{AS} \quad (27)$$

Die Asymptote für \tilde{h}_n ist mit der Genauigkeit der Integration erreicht, wenn

$$\frac{|\dot{\tilde{f}}_n - \dot{\tilde{h}}_n|}{|\tilde{h}_n| + \lambda} < \epsilon_{AS} \quad (28)$$

erfüllt ist.

ϵ_{AS} ist der zulässige relative und $\lambda \cdot \epsilon_{AS}$ der zulässige absolute Fehler der asymptotischen Näherung. Diese beiden Größen werden unabhängig von der Integrationsgenauigkeit vorgegeben. Wenn die Bedingung (27) und (28) erfüllt ist, so ist es möglich, (24) durch die „schnelle“ Differentialgleichung (26) zu ersetzen.

Dadurch wird das Differentialgleichungssystem (10) so modifiziert, daß der schrittweitenbestimmende Einfluß des Parameters Θ_n entfällt.

Um einen instabilen Zustand an der Schranke des Überganges von (24) zu (25) zu vermeiden, wird der Fehler vor dem Eintritt in (26) feiner gewählt als im asymptotischen Zustand selbst. Bei NIMEHS und NISCHA 82 beträgt dieser Fehler die Hälfte von ϵ_{AS} . Mit dem Programm NIMEHS wurden für die Lastfälle Gleichzugkriechen und Gleichzugrelaxation der Einfluß der Größe von ϵ_{AS} auf die Rechengeschwindigkeit analysiert.

Als Integrationsverfahren wurde das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit Genauigkeitstest und automatischer Schrittweitenregelung angewendet. Die Prüfung des Integrationsfehlers erfolgt hier für jede einzelne Differentialgleichung

$$\dot{z}_i = f_i(z_1, \dots, z_N, t) \quad (29)$$

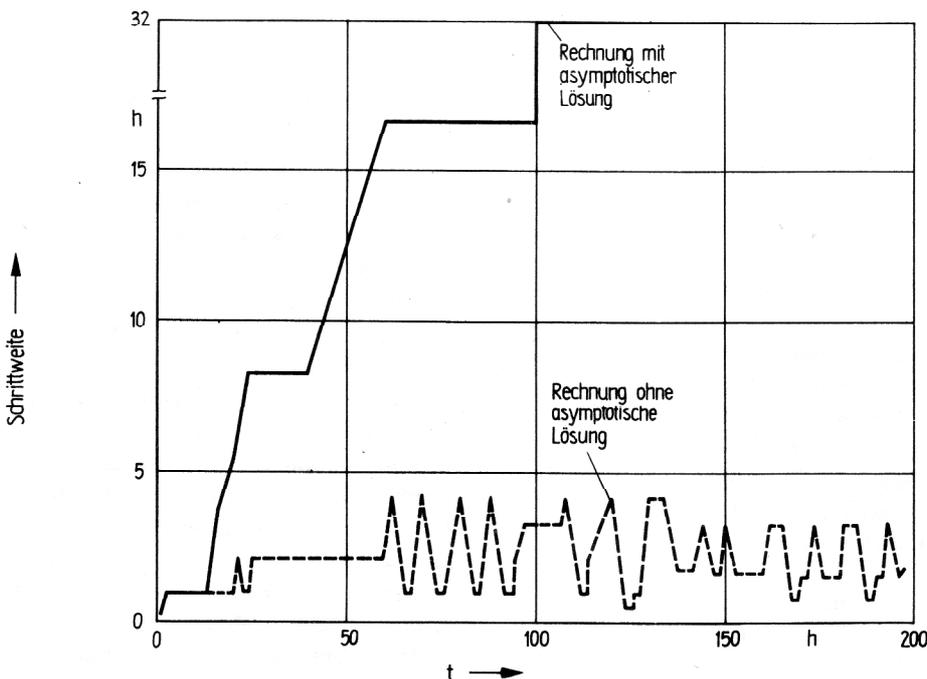
des Systems analog zu (27) und (28) entsprechend

$$\frac{|\Delta z_i|}{|z_i| + \lambda} < \epsilon_{RU} \quad (30)$$

Die Fehlerschranke ϵ_{RU} wurde dabei konstant gehalten ($\epsilon_{RU} = 0,001$). ϵ_{AS} nahm die Werte 0,001, 0,002,

Bild 12

Schrittweitenverlauf für die Berechnung eines Materialpunktes (Programm NIMEHS)



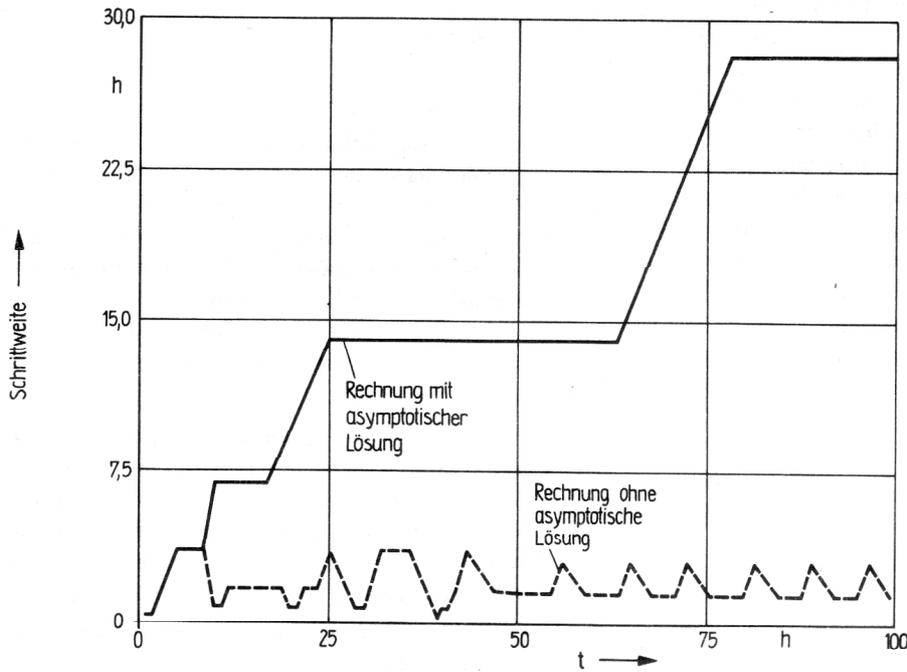


Bild 13
Schrittweitenverlauf für die
Berechnung eines Schalenquer-
schnitts ($\rho = 0,75$)

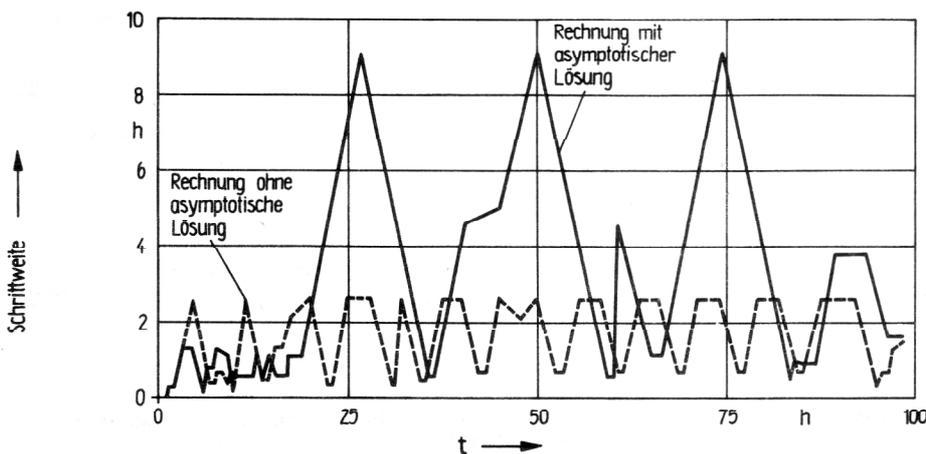


Bild 14
Schrittweitenverlauf für die
Berechnung der Platte

0,0015, 0,01 und 0,0 (keine asymptotische Lösung) an. Die Erhöhung der Rechengeschwindigkeit war für den Maximalwert von $\epsilon_{AS} = 0,01$ am größten.

Bei der Relaxation konnte eine größere Rechenzeitsparung erzielt werden als beim Kriechen. Sie betrug gegenüber der Rechnung ohne Anwendung der asymptotischen Lösung 34 % bei der Relaxation und 24,2 % beim Kriechen. Das hier gewählte Verhältnis $\epsilon_{RU} / \epsilon_{AS} = 0,1$ kann jedoch nicht für alle Werte ϵ_{RU} aufrechterhalten werden. Wird ϵ_{RU} aus Gründen einer ökonomisch günstigeren Rechnung auf 0,01 festgelegt, was bei größeren Problemen erforderlich ist, so kann ϵ_{AS} nicht den Wert von 0,1 annehmen. Dies entspricht einem Ergebnisfehler von 10 %, welcher nicht mehr vertretbar ist. Für diesen Fall genügt es, $\epsilon_{AS} = 1,5 \epsilon_{RU}$ festzulegen. Die Rechenzeitsparung beträgt dann noch ca. 20 %.

Mit dem relativ kleinen Anfangswertproblem für den einzelnen Materialpunkt (9 Differentialgleichungen im System (29)) konnte mit wenig Rechenaufwand

diese Aussage gewonnen werden. Offensichtlich verlangt eine stabile Schrittweiterehöhung einen größeren Wert der Fehlerschranke als den des Integrationsverfahrens.

Danach wurden über die Zwischenstufe eines Programms, das die Variablen eines Schalenquerschnitts separat integriert, (Mittelflächendehnungen und -krümmungen, Schnittkräfte und -momente, Spannungen und interne Variable, für die vorgegebene Platte 50 Differentialgleichungen), die gewonnenen Erkenntnisse auf das Problem der Platte umgesetzt.

Bei der Platte wächst die Zahl der Differentialgleichungen des AWP (29) auf 1284 an, da weitere querschnittstypische Variable hinzukommen. Außerdem ist in die Ermittlung der Funktionen (29) die Lösung eines RWP eingeschlossen. Daher sind hier vergleichende Untersuchungen zum optimalen Verhältnis $\epsilon_{AS} / \epsilon_{RU}$ unangebracht. Es wurde $\epsilon_{RU} = 0,01$ gewählt, um nicht schon durch eine zu kleine Integrationsfehlergrenze die Rechenzeit zu überhöhen. Entsprechend den Ergebnissen

der NIMEHS-Rechnung wurde dann $\epsilon_{AS} = 0,015$ gesetzt.

Die Bilder 12, 13 und 14 zeigen den Verlauf der Integrationsschrittweite in Abhängigkeit von der Belastungszeit für das Materialprogramm NIMEHS, das separate Schalenquerschnittsprogramm für den Querschnitt $\rho = 0,75$ und das Schalenprogramm NISCHA 82. In allen Fällen wurden die Materialdaten der Variante A verwendet. Aus allen drei Darstellungen wird ersichtlich, daß bei Anwendung der asymptotischen Lösung die mittlere Schrittweite sich deutlich erhöht. Entsprechend sinkt die Gesamtrechenzeit, wobei allerdings eine etwas höhere Rechenzeit pro Einzelschritt infolge zusätzlicher Tests, die eine Anzahl algebraischer Operationen erfordern, in Rechnung gestellt werden muß.

7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Möglichkeiten und Ergebnisse bei der Anwendung der Programme NISCHA 82 und NIMEHS vorgestellt. Es werden der Einfluß der physikalischen und geometrischen Nichtlinearität sowie Methoden zur Rechenzeiteinsparung erläutert.

Das Verformungsverhalten im nichtelastischen Bereich wird sowohl von der zweiten Invariante des Deviators als auch von der ersten Invariante des Spannungstensors (Mittelspannung) beeinflusst. Die Erfassung des unsymmetrischen Einflusses der Spannungssumme hat die gleiche Bedeutung für die praktische Anwendung, wie der Einfluß der Spannungssumme selbst und verlangt keine zusätzlichen rechentechnischen Aufwendungen.

Bei inhomogenen Spannungsverteilungen, die außerdem meist mit inneren Relaxationsvorgängen verbunden sind, ist der Mittelspannungseinfluß mit so geringen Wirkungen verbunden, daß er technisch uninteressant wird. Diese Aussage hat keine Konsequenzen für die Berechnung, da das kompliziertere Modell keine Erweiterung des Algorithmus erfordert. Sie ist aber für die experimentelle Bestimmung der Materialeigenschaften von Bedeutung.

Die Vernetzungsgenauigkeit ist entscheidend für die Genauigkeit der Ergebnisse und die Effektivität der Rechnung. Die Zulässigkeit verschiedener geometrischer Diskretisierungen wurde überprüft. Eine automatische Kontrolle der Vernetzung ermöglicht dem Anwender eine Absicherung gegen Vernetzungsfehler.

Weiterhin wurden zwei Verfahren zur Rechenzeiteinsparung untersucht.

Die algebraische Näherung setzt spezielle Lastregimes voraus, die aber besonders bei statischer Langzeitbeanspruchung vorliegen. Sie bringt entscheidende Vorteile bei einer stichprobenartigen Untersuchung einzelner Zeitpunkte, verliert diese aber bei Untersuchungen zeitlicher Verläufe.

Die asymptotische Lösung ist universell einsetzbar und stellt eine spezielle Methode zur Überwindung der Steifigkeit des AWP dar. Der Rechenzeitgewinn wird erst bei langandauernden stationären Prozessen spürbar.

Die Abweichung der Ergebnisse liegt bei diesen Verfahren im Rahmen der vorgegebenen Integrationsgenauigkeit des ursprünglichen AWP.

LITERATUR

- [1] Bergander, H.: Das Deformationsgesetz in Rechenprogrammen für Bauteile aus inelastischem Material. *Techn. Mech.* 1 (1980) Heft 1, S. 57 – 61.
- [2] Bergander, H.: Einheitliches Konzept der Gleichungen des nichtlinear-viskoelastischen Materialverhaltens für FEM-Programmentwicklungen. Vorträge zum Problemseminar „Finite Elemente II“, TU Dresden, Heft 5/77, S. 206 – 225.
- [3] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. *ZAMM* 58 (1978), S. 489 – 499.
- [4] Landgraf, G., Ulbricht, V.: Elastisch-plastische Berechnung von Wellrohrkompensatoren. *Maschinenbautechnik* 27 (1978), S. 77 – 80.
- [5] Bergander, H.: Nichtlinear-viskoelastisches Deformationsverhalten von PVC im ebenen Spannungszustand. *Techn. Mech.* 2 (1981) Heft 2, S. 24 – 35.
- [6] Bergander, H.: Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Kriechkurven, Plaste und Kautschuk 25 (1978), S. 287 – 291.
- [7] Resche, G.: Einfluß der Materialeigenschaften und der geometrischen Nichtlinearität auf das Tragverhalten viskoelastischer Flächentragwerke, Diplomarbeit, TH Karl-Marx-Stadt, 1983.
- [8] Bergander, H.: Programmiergerechte Standardformulierung des inelastischen Materialverhaltens. Tagung Festkörpermechanik, Festigkeitsprobleme und Materialverhalten, Band B, Dresden, 1982.
- [9] Bergander, H.: Die Aufbereitung der Grundgleichungen der nichtlinearen Viskoelastizitätstheorie für die numerische Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. *Diss. B*, TU Dresden, 1976, S. 130 – 133.
- [10] Hennig, K.: Numerische Verfahren zur Integration des linearen Differentialgleichungssystems der Rotationschale. Vorträge zum Problemseminar „Flächentragwerke“, Heft 1/74, S. 16 – 22.
- [11] Zurmühl, R.: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, 5. Auflage. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1965.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Helge Bergander
Dipl.-Ing. Gerd Resche
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
Sektion Maschinen-Bauelemente
DDR – 9010 Karl-Marx-Stadt, PSF 964