

# Strömungsberechnungen mit der Methode der finiten Elemente

Ulrich Gabbert, Manfred Krämer

## 1. Einleitung

Mit der Methode der finiten Elemente (FEM) steht ein universelles numerisches Verfahren zur Diskretisierung allgemeiner Feldgleichungen der mathematischen Physik zur Verfügung. In den fünfziger Jahren aus den Matrizenmethoden der Stabstatik hervorgegangen, entwickelte sich die FEM in den sechziger und siebziger Jahren zu dem wichtigsten Berechnungsverfahren der Festkörpermechanik und wird darüber hinaus heute in vielen anderen Fachgebieten erfolgreich eingesetzt. Dazu gehört insbesondere auch die Strömungsmechanik, in der die FEM zunehmend praktische Bedeutung erlangt. Die große Zahl von Publikationen auf diesem Gebiet unterstreicht diese Tendenz. Die Monographien [1] bis [8] geben einen guten Überblick über den gegenwärtigen internationalen Stand der Anwendung der FEM in der Strömungsmechanik.

Die Grundidee der FEM besteht darin, das Lösungsgebiet in einer Anzahl geometrisch einfacher Teilgebiete, die finiten Elemente, zu zerlegen und für die Verteilung der Feldgrößen innerhalb der Elemente Näherungsansätze einzuführen. Als freie Parameter in den Ansatzfunktionen fungieren die Feldgrößen an bestimmten Punkten, den Knotenpunkten, der Elemente. Unter Verwendung einer der Differentialgleichungen des Problems äquivalenten Integraldarstellung (Energieprinzip, Galerkinsches Verfahren) läßt sich die Lösung auf dem Elementniveau ableiten. Die Summation über alle Elemente des Lösungsgebietes führt problemabhängig auf ein lineares Gleichungs- oder Differentialgleichungssystem, aus dem sich nach Einarbeitung der Randbedingungen, die unbekanntes Feldgrößen an den Knotenpunkten berechnen lassen.

Entscheidend für den Erfolg der FEM ist, daß es auf der Grundlage dieser Methode gelingt, universelle Rechenprogramme und Programmsysteme zu entwickeln, mit denen vielfältige praktische Problemstellungen gelöst werden können.

Im Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik der Technischen Hochschule Magdeburg wurde in den letzten zehn Jahren eine größere Zahl von FE-Programmen entwickelt und erfolgreich in die praktische Anwendung überführt. Mit dem universellen FE-Programmsystem COSAR wurde eine leistungsfähige FE-Software geschaffen, die speziell auf die Belange komplexer dreidimensionaler Berechnungen zugeschnitten ist und gegenwärtig die Zweige Elastostatik, Eigenschwingungen und stationäre Temperaturfelder umfaßt [9]. Die enge Zusammenarbeit mit vielen Industriebetrieben sichert eine rasche Nutzung der erreichten Ergebnisse. Gemeinsam mit dem Kombinat Pumpen und Verdichter Halle werden umfangreiche dreidimensionale Festigkeitsuntersuchungen

an Pumpen- und Verdichterbauteilen durchgeführt. Von besonderem Interesse für diesen Industriezweig ist jedoch auch die reale Erfassung der Strömungsvorgänge in diesen Bauteilen.

Neben den bisher im Pumpen- und Verdichterbau üblichen Berechnungsverfahren wird in Zukunft auch die FEM für die Lösung praktischer Problemstellungen Bedeutung gewinnen.

Von dieser durch die internationale Entwicklung gestützten Erkenntnis ausgehend, wurden erste eigene Arbeiten auf diesem Gebiet begonnen, über die in der vorliegenden Publikation berichtet wird. Das Ziel dieser Arbeiten besteht in der Schaffung anwendungsbereiter, nutzerfreundlicher Rechenprogramme für die Durchführung praktischer Strömungsberechnungen. Die praktischen Erfordernisse bedingen dabei eine Orientierung auf dreidimensionale Berechnungen.

## 2. Reibungsfreie inkompressible Strömungen

Die Idealisierung einer Strömung als reibungsfreie inkompressible Strömung (Potentialströmung) bedeutet eine erhebliche Vereinfachung in der mathematischen Formulierung, so daß es mit der FEM unter Beachtung der vorhandenen Rechentechnik problemlos möglich ist, auch komplexe Strömungsgebiete zu berechnen. Trotz der starken Vereinfachungen und den damit verbundenen Abweichungen vom realen Verhalten der Strömung lassen sich auf dieser Basis für viele praktische Problemstellungen brauchbare Ergebnisse ableiten. Die Qualität der Ergebnisse hängt davon ab, wie gut die Voraussetzungen der Potentialtheorie erfüllt sind. Für nahezu reibungsfreie und nur schwach kompressible Medien ist die Benutzung der Potentialtheorie sinnvoll. Die im Pumpen- und Verdichterbau vorhandenen Anwendungsmöglichkeiten rechtfertigen die Entwicklung einer leistungsfähigen Software für diese spezielle Aufgabenklasse.

### Finite-Elemente-Lösung

Für reibungsfreie inkompressible Strömungen läßt sich das Geschwindigkeitsfeld  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gemäß  $v_i = \Phi_{,i}$  aus einer Potentialfunktion  $\Phi$  ableiten.<sup>1)</sup> Setzt man diesen Zusammenhang in die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Medien

$$v_{i,i} = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

ein, ergibt sich die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Phi_{,ii} = 0 \quad \text{in } V \quad (2a)$$

1) Kleine lateinische Indizes nehmen die Werte 1, 2, 3 an und bezeichnen die Richtungen des kartesischen Koordinatensystems  $x_1, x_2, x_3$ . Indizes nach einem Komma bedeuten partielle Ableitungen. Über sich wiederholende Indizes ist entsprechend der Einsteinschen Konvention zu summieren.

Als Randbedingungen sind auf einem Teil der Oberfläche  $O_1$  Werte  $\bar{\Phi}$  für die Potentialfunktion und auf dem anderen Teil der Oberfläche  $O_2$  Geschwindigkeiten  $\bar{v}_n$  normal zum Rand vorgegeben.

$$\Phi = \bar{\Phi} \quad \text{auf } O_1 \quad (2b)$$

$$\Phi_{,i} c_{in} = \bar{v}_n \quad \text{auf } O_2 \quad (2c)$$

mit  $c_{in} = \cos(x_i, n)$ , wenn  $n$  die Richtung der Normale zum Rand bezeichnet.

Die FE-Lösung basiert auf einer elementweisen Approximation von  $\Phi$  der Form

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = G_K(x_1, x_2, x_3) \cdot \Phi_K, \quad K = 1 \dots M \quad (3)$$

wobei  $\Phi_K$  ( $K = 1 \dots M$ ,  $M$  – Anzahl der Knotenpunkte) die unbekanntenen Knotenwerte von  $\Phi$  und  $G_K$  die Formfunktionen des Näherungsansatzes sind. Die Dgl. (1) läßt sich mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens [10] in eine äquivalente Integraldarstellung überführen

$$\int_V G_K \Phi_{,ii} dV = 0 \quad (4)$$

Partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert

$$\int_V G_{K,i} \Phi_{,i} dV = \int_O G_K \Phi_{,i} c_{in} dO. \quad (5)$$

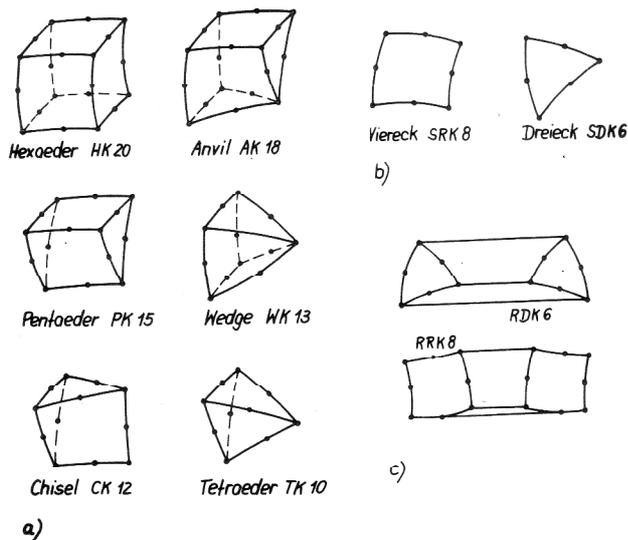
Es sei hier bemerkt, daß die Integralgleichung (5) auch durch die Anwendung der Verfahren der klassischen Variationsrechnung herleitbar ist [16].

Das Einsetzen des Näherungsansatzes (3) führt unter Beachtung der Randbedingungen auf das lineare Gleichungssystem

$$K_{IJ} \Phi_J = f_I \quad (6)$$

mit

$$K_{IJ} = \int_V G_{I,i} G_{J,i} dV \quad (7)$$



**Bild 1**  
Im Programmsystem COSAR für die Lösung von Potentialproblemen einsetzbare finite Elemente  
a) 3D-Elemente  
b) 2D-Elemente  
c) rotationssymmetrische Elemente

$$f_I = \int_{O_2} G_I \bar{v}_n dO. \quad (8)$$

### Rechentchnische Realisierung

Für Testzwecke wurde zunächst das FORTRAN-Programm HKF entwickelt, das die allgemeinere quasiharmonische Differentialgleichung löst und damit auch für andere Feldprobleme (z. B. Temperaturfelder) einsetzbar ist [12]. Darauf aufbauend wurde für Potentialströmungsberechnungen im Pumpen- und Verdichterbau das Programm FLUID1 erarbeitet. Beide Programme benutzen das isoparametrische 20-Knoten-Hexaederelement HK20 (vgl. Bild 1).

Das Element ist in der Lage, einen quadratischen Verlauf der Potentialfunktion  $\Phi$  und damit einen linearen Geschwindigkeitsverlauf exakt zu erfassen. Die Elementränder können parabolisch gekrümmt sein, wodurch eine gute Approximation krummlinig begrenzter Strömungsgebiete möglich ist. Mit dem Programm FLUID1 wurde eine Reihe praktischer Problemstellungen bearbeitet; einige Ergebnisse sind nachfolgend angegeben.

Mit der Erweiterung des Programmsystems COSAR um den Zweig zur stationären Temperaturfeldberechnung ist mit diesem System auch die Berechnung komplexer dreidimensionaler Potentialströmungen möglich, da die Laplacesche Gleichung als Sonderfall enthalten ist. Für den Nutzer steht in diesem System der komplexe Satz der in COSAR implementierten dreidimensionalen, ebenen und rotationssymmetrischen Elemente zur Verfügung (Bild 1). Unter Ausnutzung der Substrukturtechnik, der vielfältigen Möglichkeiten der automatischen Datengenerierung und der vorhandenen Zeichensoftware ist eine effektive Dateneingabe und Durchführung der Rechnungen auch für komplizierte Strömungsgebiete möglich.

### Anwendungsbeispiele

Bild 2 zeigt die Vernetzung eines Rohrkrümmers (aus Symmetriegründen wurde nur die Hälfte vernetzt). Aus der Vorgabe der Anströmgeschwindigkeit wurde die im Bild 3 dargestellte Geschwindigkeitsverteilung am Austritt ermittelt.

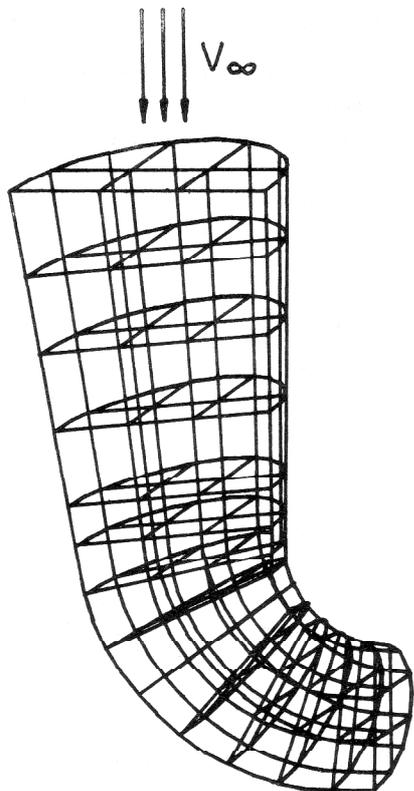
Bild 4 zeigt die Vernetzung eines Pumpeneinlaufgehäuses und Bild 5 die am Austritt berechnete Geschwindigkeitsverteilung. In Bild 6 ist die Vernetzung des Strömungskanals eines Spiralgehäuses dargestellt.

### Hinweis zu kompressiblen Strömungen

Ein vorhandenes Rechenprogramm für die Potentialströmung kann mit geringfügigen Modifikationen auf die Berechnung reibungsfreier kompressibler Strömungen im unterkritischen Bereich erweitert werden. Schreibt man die dafür geltenden Differentialgleichung in der Form

$$\Phi_{,ii} - \frac{1}{c^2} \Phi_{,i} \Phi_{,j} \Phi_{,ij} = 0 \quad \text{in } V \quad (9)$$

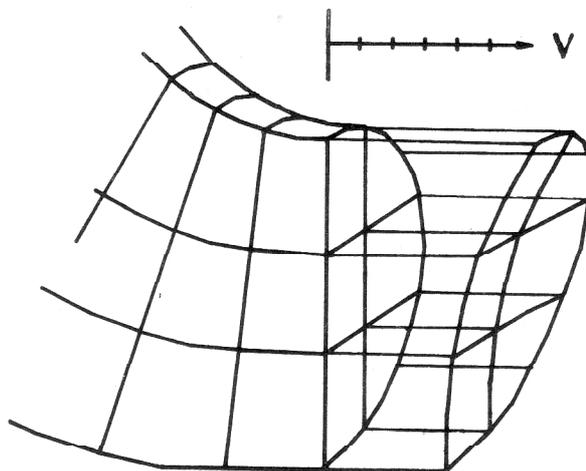
auf ( $c$  bezeichnet die lokale Schallgeschwindigkeit) und betrachtet den zweiten Term als bekannte Quelledichte  $Q$ , ergibt sich bei der FE-Lösung ein zusätzlicher Lastvektor



**Bild 2**  
Vernetzung eines Rohrkrümmers  
562 Knotenpunkte  
78 Elemente

$$f_K = \int_V G_K Q \, dV, \quad (10)$$

der im Rahmen einer iterativen Strategie in jedem neuen Schritt mit den im vorangegangenen Schritt berechneten  $\Phi$ -Werten aktualisiert werden muß. Numerisch vorteilhaft ist, daß die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (5) nur einmal zerlegt zu werden braucht; in jedem Iterationsschritt ist dann mit einer neuen rechten Seite das weniger zeitaufwendige Vorwärts-Rückwärts-Einsetzen auszuführen (vgl. dazu [13] bis [15]). Die programmtechnische Realisierung dieser Strategie ist vorgeesehen.

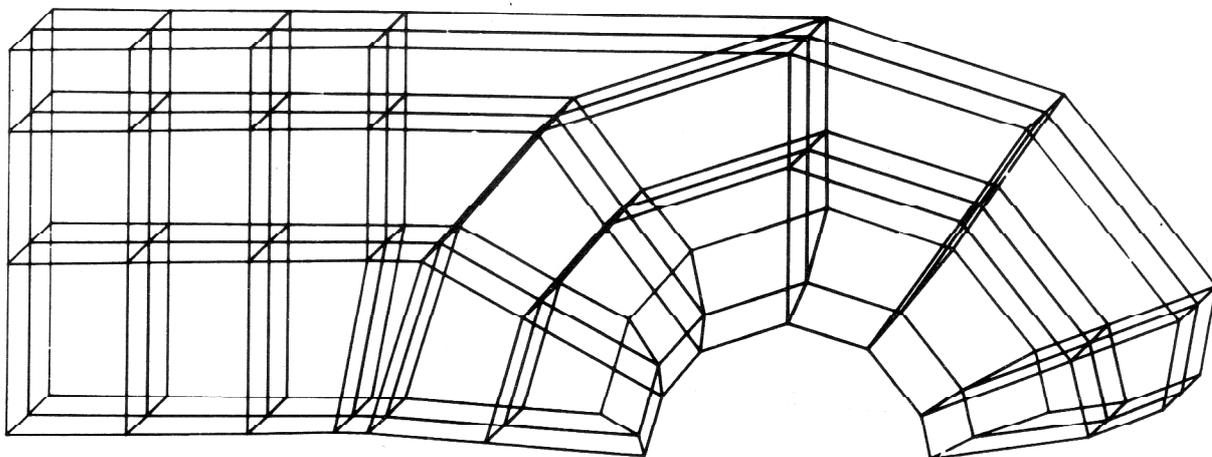


**Bild 3**  
Geschwindigkeitsverteilung am Austritt des Rohrkrümmers

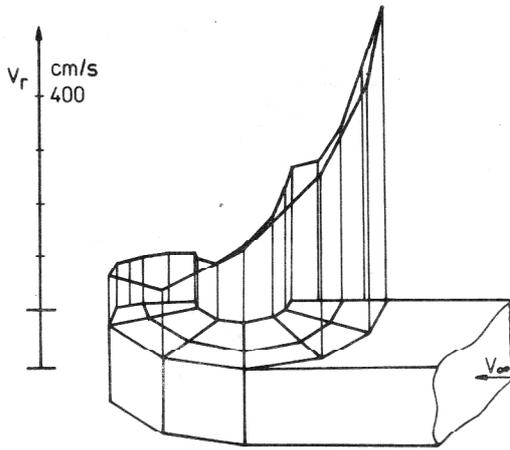
### 3. Reibungsbehaftete inkompressible Strömungen

Mit der Potentialtheorie können viele in einer realen Strömung auftretende Erscheinungen nicht geklärt werden (z. B. Haften an festen Rändern). Die Berücksichtigung der Viskosität des strömenden Mediums führt zu Lösungen, die besser mit dem tatsächlichen Strömungsverhalten übereinstimmen. Allerdings führt das auch auf erheblich schwieriger zu lösenden Differentialgleichungen, die sogenannten Navier-Stokesschen Gleichungen. Der Lösung dieses Systems partieller Differentialgleichungen sind in der Vergangenheit eine Vielzahl von Arbeiten gewidmet worden, wobei analytische Lösungen nur für Spezialfälle bekannt sind [16]. Die Finite-Elemente-Methode erlangt zunehmende Bedeutung bei der numerischen Behandlung der Navier-Stokesschen Gleichungen (vgl. dazu [17] bis [25]).

Nachfolgend wird als Grundlage für die rechentechnische Realisierung eine FE-Lösung des Problems angegeben, die auf der sogenannten Geschwindigkeits-Druck-Formulierung [18] beruht. Diese gemischte Methode (es werden getrennte Ansätze für die Geschwindigkeiten und



**Bild 4**  
Vernetzung eines Pumpeneinlaufgehäuses  
365 Knoten  
48 Elemente



**Bild 5**  
Geschwindigkeitsverteilung am Austritt des Pumpeneinlaufgehäuses

den Druck eingeführt) ist im Unterschied zur Stromfunktion- oder Stromfunktion-Wirbel-Formulierung [20], [21] nicht auf zweidimensionale Probleme beschränkt. Ein wesentlicher Vorteil besteht darin, daß Geschwindigkeits- und Druckrandbedingungen direkt berücksichtigt werden können.

Nachfolgend werden ausgehend von der allgemeinen FE-Formulierung des Problems praktische wichtige Spezialfälle betrachtet und einige mit Hilfe von Testprogrammen erzielte Ergebnisse angegeben.

### 3.1. Finite-Elemente-Lösung

Die Bewegungsgleichung eines Flüssigkeitspartikels in einer viskosen Strömung lautet

$$\rho \dot{v}_i + \rho v_j v_{i,j} - \rho \bar{X}_i - \sigma_{j,i,j} = 0 \quad \text{in } V \quad (11)$$

Der Punkt kennzeichnet die Ableitung nach der Zeit,  $\rho$  ist die Dichte,  $\bar{X}_i$  sind die Komponenten des Volumenlastvektors und  $\sigma_{ij}$  bezeichnet die Spannungen, die sich mittels eines geeigneten Materialgesetzes durch die Strömungsgeschwindigkeiten  $v_i$  und den Flüssigkeitsdruck  $p$  ausdrücken lassen. Für inkompressible Newtonsche Flüssigkeiten gilt beispielsweise

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (12)$$

Mit den Bewegungsgleichungen (11), dem Materialgesetz (12) und der Kontinuitätsgleichung (1) stehen die für die Lösung des Problems erforderlichen Gleichungen zur Verfügung.

Für die FE-Lösung werden getrennte Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten  $v_i$  und den Druck  $p$  eingeführt.

$$v_i = G_K^v(x_1, x_2, x_3) v_{iK}(t) \quad \begin{matrix} K = 1 \dots M \\ i = 1 \dots 3 \end{matrix} \quad (13)$$

$$p = G_L^p(x_1, x_2, x_3) p_L(t) \quad L = 1 \dots N \quad (14)$$

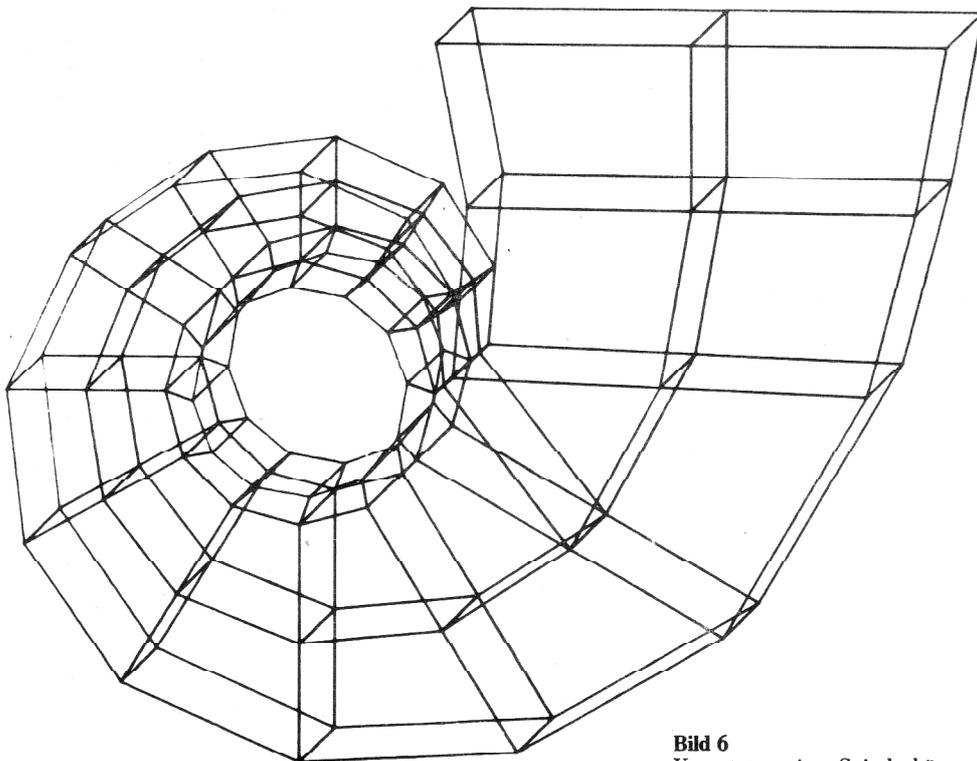
$M$  – Anzahl der Knoten zur Interpolation der Geschwindigkeiten

$N$  – Anzahl der Knoten zur Interpolation des Druckes

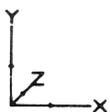
Mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens werden die Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung in eine Integraldarstellung überführt.

$$\int_V G_K^v (\rho \dot{v}_i + \rho v_j v_{i,j} - \rho \bar{X}_i - \sigma_{j,i,j}) dV = 0 \quad (15)$$

$$\int_V G_L^p v_{i,i} dV = 0 \quad (16)$$



**Bild 6**  
Vernetzung eines Spiralgehäuses  
360 Knoten  
40 Elemente



Durch eine partielle Integration des Spannungsterms und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes läßt sich (15) folgendermaßen umformen

$$\int_V \rho G_K^v \dot{v}_i dV + \int_V \rho G_K^v v_j v_{i,j} dV - \int_V \rho G_K^v \bar{X}_i dV + \int_V G_{K,j}^v \sigma_{ji} dV - \int_O G_K^v \sigma_{ji} c_{jn} dO = 0 \quad (17)$$

Nach Einsetzen des Materialgesetzes und der Ansatzfunktion in (15) und (10) ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{vv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{vv} + \bar{\mathbf{K}}^{vv} & \mathbf{K}^{vp} \\ (\mathbf{K}^{vp})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}^v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$\mathbf{v}$  bezeichnet den Vektor der Knotengeschwindigkeiten und  $\mathbf{p}$  den Vektor der Knotendrucke

$$\mathbf{v}^T = [v_{11} \ v_{21} \ v_{31} \ \dots \ v_{1K} \ v_{2K} \ v_{3K} \ \dots \ v_{1M} \ v_{2M} \ v_{3M}]$$

$$\mathbf{p}^T = [p_1 \ \dots \ p_L \ \dots \ p_N]$$

$$\mathbf{M}_{IJ}^{vv} = \int_V \rho G_I^v G_J^v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dV \quad (19) \quad I, J = 1 \dots M$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{vv} = \int_V \mu \begin{bmatrix} 2G_{I,1}^v G_{J,1}^v + G_{I,2}^v G_{J,2}^v + G_{I,3}^v G_{J,3}^v & G_{I,2}^v G_{J,1}^v & G_{I,3}^v G_{J,1}^v \\ G_{I,1}^v G_{J,2}^v & G_{I,1}^v G_{J,1}^v + 2G_{I,2}^v G_{J,2}^v + G_{I,3}^v G_{J,3}^v & G_{I,3}^v G_{J,2}^v \\ G_{I,1}^v G_{J,3}^v & G_{I,2}^v G_{J,3}^v & G_{I,1}^v G_{J,1}^v + G_{I,2}^v G_{J,2}^v + 2G_{I,3}^v G_{J,3}^v \end{bmatrix} dV \quad (20) \quad I, J = 1 \dots M$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{vp} = - \int_V \begin{bmatrix} G_{I,1}^v \\ G_{I,2}^v \\ G_{I,3}^v \end{bmatrix} G_J^p dV, \quad I = 1 \dots M, \quad J = 1 \dots N \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{IJ}^{vv} = \int_V \rho G_I^v G_J^v \begin{bmatrix} G_{K,1}^v v_{1K} & G_{K,2}^v v_{1K} & G_{K,3}^v v_{1K} \\ G_{K,1}^v v_{2K} & G_{K,2}^v v_{2K} & G_{K,3}^v v_{2K} \\ G_{K,1}^v v_{3K} & G_{K,2}^v v_{3K} & G_{K,3}^v v_{3K} \end{bmatrix} dV \quad (22) \quad I, J, K = 1 \dots M$$

$$\mathbf{x}_I^v = \int_V \rho G_I^v \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} dV \quad (23)$$

$$\mathbf{s}_I^v = \int_O G_I^v \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} dV \quad (24)$$

Mit  $s_i$  werden dabei die Komponenten des Vektors der Oberflächenspannungen bezeichnet, die sich aus

$$s_i = \sigma_{ji} c_{jn} \quad i, j = 1 \dots 3 \quad (25)$$

ergeben.

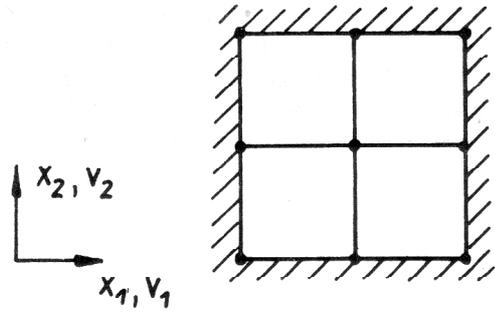


Bild 7  
2 x 2 Patch,  $v_1$  und  $v_2$  auf dem ganzen Rand Null

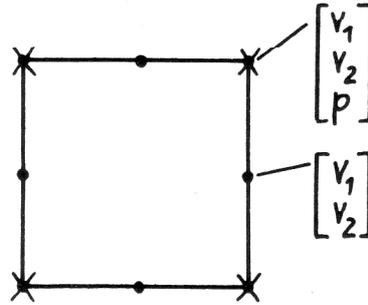


Bild 8  
Isoparametrisches Viereckselement mit 20 Freiheitsgraden  
● Geschwindigkeitsfreiheitsgrade  
x Druckfreiheitsgrade

Damit ist die allgemeine Finite-Elemente-Lösung des Problems gegeben. Nachfolgend werden praktisch wichtige Spezialfälle betrachtet.

### 3.2. Stationäre Kriechströmung (Stokessches Problem)

Die Gleichung (18) vereinfacht sich, wenn ein gegebenes Strömungsproblem eine stationäre Kriechströmung darstellt, die durch große Zähigkeitswerte der Flüssigkeit und geringe Strömungsgeschwindigkeiten gekennzeichnet ist (kleine Reynoldssche Zahl). Die Konvektivitätsmatrix  $\bar{\mathbf{K}}^{vv}$  kann vernachlässigt werden, so daß sich das folgende symmetrische Gleichungssystem ergibt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{vv} & \mathbf{K}^{vp} \\ (\mathbf{K}^{vp})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}^v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Bevor das Gleichungssystem gelöst werden kann, müssen die Randbedingungen eingearbeitet werden. Der einfachste Fall liegt vor, wenn auf dem gesamten Rand die Geschwindigkeiten bekannt sind. Die Berücksichtigung der Randbedingungen erfolgt durch Streichen der entsprechenden Zeile und Spalte in (26). Zusätzlich können auf die gleiche Weise vorgeschriebene Druckwerte erfaßt werden.

Bekannte Oberflächenspannungen lassen sich durch Auswertung von (24) berücksichtigen. Wenn auf einem Teil des Randes die Geschwindigkeiten unbekannt sind, muß dort ebenfalls (24) ausgewertet werden. Mit (12) ergibt sich für die Oberflächenspannungen (25):

$$s_i = [p \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})] c_{jn} \\ = [\hat{G}_L^p \delta_{ij} + \mu (\hat{G}_{K,j}^v v_{iK} + \hat{G}_{K,i}^v v_{jK})] c_{jn} \quad (27)$$

$$K = 1 \dots M \\ L = 1 \dots N \\ i, j = 1 \dots 3$$

$\hat{G}$  sind die Ansatzfunktionen der zum betrachteten Rand gehörenden Oberflächenelemente. Es ist zu erkennen, daß in (27) die unbekanntes Geschwindigkeiten (und gegebenenfalls auch Drücke) an den Randknoten eingehen, so daß eine iterative Strategie erforderlich ist (eine Berücksichtigung der Terme auf der linken Seite des Gleichungssystems (26) würde die Symmetrie der Koeffizientenmatrix zerstören und damit ein erhebliches Anwachsen der Rechenzeiten bedeuten). Für die Durchführung der Iteration ist es zweckmäßig, (27) elementweise an den Oberflächenknoten auszuwerten (es ergeben sich  $s_{iK}$ ,  $K = 1 \dots$  Anzahl der Knoten eines Oberflächenelements) und mittels geeigneter Ansatzfunktionen  $\hat{G}_K^s$  über das Element zu interpolieren.

$$s_i = \hat{G}_K^s s_{iK} \quad (28)$$

Damit läßt sich (24) folgendermaßen berechnen:

$$s_i^v = \int_0^1 \hat{G}_I^v \hat{G}_K^s \begin{bmatrix} s_{1K} \\ s_{2K} \\ s_{3K} \end{bmatrix} dO \quad (29)$$

Die Lösung von (26) kann unter Ausnutzung der Symmetrie und der Bandstruktur von  $K^{vv}$  mittels des Cholesky-Verfahrens erfolgen, wobei sich eine der Substrukturtechnik entsprechende Strategie ergibt (vgl. [9] Abschnitt 2.3.3.), bei der die Matrizeninversion von  $K^{vv}$  vermieden wird. Formal ergibt die Auflösung von (26)

$$v = (K^{vv})^{-1} [-K^{vp} p + X^v + S^v] \quad (30)$$

$$K^{pp} p = f^p \quad (31)$$

mit

$$K^{pp} = (K^{vp})^T (K^{vv})^{-1} (K^{vp}) \quad (32)$$

$$f^p = (K^{vp})^T (K^{vv})^{-1} [X^v + S^v] \quad (33)$$

### Elemente

Bei der Wahl der Elemente ist zu beachten, daß die Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten und den Druck nicht beliebig gewählt werden können, wenn eine eindeutige Lösung der Gleichung (26) gesichert werden soll [1], [24]. Für ein gegebenes Element ist für verschiedene Netzkonfigurationen (englisch „Patches“) zu untersuchen, ob ein Rangabfall der Matrix  $K^{pp}$  vorhanden ist. Es zeigt sich z. B., daß bei isoparametrischen Viereckselementen in der unverzerrten Form, bei denen für die Geschwindigkeiten und den Druck gleiche Ansatzfunktionen benutzt werden, ein Rangabfall der Matrix  $K^{pp}$  auftritt. Für ein Viereckselement mit 4 Knoten und bi-

linearem Ansatz für die Geschwindigkeiten und den Druck kann durch eine Rechnung von „Hand“ leicht gezeigt werden, daß bei einem Patch von  $2 \times 2$  (vgl. Bild 7) der Rangabfall 7 beträgt. Bei Patches mit mehr Elementen ( $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ , ...) ergibt sich ein Rangabfall von 8. Das führt jedoch auf Grund der Rundungsfehler bei einer numerischen Rechnung nicht in jedem Fall zu einem Abbruch, sondern zu unsinnigen Ergebnissen für den Druck. Die mit diesem Elementtyp durchgeführten eigenen Testrechnungen (z. B. Couette-Strömung, Kanaleinlaufströmung) zeigen diese Tendenz; es ergeben sich korrekte Ergebnisse für die Geschwindigkeiten und unbrauchbare Druckwerte.

Das isoparametrische Viereckselement mit quadratischem Ansatz für die Geschwindigkeiten und linearem Ansatz für den Druck (Bild 8) ergeben sowohl für die Geschwindigkeiten als auch für den Druck korrekte Ergebnisse. Werden aus Gründen der höheren Genauigkeit auch für den Druck quadratische Ansatzfunktionen benutzt, zeigt sich wieder ein Rangabfall von  $K^{pp}$ . Dieser Mangel kann am einfachsten durch Einführen zusätzlicher Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten, die nur im Elementinnern wirken, behoben werden. Die entstehenden zusätzlichen Freiheitsgrade lassen sich auf dem Elementniveau eliminieren.

### Eliminieren des Druckes mittels Penalty-Methode

Eine interessante Alternative zu der oben beschriebenen v-p-Formulierung besteht darin, den Druck mit Hilfe der Penalty-Methode unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (1) zu eliminieren [1]. In die Kontinuitätsgleichung wird der Druck eingeführt.

$$p = \alpha \cdot v_{i,i} \quad (34)$$

$\alpha$  ist dabei eine große Zahl (Penalty-Zahl). Mit dieser Gleichung wird in (12) und damit in (18) der Druck eliminiert und es ergibt sich die zusätzliche Matrix

$$\bar{K}_{IJ}^{vv} = \alpha \int_V \begin{bmatrix} G_{I,1}^v & G_{J,1}^v & G_{I,1}^v & G_{J,2}^v & G_{I,1}^v & G_{J,3}^v \\ G_{I,2}^v & G_{J,1}^v & G_{I,2}^v & G_{J,2}^v & G_{I,2}^v & G_{J,3}^v \\ G_{I,3}^v & G_{J,1}^v & G_{I,3}^v & G_{J,3}^v & G_{I,3}^v & G_{J,3}^v \end{bmatrix} dV \quad (35)$$

Die Geschwindigkeiten berechnen sich dann aus

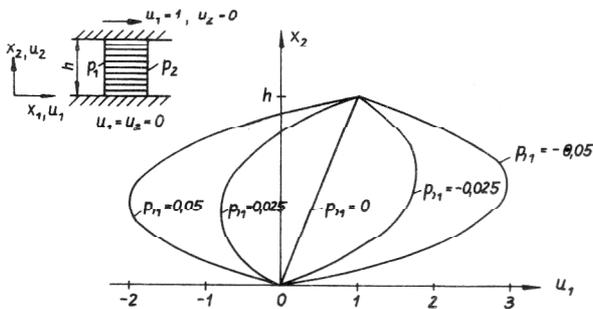
$$(K^{vv} + \bar{K}^{vv} + \bar{K}^{vv}) v = X^v + S^v \quad (36)$$

Zu beachten ist, daß  $\bar{K}^{vv}$  singular sein muß, was gegebenenfalls durch eine selektive reduzierte Integration erreicht wird. Ein Vergleich der Formulierung (36) mit den Gleichungen der Elastostatik zeigt die Übereinstimmung für den Fall  $\mu \rightarrow 0,5$ , d. h. für nahezu inkompressibles Material. Der in dem Hookeschen Gesetz für isotropes Materialverhalten auftretende Term  $\frac{1}{1-2\mu}$  wirkt hier als Penalty-Zahl. Die mit dem Programmsystem COSAR/E84 durchgeführten Testrechnungen unter Verwendung von Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen ergaben brauchbare Ergebnisse für die Geschwindigkeitsverteilung in zähen Strömungen. Bei einigen Beispielen wurde der Wert von  $\alpha$  über einen weiten Bereich  $\mu = 0,4999$  bis  $\mu = 0,49999999$  variiert und dabei keine wesentlichen Änderungen der Ergebnisse festgestellt.

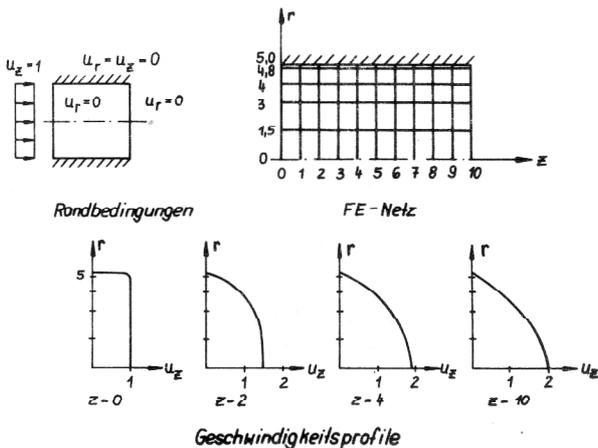
### Beispiele

Unter Verwendung der Formulierung (36) wurde die Couette-Strömung zwischen parallelen Platten für verschiedene Druckgradienten berechnet (vgl. Bild 9). Die Ergebnisse stimmen mit der analytischen Lösung des Problems überein [16].

In den Bildern 10, 11 und 12 sind Berechnungsergebnisse angegeben, die auf der Basis der Gleichungen (36) mittels Penalty-Methode unter Benutzung der Elastostatikversion des Programmsystems COSAR erhalten wurden.



**Bild 9**  
Couette-Strömung



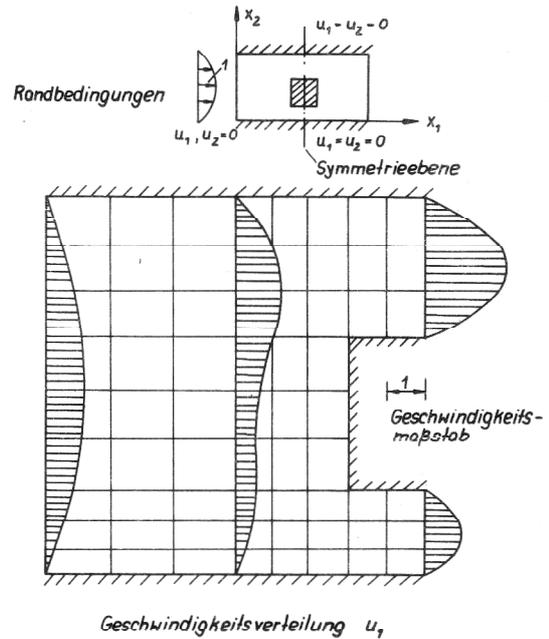
**Bild 10**  
Rohreinlaufströmung, Penalty-Lösung mit  $\mu = 0,49999$

### 3.3. Instationäre Kriechströmung

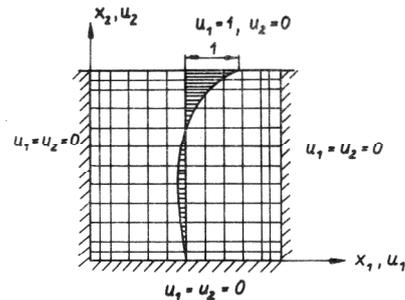
Bei instationären Problemen ist entsprechend Gleichung (18) ein Matrixdifferentialgleichungssystem des Typs

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (37)$$

zu lösen. Dazu stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Verfügung (vgl. z. B. [1], [4], [8], [18], [25]). Die einfachste Variante besteht darin, eine Zeitablaufrechnung auszuführen und dabei innerhalb jeden Zeitschrittes eine lineare Abhängigkeit der Zustandsgrößen von der Zeit einzuführen (Einschnittverfahren). Die höhere Genauigkeit der Mehrschnittverfahren erkaufte man sich durch einen höheren numerischen Aufwand. Im Hinblick auf die Lösung sehr großer gegebenenfalls nicht-linearer Systeme und dem damit verbundenen hohen



**Bild 11**  
Strömung um ein Rechteckhindernis (vgl. [1]), Penalty-Lösung mit  $\mu = 0,49995$



**Bild 12**  
Geschwindigkeitsverteilung  $u_1$  im Mittelschnitt eines rechteckigen Hohlraumes, Penalty-Lösung  $\mu = 0,49995$

Rechenzeitaufwand, werden zunächst Einschrittverfahren realisiert, die sich auch bei instationären Temperaturfeldberechnungen bewährt haben [26]. Die programmtechnische Konzeption ermöglicht es jedoch, problemlos auch andere Verfahren zu implementieren.

Mit einem linearen Ansatz im Zeitschritt  $\Delta t$  für a

$$\mathbf{a} = (1 - \Theta) \mathbf{a}_n + \Theta \mathbf{a}_{n+1} \quad (38)$$

ergibt sich folgende Rekursionsformel

$$[\mathbf{M} + \Theta \Delta t \mathbf{K}] \mathbf{a}_{n+1} = [\mathbf{M} - (1 - \Theta) \Delta t \mathbf{K}] \mathbf{a}_n + \Delta t [(1 - \Theta) \mathbf{F}_n + \Theta \mathbf{F}_{n+1}]. \quad (39)$$

Die Lösung im Zeitschritt erfolgt wie beim stationären Fall beschrieben. Der Parameter  $\Theta$  steuert das Lösungsverfahren; mit  $\Theta = \frac{1}{2}$  erhält man das bekannte Crank-Nicolsonsche Verfahren (zentrale Differenzenformel) und mit  $\Theta = \frac{2}{3}$  des Galerkinsche Verfahren, die beide für die praktische Anwendung empfohlen werden können.

nen. Das Galerkinsche Verfahren ist weniger empfindlich gegenüber Oszillationen, so daß es bei sprunghaften Änderungen der Strömungsvariablen (z. B. am Anfang der Integration) eingesetzt werden sollte.

Demgegenüber weist das Crank-Nicolsonsche Verfahren eine höhere Genauigkeit auf.

Bei konstanten Matrizen  $M$  und  $K$  und unveränderten Zeitschritten brauchen in jedem Schritt nur jeweils eine neue rechte Seite aufgebaut und mit der bereits zerlegten Koeffizientenmatrix die Unbekannten rückgerechnet zu werden. Anhand eines Testprogrammes wurde die Anwendbarkeit dieses Algorithmus nachgewiesen. Bild 13 zeigt die Ergebnisse der Berechnung einer instationären Couette-Strömung für den Fall, daß der Druckgradient  $p_1$  Null ist (siehe dazu die für den stationären Fall in Bild 9 angegebene Problembeschreibung).

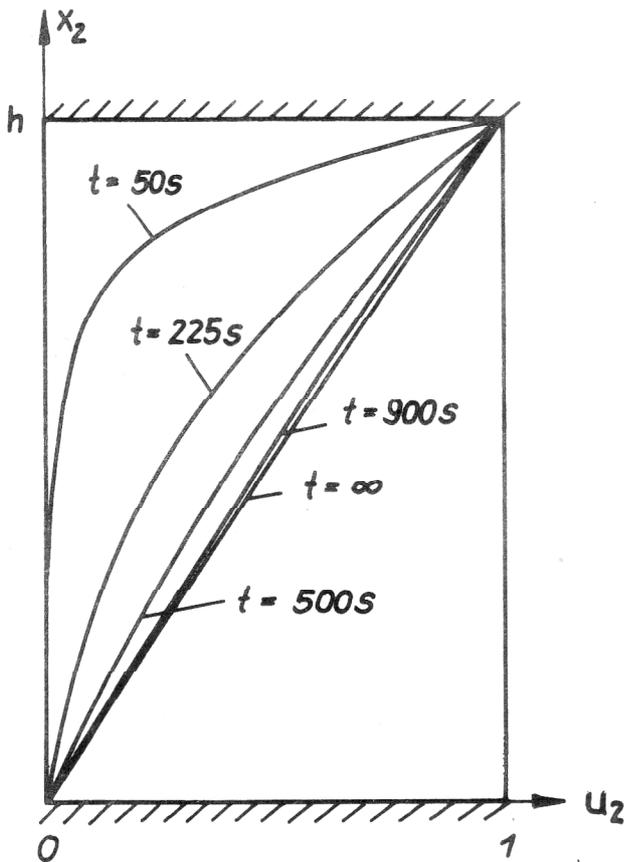


Bild 13  
Instationäre Couette-Strömung  
(Rechnung mit  $\Delta t = 50$  s,  $\Theta = \frac{2}{3}$ )

### 3.4. Stationäre Strömungen mit Berücksichtigung der konvektiven Terme

Bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten (größere Reynoldssche Zahlen) kann der Einfluß der nichtlinearen konvektiven Terme nicht mehr vernachlässigt werden, d. h. in (26) ist die Matrix  $\bar{K}^{vv}$  zu berücksichtigen:

$$\begin{bmatrix} K^{vv} + \bar{K}^{vv}(v) & K^{vp} \\ \hline (K^{vp})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xv \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Sv \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Die Matrix  $\bar{K}^{vv}$  ist unsymmetrisch und abhängig von den Geschwindigkeiten, d. h. das Gleichungssystem (40) muß

iterativ gelöst werden. Die einfachste Lösungsstrategie, die auch numerisch den geringsten Aufwand erfordert, besteht darin, den Term  $\bar{K}^{vv}(v) \cdot v$  auf die rechte Seite zu nehmen und diese in jedem Iterationsschritt (ausgehend von der Kriechströmung) mit den im vorangegangenen Schritt berechneten Geschwindigkeiten zu aktualisieren. Diese Vorgehensweise konvergiert jedoch nur bei kleinen Reynoldsschen Zahlen. Das gilt auch dann, wenn  $\bar{K}^{vv}(v)$  auf der linken Seite beibehalten und in jedem Schritt aktualisiert wird. Eine verbesserte Lösung läßt sich mit dem bewährten Newton-Raphsonschen Verfahren erreichen. Schreibt man (40) in der Form

$$K(a) a = F \quad (41)$$

ergibt sich folgende Iterationsvorschrift

$$K_T(a_n) a_{n+1} = K_T(a_n) a_n - [K(a_n) a_n - F(a_n)] \quad (42)$$

mit:

$$K_T = \frac{\partial}{\partial a} [K(a) a - F(a)]. \quad (43)$$

Die Differentiation liefert mit (40)

$$K_T = \begin{bmatrix} K^{vv} + \bar{K}^{vv} + \bar{K}_{T1}^{vv} & K^{vp} \\ \hline (K^{vp})^T & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Eine 3 x 3-Untermatrix von  $\bar{K}_{T1}^{vv}$  hat die Form

$$\bar{K}_{T1 IJ}^{vv} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad (45)$$

mit

$$b = \int_V \rho G_I [G_{J,1} (G_K v_{1K}) + G_{J,2} (G_K v_{2K}) + G_{J,3} (G_K v_{3K})] dv.$$

Damit kann die Iteration nach (42) ausgeführt werden. In jedem Iterationsschritt muß die unsymmetrische Matrix  $K_T$  mit den zuletzt ermittelten Geschwindigkeiten neu berechnet und das Gleichungssystem (42) gelöst werden. Das ist speziell im Hinblick auf die Bearbeitung von praktischen Problemstellungen mit einer großen Zahl von Freiheitsgraden ein numerisch sehr aufwendiger Prozeß.

## 4. Ausblick

Das Ziel der weiteren Arbeiten besteht darin, im Rahmen des universellen FE-Programmsystems COSAR einen Zweig zur Lösung strömungsmechanischer Aufgaben aufzubauen. Dieses Teilsystem soll die vorhandenen Systeme COSAR-Elastostatik, COSAR-Dynamik und COSAR-Temperaturfeld ergänzen. Die bisher durchgeführten Untersuchungen dienten der Testung bestimmter Lösungsalgorithmen und Elementeigenschaften. Auf den dabei gesammelten Erfahrungen aufbauend soll in der ersten Ausbaustufe des Programmsystems die Lösung inkompressibler reibungsbehafteter Strömungen mit Berücksichtigung der konvektiven Terme (stationär und instationär) für zweidimensionale, axialsymmetrische und dreidimensionale Strömungsgebiete möglich sein (siehe Gleichung (18)). Da die Lösung dieser allgemeinen instationären, nichtlinearen Probleme speziell für reale dreidimensionale Aufgaben mit hohen Rechenzeiten verbunden ist, werden für die im vorliegenden Artikel beschrie-

benen Spezialfälle gesonderte Lösungsalgorithmen bereitgestellt. Als Elementbasis dienen vorrangig die bisher in COSAR implementierten ebenen, axialsymmetrischen und räumlichen isoparametrischen Elemente mit Eckknoten und Knoten auf den Mitten der Seitenkanten (vgl. [9] Abschnitt 3.4). Auf der Grundlage der v-p-Formulierung wird für die Geschwindigkeit ein quadratischer und für den Druck ein linearer Ansatz gewählt.

Da die meisten technischen Probleme dreidimensionale Berechnungsmodelle erfordern, muß der Schwerpunkt bei der Entwicklung einer FE-Software auf diesem Gebiet liegen. Allerdings muß man sich darüber im klaren sein, daß die Behandlung erweiterter Modelle unter Berücksichtigung beispielsweise der Koppelung mit der Energiegleichung (Temperaturfeld) an der Grenze der verfügbaren Rechentechnik stößt. Vom internationalen Stand ausgehend werden jedoch mit der Verfügbarkeit neuer Rechnerhardware weitere Fortschritte auf dem Gebiet der Strömungsberechnungen mittels FEM zu erwarten sein, auch im Hinblick auf die Erfassung turbulenter Strömungsvorgänge [27].

#### LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method. Mc Graw Hill Book Comp., London 1977.
- [2] Connor, J. J., Brebbia, C. A.: Finite Element Techniques for Fluid Flow. Newnes-Butterworth, London-Boston 1977.
- [3] Gallagher, R. H., Oden, J. T., Taylor, C., Zienkiewicz, O. C. (Eds.): Finite Elements in Fluids, Vol. 1 (1975), Vol. 2 (1975), Vol. 3 (1978). J. Wiley and Sons, London.
- [4] Chung, T. J.: Finite Elemente in der Strömungsmechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- [5] Thomasset, F.: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations by Finite Element Methods. VKI Lecture Series Nr. 86, 1977.
- [6] Girault, V., Raviart, P. A.: Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equation. Springer Verlag 1979.
- [7] Taylor, C.: Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations. W. S. Atkinson, Swansea 1981.
- [8] Baker, A. J.: Finite Element Computational Fluid Mechanics. Mc Graw Hill Book Company 1983.
- [9] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1982.
- [10] Finlayson, B. A.: The Method of the Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press, New York 1972.
- [11] Krämer, M.: Berechnung der Potentialströmung in ausgewählten Pumpenbauteilen mit FEM. Pumpen- und Verdichterinformationen 2, 1983, S. 32 – 36.
- [12] Gabbert, U., Strünke, M.: Die Berechnung von Feldproblemen mit der Methode der finiten Elemente. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg, 21 (1977), Heft 4, 509 – 514.
- [13] Gelder, D.: Solution of the compressible flow equation. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, 1971, 35 – 43.
- [14] Leonhard, J. W.: Finite element analysis of perturbed compressible flow. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 4, 1972, 123 – 132.
- [15] Periaux, J.: Three dimensional analysis of compressible potential flow with the finite element method. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, 1975, 775 – 831.
- [16] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1965

- [17] Oden, J. T., Wellford, L. C.: Analysis of flow of viscous fluids by the finite element method. AIAA Journal, Vol. 10, 12, 1972, 1590 – 1599.
- [18] Taylor, C., Hood, P.: A numerical solution of the Navier-Stokes equation using a finite element technique. Int. J. Comp. and Fluids, Vol. 1, 1973, 73 – 100.
- [19] Baker, A. J.: Finite element solution algorithm for viscous incompressible fluid dynamics. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 6, 1973, 89 – 101.
- [20] Campion-Renson, A., Chrochet, M. J.: On the stream function-vorticity finite element solutions of Navier-Stokes equations. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12, 1978, 1809 – 1818.
- [21] Dhatt, G., Fomo, B., K., Bourque, G.: A  $\psi - \omega$  finite element formulation for the Navier-Stokes equations. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 17, 1981, 199 – 212.
- [22] Engleman, M. S., Strang, G., Bathe, K. J.: The application of quasi-Newton methods in fluid mechanics. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 17, 1981, 707 – 718.
- [23] Bar-Yoseph, P., Blech, J. J., Solan, A.: Finite element solution of the Navier-Stokes equations in rotating flow. Int. J. Num. Eng., Vol. 17, 1981, 1123 – 1146.
- [24] Jackson, C. P., Cliffe, K. A.: Mixed interpolation in primitive variable finite element formulation for incompressible flow. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 17, 1981, 1659 – 1688.
- [25] Perktold, K.: Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen mittels der Methode der finiten Elemente. Forschungszentrum Graz, Bericht Nr. 133, 1980.
- [26] Gabbert, U., Krämer, M.: Temperaturfeldberechnungen mit der Methode der finiten Elemente. Luft- und Kältetechnik 1981, 1, 29 – 34.
- [27] Häggblad, B., Mattsson, M.: FEM-Technik für strömungsmechanische Berechnungen. ASEA-Zeitschrift 1, 1983, 32 – 39.

Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. Ulrich Gabbert  
Technische Hochschule „Otto von Guericke“  
Sektion Maschinenbau  
3010 Magdeburg, PSF 124

Dipl.-Math. Manfred Krämer  
VEB Kombinat Pumpen und Verdichter  
WTZ

4020 Halle (Saale)  
Leninallee